À propos des limites inductives filtrantes et du théorème de Lazard sur les modules plats

Cette note est écrite comme une section 7 du chapitre VIII du livre *Algèbre Commutative. Méthodes Constructives.* Calvage&Mounet (2011). Elle nécessite de la part du lecteur une familiarité avec le langage des catégories.

On a écrit à la fin de la section IV-1 la digression suivante.

Outre leur rapport direct avec la résolution des systèmes linéaires une autre raison de l'importance des modules de présentation finie est la suivante.

Chaque fois qu'un calcul algébrique aboutit à un « résultat intéressant » dans un $\mathbf{A}$-module M, ce calcul n'a fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments x_1, …, x_n de M et un nombre fini de relations entre les x_j, de sorte qu'il existe un module de présentation finie $P = \mathbf{A}^n/R$ et un homomorphisme surjectif $\theta : P \to x_1\mathbf{A} + \cdots + x_n\mathbf{A} \subseteq M$ qui envoie les e_j sur les x_j (où e_j désigne la classe modulo R du j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{A}^n$), et tel que le « résultat intéressant » avait déjà lieu dans P pour les e_j.

En langage plus savant on exprime cette idée comme ceci. *Tout* $\mathbf{A}$*-module est limite inductive filtrante d'*$\mathbf{A}$*-modules de présentation finie.*
Mais cet énoncé nécessite un traitement un peu subtil en mathématiques constructives, et nous ne faisons donc que signaler son existence.

On peut donner le traitement un peu subtil signalé, comme suit.

7. Limites inductives filtrantes

Le but de cette section est de donner un traitement détaillé du théorème suivant et d'en tirer quelques conséquences.

7.1. Théorème. *Tout* $\mathbf{A}$*-module est limite inductive filtrante catégorique d'*$\mathbf{A}$*-modules de présentation finie.*

Pourquoi limite ?

Avant d'attaquer le théorème proprement dit, une petite question.

Quand on fait la somme directe ou le produit direct de deux objets dans une catégorie, quand on prend l'égaliseur d'une double flèche, un produit fibré ou une somme amalgamée, il n'y a aucune raison de parler de limite.

Une limite, c'est quand on passe du fini à l'infini.

Il y a donc une sorte d'erreur terminologique à la base, et l'on peut se demander si quelque chose a déjà été proposé pour remédier cette erreur.

Par contre, les limites inductives filtrantes, inventées apparemment avant la théorie des catégories, ont bien le statut d'un passage du fini à l'infini. Ainsi une somme directe infinie est limite inductive filtrante de sommes directes finies.

Ce qu'il y a ici, c'est que nous sommes, avec les catégories, plutôt du coté de l'algèbre que de l'analyse, et de même qu'il n'y a pas grand mérite de passer de $\mathbf{A}[X]$ à $\mathbf{A}[[X]]$, il n'y a pas sans doute non plus pas grand mystère dans ce genre de passage à la limite « catégorique ».

Il est donc peu probable que l'on apprenne grand chose lorsque l'on utilise un théorème comme le théorème 7.1. Cela n'est jamais qu'une manière savante de dire qu'en algèbre, on ne manipule pour l'essentiel que du fini. Mais enfin, cela mérite au moins d'être expérimenté, ne serait-ce qu'avec le théorème de Lazard qui dit que tout module plat est limite inductive filtrante de modules libres de rang fini.

En outre, du point de vue des mathématiques constructives, il est intéressant de voir que l'on doit utiliser une approche un peu plus subtile, avec la notion de limite inductive filtrante catégorique.

Un premier exemple : les modules de type fini

On considère un module de type fini $E = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$, on pose $L = \mathbf{A}^n$ et $\pi : L \to E$ est l'application linéaire surjective définie par $\pi(e_\ell) = x_\ell$, où e_ℓ est le vecteur n°ℓ dans la base canonique de L. On considère alors l'ensemble I formé par les matrices $A \in \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^{n\times r}$ telles que

$$[\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]A = [\, 0 \ \cdots \ 0 \,] \in E^r, \quad \text{i.e. } \operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} \pi.$$

Une matrice $A \in I$ code le module de présentation finie

$$M_A = L/\operatorname{Im} A = \operatorname{Coker} A,$$

avec la surjection canonique $L \xrightarrow{\pi_A} M_A$, et l'on a une unique application linéaire $\varphi_A : M_A \to E$ vérifiant $\pi = \pi_A \circ \varphi_A$.

