CHAPITRE IV : LA LOGIQUE DE L'INFINI

§ 1er. - CE QUE DOIT ETRE UNE CLASSIFICATION

Les règles ordinaires de la logique peuvent-elles être appliquées sans changement, dès que l'on considère des collections comprenant un nombre infini d'objets ? C'est là une question qu'on ne s'était pas posée d'abord, mais qu'on a été amené à examiner quand les mathématiciens qui se sont fait une spécialité de l'étude de l'infini se sont tout à coup heurtés à de certaines contradictions au moins apparentes. Ces contradictions proviennent-elles de ce que les règles de la logique ont été mal appliquées, ou de ce qu'elles cessent d'être valables en dehors de leur domaine propre, qui est celui des collections formées seulement d'un nombre fini d'objets ? je crois qu'il ne sera pas inutile de dire ici quelques mots à ce sujet, et de donner aux lecteurs une idée des débats auxquels ce problème a donné lieu.

La logique formelle n'est autre chose que l'étude des propriétés communes à toute classification ; elle nous apprend que deux soldats qui font partie du même régiment appartiennent par cela même à la même brigade, et par conséquent à la même division, et c'est à cela que se réduit toute la théorie du syllogisme. Quelle est alors la condition pour que les règles de cette logique soient valables ? C'est que la classification adoptée soit immuable. Nous apprenons que deux soldats font partie du même régiment, et nous voulons en conclure qu'ils font partie de la même brigade ; nous en avons le droit pourvu que pendant le temps que nous mettons à faire notre raisonnement, l'un des deux hommes n'ait pas été transféré d'un régiment dans un autre.

Les antinomies qui ont été signalées proviennent toutes de l'oubli de cette condition si simple : on s'est appuyé sur une classification qui n'était pas immuable et qui ne pouvait pas l'être ; on a bien pris la précaution de la proclamer immuable ; mais cette précaution était insuffisante ; il fallait la rendre effectivement immuable et il y a des cas où cela n'est pas possible.

Qu'on me permette de reprendre un exemple cité par M. Russell. C'était contre moi d'ailleurs qu'il l'invoquait. Il voulait prouver que les difficultés ne provenaient pas de l'introduction de l'infini actuel, puisqu'elles peuvent se présenter même quand on ne considère que des nombres finis. Je reviendrai plus loin sur ce point, mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit pour le moment et je choisis cet exemple parce qu'il est amusant et qu'il met bien en évidence le fait que je viens de signaler.

Quel est le plus petit nombre entier qui ne peut pas être défini par une phrase de moins de cent mots français ? Et d'abord ce nombre existe-t-il ?

Oui, car avec cent mots français, on ne peut construire qu'un nombre fini de phrases, puisque le nombre des mots du dictionnaire français est limité. Parmi ces phrases, il y en aura qui n'auront aucun sens ou qui ne définiront aucun nombre entier. Mais chacune d'elles pourra définir au plus un seul nombre entier. Le nombre des entiers susceptibles d'être définis de la sorte est donc limité ; par conséquent, il y a certainement des entiers qui ne peuvent l'être ; et parmi ces entiers, il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres.

Non ; car si cet entier existait, son existence impliquerait contradiction, puisqu'il se trouverait défini par une phrase de moins de cent mots français, à savoir par la phrase même qui affirme qu'il ne peut pas l'être.

Ce raisonnement repose sur une classification des nombres entiers en deux catégories, ceux qui peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français et ceux qui ne peuvent pas l'être. En posant la question, nous proclamons implicitement que cette classification est immuable et que nous ne commençons à raisonner qu'après l'avoir établie définitivement. Mais cela n'est pas possible. La classification ne pourra être définitive que lorsque nous aurons passé en revue toutes les phrases de moins de cent mots, que nous aurons, rejeté celles qui n'ont pas de sens, et que nous aurons fixé définitivement le sens de celles qui en ont un. Mais parmi ces phrases, il y en a qui ne peuvent avoir de sens qu'après que la classification est arrêtée, ce sont celle où il est question de cette classification elle-même. En résumé la classification des nombres ne peut être arrêtée qu'après que le triage des phrases est achevé, et ce triage ne peut être achevé qu'après que la classification est arrêtée, de sorte que ni la classification, ni le triage ne pourront jamais être terminés.

Ces difficultés se rencontreront beaucoup plus souvent encore quand il s'agira de collections infinies. Supposons que l'on veuille classer les éléments de l'une de ces collections et que le principe de la classification repose sur quelque relation de l'élément à classer avec la collection tout entière, Une semblable classification pourra-t-elle jamais être conçue comme arrêtée ? Il n'y a pas d'infini actuel, et quand nous parlons d'une collection infinie, nous voulons dire une collection à laquelle on peut sans cesse ajouter de nouveaux éléments (semblable à une liste de souscription qui ne serait jamais close dans l'attente de nouveaux souscripteurs). Or la classification ne pourrait justement être arrêtée que quand cette liste serait close ; toutes les fois qu'on ajoute à la collection de nouveaux éléments, on modifie cette collection ; on peut donc modifier la relation de cette collection avec les éléments déjà classés ; et comme c'est d'après cette relation que ces éléments ont été rangés dans tel ou tel tiroir, il peut arriver qu'une fois cette relation modifiée, ces éléments ne soient plus dans le bon tiroir et qu'on soit obligé de les déplacer. Tant qu'on a de nouveaux éléments à introduire, on doit craindre d'avoir à recommencer tout son travail ; or il n'arrivera jamais qu'on n'ait plus de nouveaux éléments à introduire ; la classification ne sera donc jamais arrêtée.

De là une distinction entre deux espèces de classifications, applicables aux éléments des collections infinies ; les classifications prédicatives, qui ne peuvent être bouleversées par l'introduction de nouveaux éléments ; les classifications non prédicatives que l'introduction des éléments nouveaux oblige à remanier sans cesse.

Supposons par exemple que l'on classe les nombres entiers en deux familles suivant leur grandeur. On peut reconnaître si un nombre est plus grand ou plus petit que 10 sans avoir à envisager les relations de ce nombre avec l'ensemble des autres nombres entiers. Quand on aura défini, je suppose, les 100 premiers nombres, on saura quels sont ceux d'entre eux qui sont plus petits et ceux qui sont plus grands que 10 ; quand on introduira ensuite le nombre 101, ou un quelconque des nombres suivants, ceux des 100 premiers entiers qui étaient plus petits que 10 resteront plus petits que 10, ceux qui étaient plus grands resteront plus grands ; la classification est prédicative.

Imaginons au contraire qu'on veuille classer les points de l'espace et que l'on distingue ceux qui peuvent être définis en un nombre fini de mots et ceux qui ne le peuvent pas. Parmi les phrases possibles, il y en aura qui feront allusion à la collection tout entière, c'est-à-dire à l'espace, ou à des parties de l'espace. Quand nous introduirons de nouveaux points dans l'espace, ces phrases changeront de sens, elles ne définiront plus le même point ; ou bien elles perdront toute espèce de sens ; ou encore elles acquerront un sens alors qu'elles n'en avaient pas auparavant. Et alors des points qui n'étaient pas définissables deviendront susceptibles d'être définis ; d'autres qui l'étaient cesseront de l'être. Ils devront passer d'une catégorie dans une autre. La classification ne sera pas prédicative.

Il y a de bons esprits qui considèrent que les seuls objets dont il est permis de raisonner sont ceux qui peuvent être définis en un nombre fini de mots, et j'aurais d'autant plus mauvaise grâce à ne pas les regarder comme de bons esprits, que je vais bientôt moi-même défendre leur opinion. On peut donc trouver que l'exemple précédent est mal choisi, mais il est aisé de le modifier.

Pour classer les nombres entiers, ou les points de l'espace, je considérerai la phrase qui définit chaque nombre entier, ou chaque point. Comme il peut arriver qu'un même nombre ou un même point puisse être défini par plusieurs phrases, je rangerai ces phrases dans l'ordre alphabétique et je choisirai la première d'entre elles. Cela posé, cette phrase finira par une voyelle ou par une consonne, et on pourrait faire la classification d'après ce critère. Mais cette classification ne serait pas prédicative ; par l'introduction de nouveaux entiers, ou de nouveaux points, des phrases qui n'avaient aucun sens pourront en acquérir un. Et alors au tableau des phrases qui définissent un entier ou un point déjà introduit, il deviendra nécessaire d'ajouter de nouvelles phrases, qui étaient jusqu'ici dénuées de sens, qui viennent d'en acquérir un, et qui définissent précisément ce même point. Il pourra se faire que ces phrases nouvelles prennent la tête dans l'ordre alphabétique, et qu'elles finissent par une voyelle, tandis que les phrases anciennes finissaient par une consonne. Et alors notre entier ou notre point qui avait été provisoirement rangé dans une catégorie devra être transféré dans l'autre.

