DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO T. XXII

VI ZJAZD MATEMATYKÓW POLSKICH

WARSZAWA 20—23 IX 1948

9. A. Kolmogoroff (Moscou). *Algèbres de Boole métriques complètes* (traduction de la conférence prononcée en russe).

Sommaire: 1. Définitions. 2. Rapports à la théorie de la mesure. 3. Importance pour la théorie des probabilités. 4. Classification des algèbres de Boole métriques complètes.

1. Définitions. Je vais regarder comme connue la définition de l'*algèbre de Boole*. Les opérations fondamentales d'*intersection* et de *réunion* d'éléments seront désignées, en conformité avec le livre de M. Birkhoff [1], par

$$x \cap y \qquad \text{(intersection)},$$
$$x \cup y \qquad \text{(réunion)}.$$

Il résulte — comme on sait — de la définition de l'algèbre de Boole qu'il y existe un élément-unité u et un élément nul n pour lesquels on a identiquement (c'est-à-dire pour tout x):

$$x \cap u = x, \qquad x \cup u = u,$$
$$x \cap n = n, \qquad x \cup n = x.$$

On appelle *algèbre de Boole métrique* l'algèbre de Boole avec une fonction réelle d'élément, $\mu(x)$, dite *mesure* de l'élément x, définie dans cette algèbre et assujettie aux postulats:

(I) $x \cap y = n$ entraîne $\mu(x \cup y) = \mu(x) + \mu(y)$,

(II) $x \neq n$ entraîne $\mu(x) \geqslant 0$.

Il est facile de voir, en vertu de (I), que

$$\mu(n) = 0,$$

et, en vertu de (I) et (II), que pour tout élément x

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \mu(u).$$

L'élément *complémentaire* à x sera désigné par x'. La relation d'*inclusion* $x \subseteq y$ sera entendue au sens de $x \cup y = y$.

Il est naturel d'introduire, pour les algèbres de Boole métriques, la définition suivante de l'isomorphie: deux algèbres de Boole métriques sont *isomorphes* lorsqu'il existe une correspondance biunivoque

$$x^* = f(x), \qquad x = f^{-1}(x^*)$$

entre les ensembles de leurs éléments, pour laquelle on a identiquement:

$$f(x \cap y) = f(x) \cap f(y),$$
$$f(x \cup y) = f(x) \cup f(y),$$
$$\mu(f(x)) = \mu(x).$$

Les *différences symétriques*

$$x \bigcirc y = (x \cap y') \cup (x' \cap y)$$

étant introduites, il est naturel de considérer la valeur

$$\varrho(x,y) = \mu(x \bigcirc y)$$

comme *distance* entre les éléments x et y. Cette distance satisfait à tous les axiomes de l'*espace métrique*. Si l'espace métrique ainsi formé est complet, l'algèbre de Boole métrique dont on était parti s'appelle elle-même *complète*.

Par analogie à la notion de complétement d'un espace métrique, on introduit celle de *complétement* de l'algèbre de Boole métrique [1]). On déduit sans peine du théorème fondamental sur le complétement des espaces métriques que *toute algèbre de Boole métrique admet un complétement unique* (à l'isomorphie près). Grâce à cela, l'étude des algèbres de Boole métriques arbitraires se réduit à celle des sous-algèbres partout denses dans les algèbres de Boole métriques complètes, dont l'importance fondamentale devient ainsi manifeste.

La définition générale de l'algèbre de Boole métrique, qui vient d'être envisagée, est une généralisation naturelle des propriétés d'une série d'objets mathématiques classiques, connus depuis longtemps. C'est ainsi par exemple que, les définitions formelles étant convenablement choisies, les *parties* d'un domaine borné quelconque de l'espace, munies des *volumes* qui leur sont attribués à titre des mesures, forment une algèbre de Boole métrique. Un autre exemple important d'algèbres de Boole métriques est fourni par les systèmes d'*événements* dans un problème quelconque de la théorie des probabilités, avec leurs *probabilités* respectives à titre des mesures.

---

[1]) L'algèbre de Boole B_1 est dite *sous-algèbre* de l'algèbre de Boole B lorsque l'ensemble des éléments de B_1 est sous-ensemble de celui de B, l'élément-unité et l'élément zéro de l'une et de l'autre sont les mêmes et que les valeurs des fonctions $x \cup y$, $x \cap y$, $\mu(x)$ de l'algèbre B_1 coïncident, pour ses éléments, avec celles des fonctions correspondantes de l'algèbre B.

L'algèbre de Boole B' est dite le *complétement* de l'algèbre de Boole B lorsqu'elle est complète, contient B comme sous-algèbre et que l'ensemble des éléments de B est dense dans celui de B'.