Nous sommes intéressés par une affirmation du style suivant : le module E est la limite inductive de la famille $(M_A)_{A\in I}$ où l'ensemble I est muni de la relation de préordre

$$A \preccurlyeq B \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B,$$

de sorte que l'on a dans ce cas un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^r \arrow[r, "A"] \arrow[dd, "\mathrm{K}_{A,B}"'] & L \arrow[r, two heads, "\pi_A"] \arrow[dd, equal, "\mathrm{I}_n"'] \arrow[drr, two heads, "\pi"] & M_A \arrow[dr, two heads, "\varphi_A"] \arrow[dd, "M_{A,B}"'] & \\
 & & & E\,, \\
\mathbf{A}^s \arrow[r, "B"'] & L \arrow[r, two heads, "\pi_B"'] \arrow[urr, two heads, "\pi"] & M_B \arrow[ur, two heads, "\varphi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la matrice $\mathrm{K}_{A,B}$ qui fait commuter le diagramme sert de certificat pour l'inclusion $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$, laquelle permet l'existence du morphisme $M_{A,B} : M_A \to M_B$.

La relation de préordre $\preccurlyeq$ est filtrante car $\operatorname{Im} A_1 + \operatorname{Im} A_2 = \operatorname{Im} A$, où A est obtenue en juxtaposant A_1 et A_2, $A = \begin{array}{|c|c|}\hline A_1 & A_2 \\ \hline\end{array}$.

Le couple $(E, (\varphi_A)_{A\in I})$ est limite inductive du diagramme

$$\big((M_A)_{A\in I}, (M_{A,B})_{A\preccurlyeq B}\big)$$

en ce sens que pour tout couple analogue $(F, (\psi_A)_{A\in I})$, il existe un et seul morphisme $\theta : E \to F$ qui fasse commuter le diagramme convenable

$$\begin{tikzcd}
& M_A \arrow[dl, "M_{A,B}"'] \arrow[ddr, "\varphi_A"] \arrow[ddrr, "\psi_A"] & & \\
M_B \arrow[drr, "\varphi_B"] \arrow[drrr, "\psi_B"] \arrow[ddr, "M_{B,C}"'] & & & \\
& & E \arrow[r, dashed, "\theta!"'] & F \\
& M_C \arrow[ur, "\varphi_C"] \arrow[urr, "\psi_C"'] & &
\end{tikzcd}.$$

Maintenant, si l'on regarde ce qui se passe vraiment en pratique dans les calculs, pour ce qui concerne le diagramme $\big((M_A)_{A\in I}, (M_{A,B})_{A\preccurlyeq B}\big)$, on voit que les objets concrets que l'on manipule sont les matrices A, B et $\mathrm{K}_{A,B}$, et non les modules et morphismes M_A, M_B et $M_{A,B}$. Ainsi, même s'il n'y a du point de vue abstrait qu'une seule inclusion $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} B$, il y a plusieurs certificats possibles $\mathrm{K}_{A,B}$ pour cette inclusion, et il n'est donc pas très naturel de n'avoir qu'une seule flèche de « l'indice » A vers « l'indice » B dans l'ensemble préordonné filtrant $(I, \preccurlyeq)$. Il serait plus naturel de considérer des diagrammes avec plus de flèches, mais il semble que l'on n'a pas de formalisme adéquat dans ce cas[1].

Notons aussi que l'on aurait pu considérer le diagramme dont les objets sont les sous-modules de type fini R de $\mathbf{A}^n$, chaque R servant d'indice pour le module de présentation finie $\mathbf{A}^n/R$, mais du point de vue de la conformité aux calculs, il est préférable d'utiliser la famille indexée par les matrices A.

Remarque. Un cas où la construction d'un diagramme de limite inductive est très simple est celui où E est un module cohérent. On peut alors dire que M est la réunion filtrante de l'ensemble de ses sous-modules de type fini, ordonné par la relation d'inclusion. ∎

1. Même les limites inductives filtrantes catégoriques semblent ici inopérantes.

Un cas à peine plus compliqué

C'est le cas où le module E admet pour système générateur un ensemble discret G, par exemple si E est discret on peut prendre $G = E$. Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des listes d'éléments de G deux à deux distincts. Le module E est la réunion des sous-modules engendrés par les éléments de $\mathcal{G}$.