Si au contraire nous classons les points de l'espace d'après la grandeur de leurs coordonnées, si nous convenons de classer ensemble tous ceux dont l'abscisse est plus petite que 10, l'introduction de nouveaux points ne changera rien à la classification ; les points déjà introduits qui répondaient à la condition ne cesseront pas d'y répondre après cette introduction. La classification sera prédicative.

Ce que nous venons de dire des classifications s'applique immédiatement aux définitions. Toute définition est en effet une classification. Elle sépare les objets qui satisfont à la définition, et ceux qui n'y satisfont pas et elle les range dans deux classes distinctes. Si elle procède, comme dit l'Ecole, *per proximum genus et differentiam specificam*, elle repose évidemment sur la subdivision du genre en espèces. Une définition comme toute classification peut donc être ou ne pas être prédicative.

Mais ici une difficulté se présente. Reprenons l'exemple précédent. Les nombres entiers appartiennent à la classe A ou à la classe B, suivant qu'ils sont plus petits ou plus grands que 10. J'ai défini certains nombres entiers α, β, γ… je les ai répartis entre ces deux classes A et B. Je définis et j'introduis de nouveaux nombres entiers. J'ai dit que la répartition n'était pas modifiée et que par conséquent la classification était prédicative. Mais pour que la place du nombre α dans la classification ne soit pas modifiée, il ne suffit pas que les cadres de la classification n'aient pas changé, il faut encore que le nombre α soit resté le même, c'est-à-dire que sa définition soit prédicative. De sorte qu'à un certain point de vue, on ne devrait pas dire qu'une classification est prédicative, d'une façon absolue, mais qu'elle est prédicative par rapport à un mode de définition.

§ 2.-LE NOMBRE CARDINAL

On ne doit pas oublier les considérations précédentes quand on définit le nombre cardinal. Si nous considérons deux collections, on peut chercher à établir une loi de correspondance entre les objets de ces deux collections, de façon qu'à tout objet de la 1re corresponde un objet de la 2e et un seul, et inversement. Si cela est possible, on dit que les deux collections ont le même nombre cardinal.

Mais, ici encore, il convient que cette loi de correspondance soit prédicative. Si l'on a affaire à deux collections infinies, on ne pourra jamais concevoir ces deux collections comme épuisées. Si nous supposons que nous ayons pris dans la première un certain nombre d'objets, la loi de correspondance nous permettra de définir les objets correspondants de la 2e. Si nous introduisons ensuite de nouveaux objets, il pourra arriver que cette introduction change le sens de la loi de correspondance, de telle façon que l'objet A' de la 2e collection, qui avant cette introduction correspondait à un objet A de la 1re, n'y correspondra plus après cette introduction. Dans ce cas la loi de correspondance ne sera pas prédicative.

Et c'est ce que nous allons expliquer par deux exemples opposés. Je considère l'ensemble des nombres entiers et l'ensemble des nombres pairs. A chaque entier n je puis faire correspondre le nombre pair 2n. Quand j'introduirai de nouveaux entiers, ce sera toujours le même nombre 2n qui correspondra à n. La loi de correspondance est prédicative, et il en est de même de toutes celles qu'envisage Cantor pour démontrer par exemple que le nombre cardinal des nombres rationnels est égal à celui des nombres entiers, ou celui des points de l'espace à celui des points d'une droite.

Supposons au contraire que l'on compare l'ensemble des nombres entiers à celui des points de l'espace susceptibles d'être définis par un nombre fini de mots et que j'établisse entre eux la correspondance suivante. Je ferai le tableau de toutes les phrases possibles, je les ordonnerai d'après le nombre de leurs mots, en rangeant dans l'ordre alphabétique celles qui ont le même nombre de mots. J'effacerai toutes celles qui n'ont aucun sens ou qui ne définissent aucun point, ou qui définissent un point déjà défini par l'une des phrases précédentes. Je ferai correspondre à chaque point la phrase qui le définit, et le numéro qu'occupe cette phrase dans le tableau ainsi émondé.

Lorsque j'introduirai de nouveaux points, il pourra arriver que des phrases qui étaient dépourvues de sens en acquièrent un ; on devra les rétablir dans le tableau d'où on les avait d'abord effacées ; et le numéro de toutes les autres phrases se trouvera modifié. Nos correspondances seront entièrement bouleversées ; notre loi de correspondance n'est pas prédicative.

Si l'on ne faisait pas attention à cette condition dans la comparaison des nombres cardinaux, on serait conduit à de singuliers paradoxes. Il convient donc de modifier la définition des nombres cardinaux en spécifiant que la loi de correspondance sur laquelle cette définition se fonde doit être prédicative.

Toute loi de correspondance repose sur une double classification. On doit classer les objets des deux collections que l'on veut comparer ; et les deux classifications doivent être parallèles ; si par exemple les objets de la 1re se répartissent en classes, qui se subdivisent en ordres, ceux-ci en familles, etc., il devra en être de même des objets de la 2e . A chaque classe de la 1re classification devra correspondre une classe de la 2e et une seule, à chaque ordre un ordre et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive aux individus eux-mêmes.

Et l'on voit alors quelle doit être la condition pour qu'une loi de correspondance soit prédicative. Il faut que les deux classifications sur lesquelles cette loi repose soient elles-mêmes prédicatives.

§ 3.- LE MEMOIRE DE M. RUSSELL

M. Russell a publié dans l'*American Journal of Mathematics*, vol. XXX, sous le titre *Mathematical logics as based on the Theory of Types*, un mémoire où il s'appuie sur des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent. Après avoir rappelé quelques-uns des paradoxes les plus célèbres chez les logiciens, il en cherche l'origine et il la trouve avec raison dans une sorte de cercle vicieux. On a été conduit à des antinomies parce qu'on a envisagé des collections, contenant des objets dans la définition desquels entre la notion de la collection elle-même. On s'est servi de définitions non prédicatives ; on a confondu, dit M. Russell les mots *all* et *any*, ce que nous pouvons rendre en français par les mots tous et quelconque.

Il est ainsi conduit à imaginer ce qu'il appelle la hiérarchie des types. Soit une proposition vraie d'un individu quelconque d'une classe donnée. Par un individu quelconque, nous devons entendre d'abord tous les individus de cette classe que l'on peut définir sans se servir de la notion de la proposition elle-même. Je les appellerai des individus quelconques du 1er ordre ; quand j'affirmerai que la proposition est vraie de tous ces individus, j'affirmerai une proposition du 1er ordre. Un individu quelconque du 2^{e} ordre, ce sera alors un individu dans la définition duquel pourra intervenir la notion de cette proposition du 1er ordre. Si j'affirme la proposition de tous les individus du 2^{e} ordre, j'aurai une proposition du 2^{e} ordre. Les individus du 3^{e} ordre seront ceux dans la définition desquels peut intervenir la notion de cette proposition du 2^{e} ordre ; et ainsi de suite.

Prenons l'exemple de l'Épiménide. Un menteur du 1er ordre sera celui qui ment toujours sauf quand il dit je suis un menteur du 1er ordre ; un menteur du 2^{e} ordre sera celui qui ment toujours même quand il dit je suis un menteur du 1er ordre, mais qui ne ment plus quand il dit je suis un menteur du 2^{e} ordre. Et ainsi de suite. Et alors quand Épiménide nous dira : je suis un menteur, nous pourrons lui demander : de quel ordre ? Et c'est seulement après qu'il aura répondu à cette légitime question que son assertion aura un sens.

Passons à un exemple plus scientifique et envisageons la définition du nombre entier. On dit qu'une propriété est récurrente si elle appartient à zéro, et si elle ne peut appartenir à n sans appartenir à n + 1 ; on dit que tous les nombres qui possèdent une propriété récurrente forment une classe récurrente. Alors un entier est par définition un nombre qui possède toutes les propriétés récurrentes, c'est-à-dire qui appartient à toutes les classes récurrentes.

De cette définition, peut-on conclure que la somme de deux entiers est un entier ? Il semble que oui ; car si n est un nombre entier, donné, les nombres x qui sont tels que n + x est entier forment une classe récurrente. Le nombre x ne serait donc pas entier, si n + x ne l'était pas. Mais la définition de cette classe récurrente dont nous venons de parler n'est pas prédicative, car dans cette définition (qui nous apprend que n + x doit être entier) entre la notion de nombre entier qui présuppose la notion de toutes les classes récurrentes.