2. Rapports à la théorie de la mesure. Les notions classiques de volume d'une figure spatiale et de probabilité d'un événement, qui viennent d'être mentionnées à titre d'exemples, ont subi dans la mathématique récente un autre développement logique; on les conçoit le plus souvent comme subordonnées à la notion générale de *mesure d'un ensemble*. En tout, on peut considérer la théorie des algèbres de Boole métriques et la théorie générale de la mesure comme parallèles et concurrentes pour un façonnage logique formel de leur substance concrète, qui est essentiellement la même pour les deux théories.

La correlation logique formelle entre elles peut être caractérisée comme suit. Considérons les mesures $\mu(x)$ qui sont des fonctions réelles, non négatives et complètement additives d'ensemble, définies dans un champ borelien $\mathfrak{F}_\mu$ de sous-ensembles d'un certain ensemble fondamental U_μ qui appartient lui-même au champ $\mathfrak{F}_\mu$. Les ensembles appartenant à ce champ se rangent — comme on sait — de manière naturelle en classes disjointes, dites *types métriques*. Cette classification s'effectue d'après le principe suivant: deux ensembles, X et Y, appartiennent au même type métrique lorsque la mesure de leur différence symétrique est nulle:

$$\mu(X \bigcirc Y) = 0.$$

Tous les ensembles du même type métrique sont de même mesure. Il est donc naturel de regarder leur mesure commune comme *la mesure* du type métrique lui-même. Les définitions de l'*intersection* et de la *réunion* de deux types métriques n'ont pas besoin d'être rappelées, tant elles s'offrent naturellement. On montre très facilement que

(a) *Les types métriques de mesure quelconque forment une algèbre de Boole métrique complète.*

D'autre part, la théorie des idéaux d'algèbres de Boole, développée par M. Stone [3], permet de montrer que

(b) *Toute algèbre de Boole métrique complète est isomorphe à l'algèbre des types métriques d'une certaine mesure.*

Or, deux mesures s'appellent *isomorphes par structure* lorsque les algèbres de leurs types métriques sont isomorphes (en tant qu'algèbres de Boole métriques). En vertu de (a) et (b), on peut donc dire que *la théorie des algèbres de Boole métriques complètes équivaut à celle des mesures, considérées à l'isomorphie par structure près.*

3. Importance pour la théorie des probabilités. Je vais envisager plus en détail l'importance des algèbres de Boole métriques pour la théorie des probabilités. On sait que cette théorie n'est devenue une science mathématique rigoureuse (en même sens que la géométrie dans les célèbres *Fondements de la géométrie* de Hilbert, par exemple) qu'à l'époque relativement récente. Le système le plus développé de la construction axiomatique de la théorie des probabilités est celui basé sur la conception de la probabilité comme d'une fonction additive d'ensemble (comme c'est fait dans mon livre [2], par exemple). Je me permets d'insister ici sur le fait que c'est *seulement ce système* qui soit suffisamment développé, en ce sens que toutes les recherches probabilistes concrètes présentant de l'intérêt pour les sciences techniques ou naturelles, et qui se servent de plus en plus de la distribution des probabilités dans des espaces fonctionnels, se rangent dans lui sans obstacle. Les autres systèmes de fonder la théorie des probabilités, bien qu'ils ne soient pas, en principe, moins irréprochables au point de vue logique, ne sont élaborés en détail que dans leur partie concernant les problèmes combinatoires élémentaires avec un nombre fini d'événements à envisager.

Convenons d'appeler *ensembliste* le système d'exposer la théorie des probabilités qui est basé, conformément à [2], sur l'*ensemble U des événements élémentaires* et sur une *fonction additive d'ensemble* (la probabilité), $P(x)$, définie dans une famille de sous-ensembles de U. Le succès de ce système est dû en grande partie à ce qu'il a permis de mettre au profit de la théorie des probabilités l'appareil bien élaboré et fort souple de la *théorie de la mesure* et de la théorie métrique des fonctions. Mais, du point de vue des tâches concrètes de la théorie des probabilités, le système en question mérite aussi une certaine critique. Cette critique n'a pas de portée des objections formelles contre la consistance logique du système, mais elle indique, et à raison, ce qu'il y est d'arbitraire et d'artificiel. Plus précisément, les défauts du système ensembliste de présenter la théorie des probabilités sont les suivants:

1° La notion d'événement élémentaire est une surconstruction artificielle au-dessus de la notion d'événement, qui a un sens concret. En réalité, ce ne sont pas les événements qui se composent d'événements élémentaires, mais les événements élémentaires tirent leur origine du démembrement des événements composés.