On considère l'ensemble I formé par les couples $i = \big((\underline{x}), A\big)$, où

$$(\underline{x}) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{G},\ A \in \bigcup\nolimits_{r\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^{n\times r} \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$\text{et } [\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]A = [\, 0 \ \cdots \ 0 \,] \in E^r.$$

Deux couples de I sont *égaux dans I* si, et seulement si, on passe de l'un à l'autre par un changement de numérotation dans la liste $(\underline{x})$ (avec le changement corrélatif pour la matrice A). Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{G}$ à utiliser est plutôt celui des parties finies de G, au lieu de l'ensemble des listes finies non redondantes d'éléments de G.

Pour un $i \in I$ on a des applications linéaires canoniques[2]

$$\pi_{(\underline{x})} : \mathbf{A}^n \to E,\ \pi_A : \mathbf{A}^n \to \operatorname{Coker} A \ \text{ et } \ \varphi_i : \operatorname{Coker} A \to E$$

avec $\pi_{(\underline{x})} = \varphi_i \circ \pi_A$.

On munit l'ensemble I de la relation de préordre $\big((\underline{x}), A\big) \preccurlyeq \big((\underline{y}), B\big)$ définie par les deux conditions :

– $(\underline{x})$ est une sous-liste de $(\underline{y})$ à renumérotation près,
– toute colonne de A est « une combinaison linéaire des colonnes de B », en notant que les y_j qui ne figurent pas dans $(\underline{x})$ doivent être affectés de coefficients nuls dans la combinaison linéaire.

Autrement dit, si $(\underline{y}) = (y_1, \dots, y_m)$ et si $\gamma : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ est l'injection correspondant à l'inclusion de $(\underline{x})$ comme sous-liste dans $(\underline{y})$, on demande que

$$\operatorname{Im} A \ \subseteq \ \operatorname{Im} B \cap \gamma(\mathbf{A}^n),$$

de sorte que l'on a dans ce cas un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^r \arrow[r, "A"] \arrow[dd, "\mathrm{K}_{i,j}"'] & \mathbf{A}^n \arrow[r, two heads, "\pi_A"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[drr, "\pi_{(\underline{x})}"] & M_A \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[dd, "M_{i,j}"'] & \\
& & & E\,, \\
\mathbf{A}^s \arrow[r, "B"'] & \mathbf{A}^m \arrow[r, two heads, "\pi_B"'] \arrow[urr, "\pi_{(\underline{y})}"] & M_B \arrow[ur, "\varphi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la matrice $\mathrm{K}_{i,j}$ qui fait commuter le diagramme sert de certificat pour l'inclusion $\operatorname{Im} A \ \subseteq \ \operatorname{Im} B \cap \gamma(\mathbf{A}^n)$, laquelle permet l'existence du morphisme $M_{i,j} : M_A \to M_B$.

---

2. Nos notations ne sont pas entièrement correctes, car le module $\mathbf{A}^n$ devrait plutôt avoir pour base les éléments de la liste $(\underline{x})$.

On laisse à la lectrice le soin de vérifier que la relation de préordre est filtrante[3] et que la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ fait du module E la limite inductive du diagramme

$$\big((M_A)_{i\in I}, (M_{i,j})_{i\preccurlyeq j}\big), \quad \text{où } i = \big((\underline{x}), A\big).$$

En mathématiques classiques, où tous les ensembles sont discrets, cela suffit à établir le théorème 7.1.

En mathématiques constructives, dans la situation générale, il n'y a apparemment pas moyen de réparer la situation en inventant un ensemble I convenable qui puisse indexer des flèches $M \to E$ avec des modules de présentation finie M, et sur lequel on pourrait définir une relation de préordre filtrant adéquate.

Ceci a un petit coté frustrant dans la mesure où tout module est réunion filtrante de ses sous-modules de type fini (un cas particulier de limite inductive filtrante), et où tout module de type fini est limite inductive filtrante de modules de présentation finie comme on l'a vu dans le premier exemple.

Limite inductive filtrante catégorique

Nous introduisons ici la notion de *limite inductive filtrante catégorique* qui est une variante de la notion plus usuelle de limite inductive filtrante le long d'un ensemble préordonné filtrant. Cette variante s'avère plus maniable en mathématiques constructives.