D'où la nécessité d'employer le détour suivant : appelons classes récurrentes du 1er ordre toutes celles que l'on peut définir sans introduire la notion d'entier, et entiers du 1er ordre les nombres qui appartiennent à toutes les classes récurrentes du 1er ordre ; ensuite classes récurrentes du 2^{e} ordre celles que l'on peut définir en introduisant au besoin la notion d'entier du l^{er} ordre, mais sans faire intervenir la notion d'entier d'ordre supérieur ; appelons entiers du 2^{e} ordre les nombres qui appartiennent à toutes les classes récurrentes du 2^{e} ordre, et ainsi de suite. Et alors ce que nous pouvons démontrer ce n'est pas que la somme de deux entiers est un entier, c'est que la somme de deux entiers d'ordre K, est un entier d'ordre K-1.

Ces exemples suffiront, je pense, pour faire comprendre ce que M. Russell appelle la hiérarchie des types. Mais alors se posent diverses questions sur lesquelles l'auteur ne s'est pas prononcé.

1° Dans cette hiérarchie s'introduisent sans difficulté des propositions du 1er, du 2^{e} ordre, etc., et en général du n^{e} ordre, n étant un nombre entier fini quelconque. Est-il possible de considérer de même des propositions d'ordre α, α étant un nombre ordinal transfini ? C'est ainsi que M. König a imaginé une théorie qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. Russell ; il s'y sert d'une notation spéciale, il y désigne par A(NV) les objets du 1er ordre, par $A(NV)^2$ ceux du 2^{e} ordre, etc., NV étant les initiales de l'expression *ne varietur*. Quant à lui, il n'hésite pas à introduire des $A(NV)^{\alpha}$ où α est transfini, sans d'ailleurs expliquer suffisamment ce qu'il entend par là.

2° Si l'on répond oui à la première question, il faudra expliquer ce qu'on entend par des objets d'ordre ω, ω étant l'infini ordinaire, c'est-à-dire le premier nombre ordinal transfini, ou par des objets d'ordre α ; α étant un ordinal transfini quelconque.

3° Si au contraire on répond non à la 1re question, comment pourra-t-on fonder sur la théorie des types la distinction entre les nombres finis ou infinis, puisque cette théorie est dénuée de sens si on ne suppose cette distinction déjà faite.

4° Plus généralement, qu'on réponde oui ou non à la 1re question, la théorie des types est incompréhensible, si on ne suppose la théorie des ordinaux déjà constituée. Comment pourra-t-on fonder alors la théorie des ordinaux sur celle des types ?

§ 4. - L'AXIOME DE REDUCTIBILITE

M. Russell introduit un axiome nouveau qu'il appelle *axiom of reductibility.* Comme je ne suis pas sûr d'avoir parfaitement compris sa pensée, je vais lui laisser la parole. «We assume, that every function is equivalent, for all its value to some predicative fonction of the same argument.» Mais, pour comprendre cette assertion, il faut remonter aux définitions données au début du mémoire. Qu'est-ce qu'une fonction, et qu'est-ce qu'une fonction prédicative ? Si une proposition est affirmée d'un objet donné a, c'est une proposition particulière ; si on l'affirme d'un objet indéterminé x, c'est une fonction propositionnelle de x. La proposition sera d'un certain ordre dans la hiérarchie des types, et cet ordre ne sera pas le même quel que soit x, puisqu'il dépendra de l'ordre de x. La fonction sera alors dite prédicative, si elle est d'ordre K+ 1, quand x est d'ordre K.

Après ces définitions le sens de l'axiome n'est pas encore très clair et quelques exemples ne seraient pas superflus. M. Russell n'en a pas donné, et j'hésite à en donner de mon cru, parce que je crains de trahir sa pensée, que je ne suis pas certain d'avoir entièrement saisie. Mais, sans l'avoir saisie, il y a une chose dont je ne saurais douter, c'est qu'il s'agit d'un nouvel axiome. Grâce à cet axiome, on espère pouvoir démontrer le principe d'induction mathématique ; que cela soit possible, je voudrais d'autant moins le nier que je soupçonne cet axiome d'être une autre forme du même principe.

Et alors je ne puis m'empêcher de penser à tous les gens qui prétendent démontrer le postulatum d'Euclide en s'appuyant sur une de ses conséquences et en regardant cette conséquence comme une vérité évidente par elle-même. Qu'ont-ils gagné ? Cette vérité, quelque évidente qu'elle soit, le sera-t-elle plus que le postulatum lui-même ?

Nous ne gagnons donc rien sur le nombre des postulats ; gagnons-nous au moins sur la qualité ?

En quoi le nouvel axiome l'emporte-t-il sur le principe d'induction ?

1° Est-il susceptible d'un énoncé plus simple et plus clair ? C'est possible, car celui que M. Russell nous donne peut sans doute être amélioré ; mais ce n'est pas probable.

2° L'axiome de réductibilité est-il plus général que le principe d'induction ? De sorte que l'on ne puisse démontrer cet axiome en partant de ce principe ?

3° Ou bien au contraire l'axiome est-il moins général en apparence que le principe, de sorte qu'on n'aperçoive pas immédiatement que le second est contenu dans le premier, bien qu'il le soit ?

4° L'emploi de cet axiome est-il plus conforme aux tendances naturelles de notre esprit ; peut-on le justifier psychologiquement ?

Je me borne à poser ces questions ; les éléments me manquent pour les résoudre puisque je n'ai pu arriver même à comprendre complètement le sens de cet axiome.

Mais si je ne puis, avec les indications trop sommaires données par M. Russell, espérer de pénétrer entièrement ce sens, il m'est permis au moins de faire quelques conjectures, Voilà une proposition comme par exemple la définition du nombre entier ; Un entier fini est un nombre qui appartient à toutes les classes récurrentes ; cette proposition n'a pas de sens, par elle-même ; elle n'en aurait un que si on précisait l'ordre des classes récurrentes dont il s'agit. Mais il arrive heureusement ceci ; tout entier du 2^{e} ordre est a fortiori un entier du 1er ordre, puisqu'il appartiendra à toutes les classes récurrentes des deux premiers ordres, et par conséquent à toutes celles du 1er ordre ; de même tout entier du K^{e} ordre sera a fortiori un entier du K - 1^{e} ordre. Nous sommes ainsi amenés à définir une série de classes de plus en plus restreintes, entiers du l^{er}, du 2^{e},... du n^{e} ordre, dont chacune contenue dans celle qui précède. J'appellerai entier d'ordre ω tout nombre qui appartiendra à la fois à toutes ces classes ; et cette définition de l'entier de l'ordre ω aura un sens et pourra être regardée comme équivalente à la définition d'abord proposée pour le nombre entier et qui n'en avait pas. Est-ce là une application correcte de l'axiome de réductibilité, tel que l'entend M. Russell ? Je ne propose cet exemple que timidement.

Admettons-le pourtant, et reprenons le théorème, à démontrer au sujet de la somme de deux entiers. Nous avons établi que la somme de deux entiers du K^{er} ordre est un entier d'ordre K - 1, et nous voulons en conclure que si x et n sont deux entiers d'ordre ω, la somme n + x est aussi un entier d'ordre ω. Et en effet il suffit pour cela d'établir que c'est un entier d'ordre K quelque grand que soit K. Or si n et x sont des entiers d'ordre ω, ce seront a fortiori des entiers d'ordre K+1, donc en vertu du théorème déjà établi, n + x est un entier d'ordre K..

C. Q. F. D.

Est-ce de cette façon qu'on peut se servir de l'axiome de M. Russell ? Je sens bien que ce n'est pas tout à fait cela et que M. Russell donnerait au raisonnement une tout autre forme, mais le fond demeurerait le même.

Je ne veux pas discuter ici la validité de ce mode de démonstration.

Je me bornerai pour le moment aux observations suivantes. Nous avons été conduits à introduire à côté de la notion des objets du n^e ordre, celle des objets d'ordre ω et nous croyons avoir réussi en ce qui concerne les entiers, à définir cette notion nouvelle. Mais cela ne réussirait pas toujours ; pour Epiménide par exemple, cela ne marcherait pas du tout. Ce qui a assuré le succès, c'est la circonstance suivante. La classification étudiée n'était pas prédicative, et l'adjonction d'éléments nouveaux obligeait à modifier le classement des éléments antérieurement introduits et classés. Toutefois cette modification ne pouvait se faire que dans un sens ; on pouvait être obligé de transférer des objets de la classe A dans la classe B (à savoir de celle des entiers dans celle des non-entiers), mais jamais de les transférer de la classe B dans la classe A. Il faudrait une convention nouvelle pour définir les objets d'ordre ω dans le cas où la modification devrait se faire tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre.