2° Les problèmes quelque peu compliqués exigent, si la théorie doit être simple et maniable, que la probabilité soit soumise à l'*axiome d'additivité dénombrable*. La justification de cet axiome reste néanmoins purement empirique, à savoir qu'on n'ait rencontré jusqu'à présent aucun problème intéressant pour lequel on n'eût pas réussi de construire un champ correspondant des probabilités, conforme à l'axiome en question (cf. [2], p. 23).

3° On est contraint à renoncer au principe, formulé souvent dans de nombreux travaux classiques de la théorie des probabilités, d'après lequel l'événement dont la probabilité est nulle est absolument impossible. Plus précisément, on doit admettre qu'un événement de probabilité positive peut se décomposer en une infinité (continue par exemple) des variantes dont chacune est de probabilité égale à zéro.

Tous ces inconvénients se laissent éviter si l'on met à la base de la théorie des probabilités les axiomes suivants:

(A) Le système d'événements, avec la fonction d'événement — la probabilité — définie pour eux, est une algèbre métrique de Boole.

(B) La probabilité d'un événement nécessaire est égale à un.

Une telle conception de la théorie des probabilités n'est point nouvelle. Plutôt est-il difficile d'en indiquer la date exacte d'apparition, car elle est, tout simplement, la façon moderne de formuler l'exposé „naïf" de la théorie des probabilités, le plus usuel dans les manuels élémentaires. Cette conception se trouve formulée dans le livre de Glivenko [4], par exemple. Comment on supprime alors les défauts 1° et 2°, on n'a pas besoin de l'expliquer longuement: les événements élémentaires (du moins dans l'exposé des *fondements* de la théorie des probabilités) deviennent simplement superflus, et l'événement ayant la *probabilité zéro* n'est qu'un seul, à savoir l'événement impossible n.

Plus intéressante et plus compliquée est la question de ce qui correspond, dans la nouvelle conception, à l'axiome d'additivité dénombrable de la probabilité. Les sommes d'une infinité d'éléments et les limites de suites d'éléments n'étant guère définies dans les algèbres de Boole, il semble d'abord que la question de l'additivité dénombrable de la mesure y perd simplement son sens.

On peut cependant, dans les algèbres de Boole *métriques*, définir la convergence d'éléments

$$x_k \to x$$

par la condition

$$\mu(x_k \bigcirc x) \to 0$$

et introduire les sommes dénombrables

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} x_k$$

en les *définissant* comme limites de sommes finies correspondantes. Il est alors facile de montrer que l'*additivité dénombrable de la mesure se présente automatiquement*, c'est-à-dire que les conditions

$$x = \bigcup_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{et} \quad x_i \cap x_j = n \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

entraînent toujours l'égalité

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(x_k).$$

L'utilisation de l'additivité dénombrable, vraiment vaste et libre d'inconvénients, n'est toutefois possible que dans les algèbres de Boole métriques *complètes*. C'est pourquoi il est naturel, dans la théorie des probabilités, de supposer toujours l'algèbre des événements *complétée* par l'adjonction d'éléments idéaux. Cette proposition est — comme il a été dit — toujours réalisable.

Ainsi, l'emploi de l'additivité dénombrable de la probabilité dans la théorie des probabilités se montre, en définitive, légitime et n'impose aucune restriction supplémentaire quant au caractère des problèmes qui tombent sous l'action de la théorie générale.

Il me semble que ce système des fondements de la théorie des probabilités est, du côté des principes, le plus satisfaisant parmi ceux qui sont actuellement connus. Il résulte des théorèmes cités (voir 2), que l'applicabilité de ce système est aussi universelle que celle du système ensembliste.

Du côté technique, le système ensembliste présente cependant une série d'avantages. Or, ces avantages peuvent être sauvegardés aussi dans le système algébrique des *fondements* de la théorie des probabilités; en effet, en vertu du théorème (b) (voir 2), l'algèbre complète des événements peut toujours être transformée par isomorphie en algèbre des types métriques d'une mesure convenablement construite.

4. Classification des algèbres de Boole métriques complètes. Nous allons voir tout à l'heure que le passage de la théorie de la mesure à celle des algèbres de Boole métriques complètes a une conséquence fort appréciable: les algèbres de Boole métriques complètes peuvent être (à l'isomorphie près) parfaitement revues et classées. Pour exposer cette classification, quelques notions spéciales sont nécessaires.

Désignons par $S(x)$ l'ensemble de tous les éléments $y \subseteq x$, c'est-à-dire qui sont inclus dans x. Appelons *poids* de x celui de l'ensemble $S(x)$ en tant qu'espace métrique (avec la distance $\varrho(y,z)=\mu(y \bigcirc z)$), c'est-à-dire la plus petite puissance d'ensemble dense dans $S(x)$. L'élément x est dit *homogène* lorsque le poids de tout élément y de $S(x)$, distinct de l'élément nul n, est égal à celui de l'élément x.