Rappelons tout d'abord comment la notion usuelle est décrite en termes catégoriques.

La notion usuelle de limite inductive filtrante correspond à la donnée de deux familles $\big((M_i), (\alpha_{ij})\big)$, attachées à un ensemble préordonné filtrant.

L'ensemble préordonné filtrant $(I, \preccurlyeq)$ peut être vu comme une petite catégorie.

Une petite catégorie est une structure algébrique $(I, \phi, \jmath, s, b, c)$ avec les axiomes convenables.
– I est l'ensemble des objets,
– ϕ est l'ensemble des flèches,
– $\jmath : I \to \phi$ donne les flèches identité,
– $s : \phi \to I$ et $b : \phi \to I$ définissent les opérations source et but,
– et $c = I_{s,b} \to I$ (avec $I_{s,b} = \big\{\, (f, g) \in I^2 \mid b(g) = s(f)\,\big\}$) définit la composition des flèches.

3. Il faut pour cela utiliser la concaténation de deux listes d'éléments de G, mais en supprimant les redondances.

Dans la petite catégorie associée à l'ensemble préordonné $(I, \preccurlyeq)$ il y a une (et une seule) flèche $i \to j \in \phi$ exactement lorsque $i \preccurlyeq j$ dans I.

Le fait que le préordre est filtrant signifie que tout couple d'indices (i, j) dans I est majoré (au sens de la relation de préordre $\preccurlyeq$) par un indice k.

Un diagramme de modules indexé par $(I, \preccurlyeq)$ est donné par une famille de modules $(M_i)_{i \in I}$ et une famille d'applications linéaires $\alpha_{i,j} : M_i \to M_j$ indexée par les couples $(i, j) \in I^2$ tels que $i \preccurlyeq j$.

Un tel diagramme n'est rien d'autre qu'un foncteur Φ de la petite catégorie $(I, \phi, \jmath, s, b, c)$ vers la catégorie $\mathscr{C}$ qui nous intéresse, ici celle des **A**-modules. Précisément $\Phi(i) = M_i$ et $\Phi(i \to j) = \alpha_{i,j}$.

Pour la notion de limite inductive la plus générale dans la catégorie $\mathscr{C}$ on remplace simplement la petite catégorie $(I, \phi, \jmath, s, b, c)$ associée à un ensemble préordonné filtrant par une petite catégorie arbitraire[4]. Par exemple les sommes directes sont des limites inductives (non filtrantes) pour les diagrammes dont les seules flèches sont les identités.

Les limites inductives filtrantes ont de bonnes propriétés dans de nombreuses catégories, par exemple dans celle des **A**-modules, et c'est pourquoi elles jouent un rôle particulier parmi les limites inductives.

Pour la notion dite de *limite inductive filtrante catégorique*, on remplace l'ensemble préordonné filtrant par une petite catégorie $(I, \phi, \jmath, s, b, c)$ avec les deux conditions « filtrantes » suivantes :

1. pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ et des flèches $f : i \to k$ et $g : j \to k$.

2. pour toute paire de flèches dans ϕ qui ont même source et même but, $i \xrightarrow{f} j$ et $i \xrightarrow{g} j$, il existe une flèche $j \xrightarrow{h} k$ telle que $h \circ f = h \circ g$.

Nous dirons dans ces conditions que nous avons affaire à une *petite catégorie inductive filtrante*.

Il se trouve que la notion de limite inductive filtrante catégorique bénéficie des mêmes bonnes propriétés que celle de limite inductive filtrante usuelle : pour les catégories définies avec des « espèces de structure et homomorphismes » à la Bourbaki, les limites inductives filtrantes existent et commutent au foncteur d'oubli vers la catégorie des ensembles. Nous ne démontrerons pas ici un tel résultat en toute généralité (il faudrait entrer dans le détail des espèces de structures bourbakistes et en donner une variante constructive).

4. Ou par quelque description plus succincte d'une petite catégorie, par exemple en décrivant un diagramme avec certaines relations de commutations.

7.2. Proposition. (Limites inductives filtrantes dans la catégorie des ensembles)

D

□

7.3. Proposition. (Limites inductives filtrantes dans une catégorie purement équationnelle)

D □

Démonstration du théorème 7.1

Le foncteur que nous définissons pour réaliser un **A**-module E comme limite inductive de modules de présentation finie est un foncteur d'une petite catégorie filtrante vers la catégorie des **A**-modules de présentation finie.