En second lieu, la définition des entiers d'ordre ω n'est pas la même que celle des entiers d'ordre K, K étant fini. On définit les entiers d'ordre K par récurrence en déduisant la notion d'entier d'ordre K, de la notion d'entier d'ordre K - 1. On définit les entiers d'ordre ω, par passage à la limite, en faisant dépendre cette notion nouvelle d'une infinité de notions antérieures, celles des entiers de tous les ordres finis. Les deux définitions seraient donc incompréhensibles pour quelqu'un qui ne saurait pas déjà ce que c'est qu'un nombre fini ; elles présupposent la distinction des nombres finis et des nombres infinis. Ce n'est donc pas sur elle qu'on peut espérer fonder cette distinction.

§ 5. - LE MEMOIRE DE M. ZERMELO

C'est dans une tout autre direction que M. Zermelo cherche la solution des difficultés que nous avons signalées. Il s'efforce de poser un système d'axiomes a priori, qui doivent lui permettre d'établir toutes les vérités mathématiques sans être exposé à la contradiction. Il y a plusieurs manières de concevoir le rôle des axiomes ; on peut les regarder comme des décrets arbitraires qui ne sont que les définitions déguisées des notions fondamentales. C'est ainsi qu'au début de la géométrie, M. Hilbert introduit des «choses» qu'il appelle points, droites et plans, et que, oubliant ou paraissant oublier un instant le sens vulgaire dé ces mots, il pose entre ces choses diverses relations qui les définissent.

Pour que cela soit légitime, il faut démontrer que les axiomes ainsi introduits ne sont pas contradictoires, et M. Hilbert y à parfaitement réussi parce qu'il supposait, en ce qui concerne la géométrie, l'analyse déjà constituée et qu'il a pu s'en servir pour cette démonstration. M. Zermelo n'a pas démontré que ses axiomes étaient exempts de contradiction, et il ne pouvait le faire, car, pour cela il lui aurait fallu s'appuyer sur d'autres vérités déjà établies ; or des vérités déjà établies, une science déjà faite, il suppose qu'il n'y en a pas encore, il fait table rase, et il veut que ses axiomes ne suffisent entièrement à eux-mêmes.

Les postulats ne peuvent donc tirer leur valeur d'une sorte de décret arbitraire, il faut qu'ils soient évidents par eux-mêmes. Il nous faudra donc, non pas démontrer cette évidence, puisque l'évidence ne se démontre pas, mais chercher à pénétrer le mécanisme psychologique qui a créé ce sentiment de l'évidence. Et voici d'où provient la difficulté ; M. Zermelo admet certains axiomes, et il en rejette d'autres qui, au premier abord, peuvent sembler aussi évidents que ceux qu'il conserve ; s'il les conservait tous, il tomberait dans la contradiction, il lui fallait donc faire un choix, mais on peut se demander quelles sont les raisons de son choix, et c'est ce qui nous oblige à quelque attention.

Ainsi il commence par rejeter la définition de Cantor : un ensemble est la réunion d'objets distincts quelconques considérés comme formant un tout. Je n'ai donc pas le droit de parler de l'ensemble de tous les objets qui satisfont telle ou telle condition. Ces objets ne forment pas un ensemble, une *Menge*, mais il faut bien mettre quelque chose à la place de la définition qu'on rejette. M. Zermelo se borne à dire : considérons un domaine (*Bereich*) d'objets quelconques ; il peut arriver qu'entre deux de ces objets x et y, il y ait une relation de la forme x ε y ; nous dirons alors que x est un élément de y, et que y est un ensemble, une *Menge*.

Évidemment ce n'est pas là une définition, quelqu'un qui ne sait pas ce que c'est qu'une *Menge*, ne le saura pas davantage quand il aura appris qu'elle est représentée par le symbole ε, puisqu'il ne sait pas ce que c'est que ε. Cela pourrait aller si ce symbole ε devait être défini dans la suite par les axiomes eux-mêmes qui seraient regardés comme des décrets arbitraires. Mais nous venons de voir que ce point de vue était intenable. Il faut donc que nous sachions d'avance ce que c'est qu'une *Menge*, que nous en ayons l'intuition, et c'est cette intuition qui nous fera comprendre ce que c'est que ε, qui ne serait sans cela qu'un symbole dépourvu de sens, et dont on ne pourrait affirmer aucune propriété évidente par elle-même. Mais qu'est-ce que cette intuition peut être si elle n'est pas la définition de Cantor que nous avons dédaigneusement rejetée ?

Passons sur cette difficulté que nous chercherons plus loin à éclaircir et énumérons les axiomes admis par M. Zermelo ; ils sont au nombre de sept :

1° Deux *Mengen* qui ont mêmes éléments sont identiques.

2° Il y a une *Menge* qui ne contient aucun élément, c'est la *Nullmenge* ; s'il existe un objet a, il existe une *Menge* (a) dont cet objet est l'unique élément ; s'il existe deux objets a et b, il existe une *Menge* (a, b) dont ces deux objets sont les seuls éléments.

3° L'ensemble de tous les éléments d'une *Menge* M qui satisfont à une condition x forme un sous-ensemble, une *Untermenge* de M.

4° A chaque *Menge* T correspond une autre *Menge* U T, formée de toutes les *Untermengen* de T.

5° Considérons une *Menge* T dont les éléments sont eux-mêmes des *Mengen ;* il existe une *Menge* ST, dont les éléments sont les éléments des éléments de T. Si par exemple T a trois éléments A, B, C, qui sont eux-mêmes des *Mengen* ; si A a deux éléments a et a', B deux éléments b et b', C deux éléments c et c', ST aura six éléments a, b, c, a', b', c'

6° Si on a une *Menge* T dont les éléments sont eux-mêmes des *Mengen*, on peut choisir dans chacune de ces *Mengen* élémentaires un élément, et l'ensemble des éléments ainsi choisis forme une *Untermenge* de ST.

7° Il existe au moins une *Menge* infinie.

Avant de discuter ces axiomes, je dois répondre à une question ; pourquoi, dans leur énoncé, ai-je conservé le nom allemand *Menge* au lieu de le traduire par le mot français ensemble ? C'est parce que ici je ne suis pas sûr que le, mot *Menge* conserve dans ces axiomes son sens intuitif, sans quoi il serait difficile de, rejeter la définition de Cantor ; or le mot français ensemble suggère ce sens intuitif d'une façon trop impérieuse, pour qu'on puisse l'employer sans inconvénient quand ce sens est altéré.

Je n'insisterai pas beaucoup sur le 7^e^ axiome ; j'en dois cependant dire un mot pour faire remarquer la façon très originale dont M. Zermelo l'énonce ; il ne se contente pas en effet de l'énoncé que j'ai donné ; il dit : il existe une *Menge* M qui ne peut contenir l'élément a, sans contenir également comme élément la *Menge* (a), c'est-à-dire celle dont a est l'unique élément. Et alors si M admet l'élément a, elle en admettra une série d'autres, à savoir la *Menge* dont a est l'unique élément, la *Menge* dont l'unique élément est la *Menge* dont l'unique élément est a et ainsi de suite. On voit assez que le nombre de ces éléments doit être infini. Au premier abord, ce détour paraît bien bizarre et bien artificiel, et il l'est en effet ; mais M. Zermelo a voulu éviter de prononcer le mot infini, parce qu'il considère ses axiomes comme antérieurs à la distinction du fini et de l'infini.

Passons aux six premiers axiomes ; ils peuvent être regardés comme évidents, dès qu'on donne au mot *Menge* son sens intuitif et si on ne considère que des objets en nombre finis. Mais ils ne le sont pas plus que cet autre axiome que l'auteur rejette, expressément :

8° Des objets quelconques forment une *Menge*.

Et alors nous devons nous poser une question ; pourquoi l'évidence de l'axiome 8 cesse-t-elle, dès qu'il s'agit de collections infinies, tandis que celle des six premiers subsiste ?

Si, pour résoudre cette question, nous nous reportons à l'énoncé des axiomes, nous aurons un premier étonnement ; nous constaterons que tous ces axiomes sans exception ne nous apprennent qu'une chose, c'est que certaines collections, formées d'après certaines lois, constituent des *Mengen* ;

de sorte que ces axiomes ne nous apparaîtront plus que comme des règles destinées à étendre le sens du mot *Menge*, comme de pures définitions de mots. Et cela est vrai aussi bien du 8° axiome que nous rejetons, que des sept premiers que nous acceptons.