On démontre que le poids $\tau(x)$ de x dans une algèbre de Boole métrique complète est toujours égal à

(i) *un* (et on a dans ce cas $x=n$),

(ii) *deux* (et dans ce cas x ne contient que x et n; on l'appelle alors un *atome*),

(iii) une *puissance infinie* (et dans ce cas les puissances infinies quelconques peuvent se présenter).

Le théorème suivant, qui se déduit d'un résultat remarquable de M[lle] Maharam [5] (et sur lequel M. Marczewski a bien voulu attirer mon attention), permet d'établir la classification en question de toutes les algèbres de Boole métriques complètes (à l'isomorphie près):

L'élément-unité u de toute algèbre de Boole métrique complète peut etre représenté dans la forme

$$u = (\bigcup_r a_r) \cup (\bigcup_s c_s), \quad r = 1, 2, \ldots; \; s = 1, 2, \ldots,$$

où a_r sont des atomes et c_s — des éléments homogènes de poids infini, tous ces éléments satisfaisant, en outre, aux conditions:

(1) $$\mu(a_1) \geqslant \mu(a_2) \geqslant \ldots,$$

(2) $$\tau(c_1) < \tau(c_2) < \ldots$$

Les sommes dans le membre droit de la décomposition peuvent être finies ou dénombrables. La décomposition satisfaisant à (1) *et* (2) *est unique* (à la permutation des atomes de mesure égale près). *Pour que deux algèbres de Boole métriques complètes soient isomorphes, il faut et il suffit que les suites* (de nombres réels et transfinis)

$$(\mathcal{J}) \qquad \begin{cases} \mu(a_1), \; \mu(a_2), \ldots, \\ \tau(c_1), \; \tau(c_2), \ldots, \\ \mu(c_1), \; \mu(c_2), \ldots \end{cases}$$

coïncident pour l'une et pour l'autre de ces algèbres.

On construit aisément des algèbres de Boole métriques complètes qui correspondent à un système quelconque d'invariants $(\mathcal{J})$ assujetti aux conditions (1), (2) et aux deux suivantes:

(3) $$\mu(a_r) > 0, \qquad \mu(c_s) > 0, \qquad \sum_r \mu(a_r) + \sum_s \mu(c_s) < \infty,$$

(4) $$\tau(c_1) \geqslant \aleph_0;$$

cf. à ce sujet Maharam [5]. Plus logique encore que l'emploi des mesures dans Ω_τ (en conformité avec [5]), me paraît leur emploi dans les produits de τ couples de points.

LITTÉRATURE

[1] Garret Birkhoff, *Lattice Theory*, 1940.
[2] A. N. Kolmogoroff, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Moscou 1936 (en russe).
[3] M. H. Stone, *The theory of representations for Boolean Algebras*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 40 (1935), p. 37—111.
[4] V. I. Glivenko, *Cours de la théorie des probabilités*, Moscou 1939 (en russe).
[5] Dorothy Maharam, *On homogeneous measure algebras*, Proceedings of the National Acad. of Sc. 28 (1942), p. 108—111.

10. Vladimír Kořínek (Praha). *Le théorème de Jordan-Hölder et son rôle dans la théorie des groupes et dans la théorie des structures.*

Depuis sa première formulation par Camille Jordan et Otto Hölder [1, 2], le théorème de Jordan-Hölder, concernant les chaînes de décomposition, donnait naissance à un très intéressant développement qui est loin d'être terminé. La présente communication veut donner un bref aperçu de l'état actuel du problème et quelques résultats acquis dans les dernières années.

Plusieurs mathématiciens ont généralisé ce théorème de la théorie des groupes dans de différentes voies. Mais seulement le développement de la théorie des structures (lattices) permettait d'examiner les conditions de sa validité. En effet, ce ne sont que les notions d'intersection et de sousgroupe-union de deux sousgroupes, de groupe-facteur et d'isomorphisme qui entrent dans la démonstration et dans l'énoncé de ce théorème. Or, l'intersection et l'union sont évidemment notions de la théorie des structures. La notion de groupe-facteur doit être remplacée par celle de quotient. Si l'on a dans une structure $a \geqslant b$, le quotient a/b est la sousstructure (sublattice) formée par tous les éléments x tels que $a \geqslant x \geqslant b$. Enfin, il faut remplacer l'isomorphisme de deux groupes-facteurs par la simple similitude d'en bas ou d'en haut. Deux quotients a/b et c/d sont dits simplement semblables d'en bas, s'il existe un quotient u/v tel qu'on a $a=b \vee u$, $v=b \wedge u$, $c=d \vee u$, $v=d \wedge u$. Ici $\vee$ désigne l'union et $\wedge$ l'intersection. La simple similitude d'en haut s'obtient de cette définition par la dualité.