La petite catégorie, que nous noterons en indiquant seulement (I, ϕ), va être définie pas à pas. Sa définition est naturellement directement reliée à la structure de E. Nous définissons en même temps le foncteur de cette petite catégorie vers la catégorie des **A**-modules de présentation finie, ainsi que les applications linéaires $\varphi_i : M_i \to E$ $(i \in I)$.
Nous réaliserons ainsi E comme limite inductive filtrante (généralisée) dans la catégorie des **A**-modules.

L'ensemble des objets, I.
Un élément $i = (\underline{x}; \underline{r})$ de I est donné par une liste $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E et par une liste $(\underline{r}) = (r_1, \ldots, r_k)$ de relations $r_i \in \mathbf{A}^n$ entre ces éléments, relations qui engendrent un sous-module $R \subseteq \mathbf{A}^n$. En pratique on identifie $(\underline{r})$ et la matrice de présentation dont les colonnes sont les r_i.
Si E n'est pas discret, ou si **A** n'est pas discret, I n'est pas discret non plus[5].

La famille de modules indexée par I.
Les objets de notre catégorie forment un ensemble qui sert d'ensemble d'indices à une famille de modules $(M_i)_{i \in I}$. Le module M_i correspondant à l'indice $i = (\underline{x}; \underline{r})$ est $\mathbf{A}^n/R = \mathrm{Coker}(\underline{r})$, c'est un module de présentation finie.
En outre on définit l'application linéaire $\pi_{(\underline{x})} : \mathbf{A}^n \to E$ comme celle qui envoie la base canonique de $\mathbf{A}^n$ sur $(\underline{x})$, et enfin l'application linéaire $\varphi_i : M_i \to E$ qui en découle par factorisation.

5. Contrairement à la construction proposée dans le deuxième exemple, nous n'introduisons pas une égalité sur I plus fine, car nous n'avons aucun moyen de comparer les éléments de deux listes dans E

L'ensemble des flèches, ϕ.
Un élément de ϕ, i.e. une flèche

$$i = (x_1, \ldots, x_n; \underline{r}) \xrightarrow{f} j = (y_1, \ldots, y_m; \underline{s}),$$

est donnée par le code $(\mathrm{K}_f, \mathrm{G}_f)$ (cf. section IV-3) d'une application linéaire $\alpha_f : M_i \to M_j$ qui vérifie $\varphi_j \circ \alpha_f = \varphi_i$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^k \arrow[r, "(\underline{r})"] \arrow[d, "\mathrm{K}_f"'] & \mathbf{A}^n \arrow[r, two heads, "\pi_i"] \arrow[d, "\mathrm{G}_f"] & M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\alpha_f"] & E \\
\mathbf{A}^\ell \arrow[r, "(\underline{s})"'] & \mathbf{A}^m \arrow[r, two heads, "\pi_j"'] & M_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Malgré notre volonté de nous écarter le moins possible de l'aspect calculatoire, nous devons convenir d'une égalité plus fine sur les flèches. Même si la flèche f est définie par un code $(\mathrm{K}_f, \mathrm{G}_f)$, nous disons que deux flèches f et g de i vers j sont égales lorsque $\alpha_f = \alpha_g$. Notez cependant que la flèche f contient plus d'information que la simple application linéaire α_f : on a en effet i et j qui sont indispensables[6].

Si l'anneau n'est pas discret l'égalité entre deux flèches n'est pas testable.

La famille des applications linéaires indexée par ϕ.
La flèche $f : i \to j$ sert d'indice pour l'application linéaire $\alpha_f : M_i \to M_j$.

La composition des flèches.
Elle est définie par la composition des codes correspondants. Il lui correspond la composition des applications linéaires définies par ces flèches.

Le foncteur.
La paire de familles $\big((M_i)_{i\in I}, (\alpha_f)_{f\in\phi}\big)$ définit un foncteur de la petite catégorie (I, ϕ) vers la catégorie des $\mathbf{A}$-modules.