Nous sommes avertis pourtant bien vite que cette première impression est trompeuse ; de semblables définitions de mots ne nous exposeraient pas à la contradiction ; celle-ci ne serait à craindre que si nous avions d'autres axiomes affirmant que certaines collections ne sont pas des *Mengen* ; et nous n'en avons pas. Cependant si nous rejetons le 8° axiome, c'est pour éviter la contradiction : M. Zermelo le dit explicitement.

Il faut donc bien qu'il n'ait pas considéré ses axiomes comme de simples définitions de mots, et qu'il ait attribué au mot *Menge* un sens intuitif préexistant à tous ses énoncés, quoique différant quelque peu du sens habituel. Il n'est pas impossible de l'apercevoir en recherchant l'usage que l'auteur en fait dans ses raisonnements. Une *Menge* c'est quelque chose sur quoi l'on peut raisonner ; c'est quelque chose de fixe et d'immuable dans une certaine mesure. Définir un ensemble, une *Menge*, une collection quelconque, c'est toujours faire une classification, séparer les objets qui appartiennent à cet ensemble de ceux qui n'en font pas partie. Nous dirons alors que cet ensemble n'est pas une *Menge*, si la classification correspondante n'est pas prédicative, et que c'est une *Menge*, si cette classification est prédicative ou si on peut en raisonner comme si elle l'était.

Si nous rejetons le 8° axiome, c'est parce que des objets quelconques formeront sans doute une collection, mais une collection qui ne sera jamais close, et dont l'ordre pourra à chaque instant être troublé par l'adjonction d'éléments inattendus. C'est une collection qui n'est pas prédicative et au contraire, quand nous disons par exemple qu'à chaque *Menge* T correspond une autre *Menge* UT ou ST définie de telle ou telle manière, nous affirmons que cette définition est prédicative, ou que nous avons le droit de faire comme si elle l'était.

Et c'est ici le lieu de parler d'une distinction qui joue un rôle essentiel dans la théorie de M. Zermelo : «Eine Frage oder Aussage E, ueber deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür unterscheiden, heisst *definit*.» Le mot *definit* semble ici sensiblement synonyme de prédicatif. Mais l'usage qu'en fait M. Zermelo montre que la synonymie n'est pas parfaite. Ainsi supposons par exemple que cette question E soit la suivante : tel élément de la *Menge* M possède-t-il telle relation avec tous les autres éléments de la même *Menge*, et que nous convenions de dire que tous les éléments pour lesquels on doit répondre oui forment une classe K ? Pour moi, et je crois aussi pour M. Russell, une pareille question n'est pas prédicative ; parce que les autres éléments de M sont en nombre infini, qu'on pourra sans cesse en introduire de nouveaux, et que parmi les nouveaux éléments introduits, il pourra y en avoir dans la définition desquels entre la notion de la classe K, c'est-à-dire de l'ensemble des éléments qui possèdent la propriété E. Pour M. Zermelo, cette question serait *definit* sans que je sache exactement où est la démarcation exacte, entre les questions qui sont *definit* et celles qui ne le sont pas. Il lui semble que, pour savoir si un élément possède la propriété E par rapport à tous les autres éléments de M, il suffit de vérifier s'il la possède par rapport à chacun d'eux. Si la question est *definit* par rapport à chacun de ses éléments, elle le sera ipso facto par rapport à tous ces éléments.

Et c'est ici qu'apparaît la divergence de nos vues. M. Zermelo s'interdit de considérer l'ensemble de tous les objets qui satisfont à une certaine condition parce qu'il lui semble que cet ensemble n'est jamais clos ; qu'on pourra toujours y faire entrer de nouveaux objets. Au contraire il n'a aucun scrupule à parler de l'ensemble des objets qui font partie d'une certaine *Menge* M et qui satisfont de plus à une certaine condition. Il lui semble qu'il ne peut posséder une *Menge*, sans posséder du même coup tous ses éléments. Parmi ces éléments, il choisira ceux qui satisfont à une condition donnée, et il pourra faire ce choix bien tranquillement, sans crainte qu'on vienne le troubler en introduisant des éléments nouveaux et inattendus, puisque ces éléments, il les a déjà tous entre les mains. En posant d'avance sa *Menge* M, il a élevé un mur de clôture qui arrête les gêneurs qui pourraient venir du dehors. Mais il ne se demande pas s'il ne peut y avoir des gêneurs du dedans qu'il a enfermés avec lui dans son mur. Si la *Menge* M a une infinité d'éléments, cela veut dire non que ces éléments puissent être conçus comme existant d'avance tous la fois, mais qu'il peut sans cesse en naître de nouveaux ; ils naîtront à l'intérieur du mur, au lieu de naître dehors, voilà tout. Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux qu'on pourra inventer un jour ; quand je parle de tous les points de l'espace, je veux dire tous les points dont les coordonnées sont exprimables par des nombres rationnels, on par des nombres algébriques, ou par des intégrales, ou de toute autre manière que l'on pourra inventer. Et c'est ce «l'on pourra» qui est l'infini. Mais on pourra en inventer que l'on définira de bien des façons, et si nous reprenons comme tout à l'heure notre question E et notre classe K, la question E se pose de nouveau chaque fois qu'on définira un nouvel élément de M ; or, parmi ces éléments que nous pourrons définir, il y en aura dont la définition dépendra de cette classe K. De sorte que le cercle vicieux n'aura pu être évité.

Voilà pourquoi les axiomes de M. Zermelo ne sauraient me satisfaire. Non seulement ils ne me semblent pas évidents, mais quand l'on me demandera s'ils sont exempts de contradiction, je ne saurai que répondre. L'auteur a cru éviter le paradoxe du plus grand cardinal, en s'interdisant toute spéculation en dehors de l'enceinte d'une *Menge* bien close ; il a cru éviter le paradoxe de Richard, en ne posant que des questions *definit*, ce qui, d'après le sens qu'il donne à cette expression, exclut toute considération sur les objets qui peuvent être définis en un nombre fini de mots. Mais s'il a bien fermé sa bergerie, je ne suis pas sûr qu'il n'y ait pas enfermé le loup. Je ne serais tranquille que s'il avait démontré qu'il est à l'abri de la contradiction ; je sais bien qu'il ne pouvait le faire, puisqu'il aurait fallu s'appuyer par exemple sur le principe d'induction, qu'il ne révoquait pas en doute, mais qu'il se proposait de démontrer plus loin. Il aurait dû passer outre ; cela aurait été au prix d'une faute de logique, mais du moins nous en serions sûrs.

§ 6.-L'EMPLOI DE L'INFINI

Est-il possible de raisonner sur des objets qui ne peuvent pas être définis en un nombre fini de mots ? Est-il possible même d'en parler en sachant de quoi l'on parle, et en prononçant autre chose que des paroles vides? Ou au contraire doit-on les regarder comme impensables ? Quant à moi, je n'hésite pas à répondre que ce sont de purs néants.

Tous les objets que nous aurons jamais à envisager, ou bien seront définis en un nombre fini de mots ou bien ne seront qu'imparfaitement déterminés et demeureront indiscernables d'une foule d'autres objets ; et nous ne pourrons raisonner congrûment à leur endroit, que quand nous les aurons distingués de ces autres objets avec lesquels ils demeurent confondus, c'est-à-dire quand nous serons arrivés à les définir en un nombre fini de mots.

Si nous considérons un ensemble, et que nous voulions en définir les différents éléments, cette définition se décomposera naturellement en deux parties ; la première partie de la définition, commune à tous les éléments de l'ensemble, nous apprendra à les distinguer des éléments qui sont étrangers à cet ensemble ; ce sera la définition de l'ensemble ; la seconde partie nous apprendra à distinguer les uns des autres les différents éléments de l'ensemble.

Chacune de ces deux parties devra se composer d'un nombre fini de mots. Si on parle de tous les éléments d'un ensemble dont on donne la définition, on veut parler de tous les objets qui satisfont à la première partie de la définition et qu'on pourra achever de définir par telle phrase d'un nombre fini de mots que l'on voudra. On ne vous donne que la moitié de la définition, vous pouvez ensuite la compléter, en choisissant la seconde moitié comme il vous plaira ; mais il faut que vous la complétiez. Si j'affirme une proposition au sujet de tous les objets d'un ensemble, je veux dire que si un objet satisfait à la première partie de la définition, la proposition en ce qui concerne cet objet restera vraie, quelle que soit la manière dont vous énoncerez la seconde partie - mais si vous pouvez l'énoncer comme vous voulez, il est nécessaire que vous l'énonciez, sans quoi l'objet serait impensable et la proposition n'aurait aucun sens.

Ce n'est pas qu'on ne puisse faire et qu'on n'ait fait quelques objections à cette façon de voir. Les phrases d'un nombre fini de mois pourront toujours être numérotées, puisqu'on peut par exemple les classer par ordre alphabétique. Si tous les objets pensables doivent être définis par de semblables phrases, on pourra aussi leur donner un numéro. Il n'y aurait donc pas plus d'objets pensables que de nombres entiers ; et si l'on considère l'espace, par exemple, si l'on en exclut les points qui ne peuvent être définis en un nombre fini de mots et qui sont de purs néants, il n'y restera pas plus de points qu'il n'y a de nombres entiers. Et Cantor a démontré le contraire.

Ce n'est là qu'un trompe-l'œil ; représenter les points de l'espace par la phrase qui sert à les définir ; classer ces phrases et les points correspondants d'après les lettres qui forment ces phrases, c'est construire une classification qui n'est pas prédicative, qui entraîne tous les inconvénients, tous les paralogismes, toutes les antinomies dont j'ai parlé au début de ce chapitre. Qu'a voulu dire Cantor et qu'a t'il réellement démontré ? On ne peut trouver, entre les nombres entiers et les points de l'espace définissables en un nombre fini de mots, une loi de correspondance satisfaisant aux conditions suivantes : 1° Cette loi peut s'énoncer en un nombre fini de mots. 2° Étant donné un entier quelconque, on peut trouver le point de l'espace correspondant, et ce point de l'espace sera défini sans ambiguïté ; la définition de ce point qui se compose de deux parties, la définition de l'entier et l'énoncé de la loi de correspondance, se réduira à un nombre fini de mots, puisque notre entier peut se définir, et notre loi s'énoncer en un nombre fini de mots. 3° Étant donné un point P de l'espace que je suppose défini en un nombre fini de mots (sans m'interdire de faire figurer dans cette définition des allusions à la loi de correspondance elle-même, ce qui est essentiel dans la démonstration de Cantor) il y aura un entier qui sera déterminé sans ambiguïté par l'énoncé de la loi de correspondance et par la définition du point P. 4° La loi de correspondance doit être prédicative, c'est-à-dire que si elle fait correspondre un point P à un entier, elle ne devra pas cesser de faire correspondre ce point P à ce même entier, quand on aura introduit de nouveaux points de l'espace. Voilà ce que Cantor a démontré et cela reste toujours vrai ; on voit quel est le sens compliqué enfermé dans cette brève proposition : le nombre cardinal des points de l'espace est plus grand que celui des entiers.

Et alors que devons nous conclure? Tout théorème de mathématiques doit pouvoir être vérifié. Quand j'énonce ce théorème, j'affirme que toutes les vérifications que j'en tenterai réussiront; et même si l'une de ces vérifications exige un travail qui excéderait les forces d'un homme, j'affirme que, si plusieurs générations, cent, s'il le faut, jugent à propos de s'atteler à cette vérification, elle réussira encore. Le théorème n'a pas d'autre sens, et cela est encore vrai si dans son énoncé on parle de nombres infinis; mais comme les vérifications ne peuvent porter que sur des nombres finis, il s'ensuit que tout théorème sur les nombres infinis ou surtout sur ce qu'on appelle ensembles infinis, ou cardinaux transfinis, ou ordinaux transfinis, etc., ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis. S'il en est autrement, ce théorème ne sera pas vérifiable, et s'il n'est pas vérifiable, il n'aura pas de sens.

Et il s'ensuit qu'il ne saurait y avoir d'axiome évident concernant les nombres infinis : toute propriété des nombres infinis n'est que la traduction d'une propriété des nombres finis ; c'est cette dernière qui pourra être évidente, tandis qu'il faudra démontrer la première en la comparant à la dernière et en montrant que la traduction est exacte.

§. 7. - RÉSUMÉ

Les antinomies auxquelles certains logiciens ont été conduits proviennent de ce qu'ils n'ont pas pu éviter certains cercles vicieux. Cela leur est arrivé quand ils considéraient des collections finies, mais cela leur est arrivé bien plus souvent quand ils avaient la prétention de traiter des collections infinies. Dans le premier cas, ils auraient pu éviter aisément le piège où ils sont tombés ; ou plus exactement ils ont eux-mêmes tendu le piège où ils se sont amusés à tomber, et même ils ont été obligés de faire bien attention pour ne pas tomber à côté du piège ; en un mot, dans ce cas les antinomies ne sont que des joujoux. Bien différentes sont celles qu'engendre la notion de l'infini; il arrive souvent qu'on y tombe sans le faire exprès, et même quand on est averti, on n'est pas encore bien tranquille.

Les tentatives qui ont été faites pont sortir de ces difficultés sont intéressantes à plus d'un titre, mais elles ne sont pas entièrement satisfaisantes. M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait démontrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes. Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? On a pris les axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement. A mon sens, d'ailleurs, ainsi que je l'ai dit plus haut, aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par intuition.

M. Russell a mieux compris la nature de la difficulté à vaincre, il ne l'a cependant pas entièrement vaincue, parce que sa hiérarchie des types suppose la théorie des ordinaux déjà faite.

Quant à moi, je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :

1° Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;

2° Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;

3° Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.

Toutes les recherches dont nous avons parlé ont un caractère commun. On se propose d'enseigner les mathématiques à un élève qui ne sait pas encore la différence qu'il y a entre l'infini et le fini ; on ne se hâte pas de lui apprendre en quoi consiste cette différence ; on commence par lui montrer tout ce qu'on peut savoir de l'infini sans se préoccuper de cette distinction ; puis dans une région écartée du champ qu'on lui a fait parcourir, on lui découvre un petit coin où se cachent les nombres finis.

Cela me paraît psychologiquement faux ; ce n'est pas ainsi que l'esprit humain procède naturellement, et quand même on devrait s'en tirer sans trop de mésaventures antinomiques, cela n'en serait pas moins une méthode contraire à toute saine psychologie.

M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie ; et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues.

CHAPITRE V : LES MATHEMATIQUES ET LA LOGIQUE

Il y a quelques années, j'ai eu l'occasion d'exposer certaines idées sur la logique de l'infini ; sur l'emploi de l'infini en Mathématiques, sur l'usage qu'on en fait depuis Cantor ; j'ai expliqué pourquoi je ne regardais pas comme légitimes certains modes de raisonnements dont divers mathématiciens éminents avaient cru pouvoir se servir[1]. Je m'attirai naturellement de vertes répliques ; ces mathématiciens ne croyaient pas s'être trompés, ils croyaient avoir eu le droit de faire ce qu'ils avaient fait. La discussion s'éternisa, non pas que l'on vît sans cesse surgir de nouveaux arguments, mais parce qu'on tournait toujours dans le même cercle, chacun répétant ce qu'il venait de dire, sans paraître avoir entendu ce que l'adversaire avait dit. À chaque instant, on m'envoyait une nouvelle démonstration du principe contesté, pour se mettre, disait-on, à l'abri de toute objection ; mais cette démonstration, c'était toujours la même, à peine maquillée. On n'est donc arrivé à aucune conclusion ; si je disais que j'en ai été étonné, je donnerais une triste idée de ma pénétration psychologique.

Dans ces conditions, convient-il de répéter une fois de plus les mêmes arguments, auxquels je pourrais peut-être donner une forme, nouvelle, mais auxquels je ne pourrais rien changer dans le fond, puisqu'il me semble, qu'on n'a pas même essayé de les réfuter. Il me semble préférable de rechercher quelle peut être l'origine de cette différence de mentalité qui engendre de telles divergences de vues. Je viens de dire que ces divergences irréductibles ne m'avaient pas étonné, que je les avais prévues dès la première heure, mais cela ne nous dispense pas d'en chercher l'explication ; on peut prévoir un fait, à la suite d'expériences répétées, et être pourtant très embarrassé pour l'expliquer.

Cherchons donc à étudier la psychologie des deux écoles adverses, à un point de vue purement objectif, comme si nous étions nous-mêmes placés, en dehors de ces écoles, comme si nous décrivions une guerre entre deux fourmilières ; nous constaterons d'abord qu'il y a chez les mathématiciens deux tendances opposées dans la façon d'envisager l'infini. Pour les uns, l'infini dérive du fini, il y un infini parce qu'il y a une infinité de choses finies possibles ; pour les autres l'infini préexiste au fini, le fini s'obtient en découpant un petit morceau dans l'infini.

Un théorème doit pouvoir être vérifié, mais comme nous sommes nous-mêmes finis, nous ne pouvons opérer que sur des objets finis ; lors donc même que la notion, d'infini joue un rôle dans l'énoncé du théorème, il faut que dans la vérification, il n'en soit plus question, sans quoi cette vérification serait impossible. Je prendrai comme exemples des théorèmes comme ceux-ci : la suite des nombres premiers est illimitée, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, etc. ; chacun d'eux peut se traduire par des égalités ou des inégalités où ne figurent que des nombres finis. Ces théorèmes participent de l'infini non parce qu'une des vérifications possibles en participe elle-même, mais parce que les vérifications possibles sont en nombre infini.