Condition filtrante n^o 1.
Étant donnés deux objets $i = (\underline{x}; \underline{r})$ et $j = (\underline{y}; \underline{s}) \in I$ on fabrique un objet $(\underline{z}; \underline{t})$ et deux flèches $\alpha : i \to k$ et $\beta : j \to k$ comme suit : la liste $(\underline{z})$ est la concaténation de $(\underline{x})$ et $(\underline{y})$ d'une part, et dans $(\underline{t})$ « on met ensemble les relations », c'est-à-dire $(\underline{t}) = \begin{array}{|c|c|}\hline \underline{r} & 0 \\ \hline 0 & \underline{s} \\ \hline\end{array}$, ce qui fournit $k = (\underline{z}, \underline{t}) \in I$. Ainsi on a $M_k \simeq M_i \times M_j$, avec la flèche α_k définie par $\alpha_k(u, v) = \alpha_i(u) + \alpha_j(v)$.

Condition filtrante n^o 2.
On considère deux flèches ayant même source et même but

$$f,\, g : i = (\underline{x}; \underline{r}) \longrightarrow j = (\underline{y}; \underline{s}).$$

6. On pourrait dire que $f = (i, j, \alpha_f)$.

On a donc
$$\varphi_i = \varphi_j \circ \alpha_f = \varphi_j \circ \alpha_g,$$
i.e., pour chaque élément x_ℓ de la liste $(\underline{x})$,
$$\varphi_j\big(\alpha_f(x_\ell)\big) = \varphi_j\big(\alpha_g(x_\ell)\big).$$
Ceci fournit une relation entre les éléments de $(\underline{y})$ que l'on rajoute à celles décrites par $(\underline{s})$. On obtient ainsi un indice $k = (\underline{y}; \underline{s}, \underline{t}) \in I$ qui définit un module de présentation finie M_k quotient de M_j.
La surjection canonique $M_j \to M_k$ correspond à une flèche $h : j \to k$ avec $\alpha_h \circ \alpha_f = \alpha_h \circ \alpha_g$ et donc $h \circ f = h \circ g$.

La limite inductive.
Le lecteur se convaincra que les applications linéaires φ_i font de E la limite inductive de ce foncteur, i.e., que toute famille $(\psi_i)_{i \in I}$ d'applications linéaires $\psi_i : M_i \to F$ qui fait commuter ce qu'il faut se factorise de manière unique via une application linéaire $E \to F$.

Remarque. Une présentation plus « abstraite » (mais identique quant au fond) de la construction précédente consiste à remplacer i par le couple correspondant (M_i, φ_i). De ce point de vue, on prendra
$$I = \{\, (M, \varphi) \mid M = \mathrm{Coker}\, A \text{ pour une matrice } A,\ \varphi \in \mathrm{L}(M, E) \,\}\,.$$
Et une flèche de $i = (M, \varphi)$ vers $j = (N, \psi)$ est un triplet $f = (i, j, \theta)$ dans lequel $\theta \in \mathrm{L}(M, N)$ et $\theta \circ \psi = \varphi$. ■

Généralisation

Ce qui a été fait pour la catégorie des **A**-modules est en fait très général, même si la présence des matrices pour coder les choses (présence qui simplifie l'exposé) ne se retrouve pas dans les autres situations.
Le théorème 7.1 se généralise notamment à toute catégorie qui est définie à partir d'une structure algébrique purement équationnelle.

Exemples d'applications

On déduit du théorème 7.1 et du théorème 1.3 le théorème de Lazard.

7.4. Théorème. *Tout module plat est limite inductive filtrante (catégorique) de modules libres de rang fini.*

D

□

On vérifie ensuite que toutes les constructions importantes (produit tensoriel, puissances symétriques et extérieures, algèbre extérieure, extension des scalaires, ...) commutent aux limites inductives filtrantes, et donc transforment des modules plats en modules plats.

Comme conséquence, cela donne une autre démonstration des corollaires 1.12 et 1.15 (corollaires de la proposition 1.10, a priori un peu délicate). Et cela donne une démonstration du corollaire 1.13, qui était laissée à la lectrice.

On vérifie aussi qu'une limite inductive filtrante de suites exactes est une suite exacte.

La proposition 1.10 a alors aussi sa démonstration simplifiée. Cette proposition est une paraphrase pour : « si le module est M plat, alors le foncteur $\bullet \otimes M$ transforme toute application linéaire injective en une application linéaire injective » (théorème 1.11), ce qui est évident lorsque M est libre de rang fini.