En énonçant le théorème, j'affirme que toutes ces vérifications réussiraient ; bien entendu, on ne les fait pas toutes ; il y en a que j'appelle possibles parce qu'elles n'exigeraient qu'un temps fini, mais qui seraient pratiquement impossibles parce qu'elles demanderaient des années de travail. Il me suffit qu'on puisse concevoir quelqu'un d'assez riche et d'assez fou pour la tenter en payant un nombre suffisant d'auxiliaires. La démonstration du théorème a précisément pour but de rendre cette folie inutile.

Un théorème qui ne comporte aucune conclusion vérifiable a-t-il un sens ? ou plus généralement un théorème quelconque a-t-il un sens en dehors des vérifications qu'il comporte ? C'est ici que les mathématiciens différent. Ceux de la première école, ceux que j'appellerai les Pragmatistes (puisqu'il faut bien leur donner un nom) répondent non, et quand on leur apporte un théorème, sans leur donner un moyen de le vérifier, ils n'y voient que de la bouillie pour les chats. Ils ne veulent envisager que des objets qui peuvent être définis en un nombre fini de mots ; quand dans un raisonnement on leur parle d'un objet A satisfaisant à certaines conditions, ils sous-entendent un objet qui satisfait à ces conditions quels que soient d'ailleurs les mots dont on se servira pour achever de le définir, pourvu que ces mots soient en nombre fini.

[1] Voir chap. IV.

Ceux de l'autre école, que j'appellerai, pour abréger, les Cantoriens, ne veulent pas admettre cela ; un homme, quelque bavard qu'il soit, ne prononcera jamais dans sa vie plus d'un milliard de mots ; et alors allons-nous exclure de la Science les objets dont la définition contient un milliard et un mots ? et si nous ne les excluons pas, pourquoi exclurions-nous ceux qui ne peuvent être définis que par une infinité de mots, puisque la construction des uns est comme celle des autres au-dessus de la portée de l'humanité ?

Cet argument laisse bien entendu les Pragmatistes froids ; quelque bavard que soit un homme, l'humanité sera plus bavarde encore et comme nous ne savons pas combien de temps elle durera, nous ne pouvons pas limiter d'avance le champ de ses investigations ; nous savons seulement que ce champ restera toujours limité ; et quand même nous pourrions fixer la date de sa disparition, il y a d'autres astres qui pourraient reprendre l'œuvre inachevée sur la Terre ; les Pragmatistes n'auraient d'ailleurs pas de répugnance à imaginer une humanité beaucoup plus bavarde que la nôtre, mais conservant encore quelque chose d'humain ; ils se refusent à raisonner sur l'hypothèse de je ne sais quelle divinité infiniment bavarde et susceptible de penser une infinité de mots en un temps fini. Et les autres pensent au contraire que les objets existent, dans une sorte de grand magasin, indépendamment de toute humanité ou de toute divinité qui pourrait en parler ou y penser ; que dans ce magasin nous pouvons faire notre choix, que sans doute nous n'avons pas assez d'appétit ou assez d'argent pour tout acheter ; mais que l'inventaire du magasin est indépendant des ressources des acheteurs. Et de ce malentendu initial résultent toutes sortes de divergences de détail.

Prenons pour exemple le théorème de Zermelo, d'après lequel l'espace est susceptible d'être transformé en un ensemble bien ordonné ; les Cantoriens seront séduits par la rigueur, réelle ou apparente, de la démonstration ; les Pragmatistes lui répondront : Vous dites que vous pouvez transformer l'espace en un ensemble bien ordonné ; eh bien ! transformez-le. - Ce serait trop long. - Alors montrez-nous au moins que quelqu'un qui aurait assez de temps et de patience pourrait faire 1a transformation. - Non, nous ne le pouvons pas parce que le nombre des opérations à faire est infini, il est même plus grand que Alephzéro. - Pouvez-vous montrer comment on pourrait exprimer en un nombre fini de mots la loi qui permettrait d'ordonner l'espace ? - Non - et les Pragmatistes concluent que le théorème est dénué de sens, ou faux, ou tout au moins indémontré.

Les Pragmatistes se placent au point de vue de l'extension, et les Cantoriens au point de vue de la compréhension. Quand il s'agit d'une collection finie, cette distinction ne peut intéresser que les théoriciens de la logique formelle ; mais elle nous apparaît comme beaucoup plus profonde en ce qui concerne les collections infinies. Si on se place au point de vue de l'extension, une collection se constitue par l'adjonction successive de nouveaux membres ; nous pouvons en combinant les objets anciens construire des objets nouveaux, puis avec ceux-ci des objets encore plus nouveaux, et si la collection est infinie, c'est parce qu'il n'y a pas de raison pour s'arrêter. Au point de vue de la compréhension au contraire, nous partons de la collection où se trouvent des objets préexistants, qui nous apparaissent d'abord comme indistincts, mais nous finissons par reconnaître quelques-uns d'entre eux parce que nous y collons des étiquettes et que nous les rangeons dans un des tiroirs ; mais les objets sont antérieurs aux étiquettes, et la collection existerait quand même il n'y aurait pas de conservateur pour la classer.

Pour les Cantoriens la notion de nombre cardinal ne comporte pas de mystère. Deux collections ont le même nombre cardinal quand on peut les ranger dans les mêmes tiroirs ; rien de plus facile puisque les deux collections préexistent, et qu'on peut regarder également comme préexistante une collection de tiroirs indépendante des conservateurs chargés d'y ranger les objets. Pour les Pragmatistes, il n'en va pas de même ; la collection ne préexiste pas, elle s'enrichit chaque jour de nouveaux objets s'y adjoignent sans cesse qu'on n'aurait pu définir sans s'appuyer sur la notion des objets déjà antérieurement classés et sur la façon dont ils sont classés. A chaque nouvelle acquisition, le conservateur peut être forcé de bouleverser ses tiroirs pour trouver le moyen de la caser : on ne saura jamais si deux collections peuvent se ranger dans les mêmes tiroirs, puisqu'on peut toujours craindre qu'il soit nécessaire de les déranger.

Par exemple, les Pragmatistes n'admettent que les objets qui peuvent être définis en un nombre fini de mots ; les définitions possibles, étant exprimables par des phrases, peuvent toujours être numérotées avec des numéros ordinaires, depuis un jusqu'à l'infini. A ce compte il n'y aurait qu'un seul nombre cardinal infini possible, le nombre Alephzéro ; pourquoi disons-nous alors que la puissance du continu n'est pas celle des nombres entiers ? Oui, étant donnés tous les points de l'espace que nous savons définir avec des mots en nombre fini, nous savons imaginer une loi, exprimable elle-même par un nombre fini de mots, qui les fait correspondre à la suite des nombres entiers ; mais considérons maintenant des phrases, où figure la notion de cette loi de correspondance, tout à l'heure elles n'avaient aucun sens puisque cette loi n'était pas encore inventée, et elles ne pouvaient servir à définir des points de l'espace ; maintenant elles ont acquis un sens, elles vont nous permettre de définir de nouveaux points de l'espace ; mais ces nouveaux points ne trouverons plus de place dans la classification adoptée, ce qui nous contraindra à la bouleverser. Et c'est cela que nous voulons dire, d'après les Pragmatistes, quand nous disons que la puissance du continu n'est pas celle des nombres entiers. Nous voulons dire qu'il est impossible d'établir entre ces deux ensembles une loi de correspondance qui soit à l'abri de cette sorte de bouleversement ; au lieu qu'on peut le faire par exemple quand il s'agit d'une droite et d'un plan.

Et alors les Pragmatistes ne sont pas certains qu'un ensemble quelconque ait, à proprement parler, un nombre cardinal ; ou bien qu'étant donnés deux ensembles on puisse toujours savoir s'ils ont la même puissance, ou si l'un a une puissance plus grande que l'autre. Ils en viennent ainsi à douter de l'existence d'Aleph-un.

Une autre source de divergence vient de la façon de concevoir la définition. Il y a plusieurs sortes de définition ; la définition directe qui peut se faire soit *per genus proximum et dilfferentiam specificam* soit par construction.

Notons en passant qu'il y a des définitions incomplètes en ce sens qu'elles définissent non pas un individu, mais un genre tout entier ; elles sont légitimes et, ce sont même celles dont on fait le plus fréquemment usage ; mais d'après les Pragmatistes, on doit sous-entendre l'ensemble des individus qui satisfont à la définition et qu'on pourrait achever de définir en un nombre fini de mots ; pour les Cantoriens cette restriction est artificielle et dénuée de signification.

S'il n'y avait que des définitions directes, l'impuissance de la logique pure ne saurait être contestée ; on pourrait alors dans une proposition quelconque remplacer chacun des termes par sa définition ; quand on auraitt terminé cette substitution, ou bien la proposition ne se réduirait pas à une identité et alors elle ne serait pas susceptible d'une démonstration purement logique ; ou bien elle se réduirait à une identité et alors elle ne serait qu'une tautologie plus ou moins habilement déguisée.

Mais nous avons encore une autre sorte de définitions, les définitions par postulats ; généralement nous saurons que l'objet à définir appartient à un genre, mais quand il s'agira d'énoncer la différence spécifique, on ne l'énoncera pas directement, mais à l'aide d'un «postulat» auquel l'objet défini devra satisfaire. C'est ainsi que les mathématiciens peuvent définir une quantité x par une équation explicite $x = f(y)$, ou par une équation implicite $F(x, y) = 0$.

La définition par postulat n'a de valeur que quand on a démontré l'existence de l'objet défini ; dans le langage mathématique, cela veut dire que le postulat n'implique pas contradiction ; on n'a pas le droit de négliger cette condition ; il faut ou bien admettre l'absence de contradiction comme une vérité intuitive, comme un axiome, par une sorte d'acte de foi ; mais alors il faut se rendre compte de ce qu'on fait et savoir qu'on a allongé la liste des axiomes indémontrables ; ou bien il faut construire une démonstration en règle, soit par l'exemple, soit par l'emploi du raisonnement par récurrence. Ce n'est pas que cette démonstration soit moins nécessaire quand il s'agit d'une définition directe, mais elle est généralement plus facile.

Certains pragmatistes seront plus exigeants : pour qu'ils regardent une définition comme légitime, il ne leur suffira pas qu'elle ne conduise pas à des contradictions dans les termes, il leur faudra encore qu'elle ait un sens, à leur point de vue particulier que j'ai cherché à définir plus haut.

Quoi qu'il en soit, la logique restera-t-elle stérile, après l'introduction des définitions par postulats ? Nous ne pouvons plus, étant donnée une proposition, y remplacer un terme par sa définition ; tout ce que nous pouvons faire, c'est d'éliminer ce terme entre la proposition et le postulat qui lui sert de définition. Si cette opération, faite d'après ce qu'on pourrait appeler les règles de l'élimination logique, ne nous conduit pas à une identité, c'est que la proposition est indémontrable par la logique pure ; si elle conduit à une identité, c'est que la proposition n'est qu'une tautologie. Nous n'avons rien à changer à nos conclusions de tout à l'heure.

Mais il y a une troisième sorte de définitions, ce qui est l'origine d'un nouveau malentendu entre les Pragmatistes et les Cantoriens. Ce sont encore des définitions par postulat, mais le postulat est ici une relation entre l'objet à définir et tous les individus d'un genre dont l'objet à définir est supposé faire lui-même partie (ou bien dont sont supposés faire partie des êtres qui ne peuvent être eux-mêmes définis que par l'objet à définir). C'est ce qui arrive si nous posons les deux postulats suivants :

X (objet à définir) a telle relation avec les individus du genre G.

X fait partie du genre G.

ou bien les trois postulats suivants :

X a telle relation avec tous les individus du genre G.

Y a telle relation avec X.

Y fait partie de G.

Pour les Pragmatistes une pareille définition implique un cercle vicieux. On ne peut définir X sans connaître tous les individus du genre G, et par conséquent sans connaître X qui est un de ces individus. Les Cantoriens n'admettent pas cela ; le genre G nous est donné, par conséquent nous en connaissons tous les individus, la définition a pour but seulement de discerner parmi ces individus celui qui a avec tous ses camarades la relation énoncée. Non, répondent leurs adversaires, la connaissance du genre ne vous fait pas connaître tous ses individus, elle vous donne seulement la possibilité de les construire tous, en plutôt d'en construire autant que vous voudrez. Ils n'existeront qu'après qu'ils auront été construits, c'est-à-dire après qu'ils auront été définis ; X n'existe que par sa définition qui n'a de sens que si l'on connaît d'avance tous les individus de G et en particulier X. Il ne servirait à rien de dire, ajoutent-ils, que ce n'est pas un cercle vicieux de définir X par sa relation avec X, que cette relation est en somme un postulat qui peut servir à définir X car il faudrait établir au préalable que ce postulat n'implique pas contradiction, mais ce n'est pas d'ordinaire ce qu'on fait dans ce genre de définitions. On démontre d'abord que quel que soit le genre G, dont tous les individus sont supposés connus, il existe un être X qui a avec ce genre la relation en question ; c'est-à-dire que l'existence de cet être n'entraîne pas la contradiction ; il resterait à faire voir qu'il n'y a pas contradiction entre l'existence de cet être et l'hypothèse que cet être fait partie du genre.

Le débat pourrait se poursuivre longtemps ; mais le point que je voudrais mettre en évidence, c'est que si ce genre de définitions était admis, la logique ne serait plus stérile, et la preuve, c'est qu'on a bâti de la sorte une foule de raisonnements destinés à démontrer des propositions qui n'étaient nullement des tautologies puisqu'il y a des gens qui se demandent si elles ne sont pas fausses. Et alors on admire le pouvoir que peut avoir un mot. Voilà un objet dont on n'aurait rien pu tirer, tant qu'il n'était pas baptisé ; il a suffi de lui donner un nom pour qu'il fît des merveilles. Comment cela se fait-il ? C'est parce qu'en lui donnant un nom, nous avons affirmé implicitement que 1'objet existait (c'est-à-dire était pur de toute contradiction) et qu'il était entièrement déterminé. Or, cela nous n'en savons rien à ce que prétendent les Pragmatistes. Quel est donc le mécanisme qui rend la démonstration féconde ? c'est bien simple, on nie la proposition à démontrer et on montre qu'on se trouve en contradiction avec l'existence de 1'objet X ; et cela n'est légitime que si l'on est certain de cette existence, et d'autre part, si l'on sait que l'objet est entièrement déterminé. Et en effet si X se déduit du genre G par la définition, que ensuite on complète le genre G en y adjoignant l'objet X et les autres individus du même genre qui peuvent en dériver ; que si l'on appelle G' le genre ainsi complété et X' ce qui se déduirait de G' par la définition de la même façon que X s'est déduit de G, il faut qu'on soit sûr que X' est identique à X. S'il n'en était pas ainsi et qu'en niant la proposition à démontrer, on fût conduit à deux énoncés contradictoires

$$\varphi_1(X)=0, \varphi_2(X)=0$$

comment saurait-on que c'est bien le même X qui figure dans l'une et l'autre ? Si X figurait dans l'une et X' dans l'autre, les deux propositions s'écriraient

$$\varphi_1(X)=0, \varphi_2(X')=0$$

et ne seraient plus contradictoires en général.

Pourquoi donc les Pragmatistes font-ils cette objection ? C'est parce que le genre G ne leur apparaît que comme une collection susceptible de s'accroître indéfiniment, à mesure qu'on construira de nouveaux individus, possédant les caractères convenables ; c'est ainsi que G ne peut jamais être posé *ne varietur*, comme le font les Cantoriens, et qu'on n'est pas sur que, par de nouvelles annexions, il ne deviendra pas G'.

Je me suis efforcé d'expliquer aussi clairement et aussi impartialement que je j'ai pu en quoi consistent les divergences entre les deux écoles de mathématiciens ; et il me semble que nous en apercevons déjà la véritable cause ; les savants des deux écoles ont des tendances mentales opposées ;

ceux que j'ai appelés les Pragmatistes sont des idéalistes, les Cantoriens sont des réalistes. Il y a une chose qui nous confirmera dans cette manière de voir. Nous voyons que les Cantoriens (qu'on me passe ce vocable commode bien que je veuille parler ici non des mathématiciens qui suivent la voie ouverte par Cantor, ni peut-être même des philosophes qui se réclament de lui, mais de ceux qui ont les mêmes tendances d'une façon indépendante), que les Cantoriens, dis-je, parlent constamment d'épistémologie, c'est-à-dire de la science des sciences ; Et il est bien entendu que cette épistémologie est tout à fait indépendante de la psychologie ; c'est-à-dire qu'elle doit nous apprendre ce que seraient les sciences s'il n'y avait pas de savants ; que nous devons étudier les sciences, non sans doute en supposant qu'il n'y a pas de savants, mais du moins sans supposer qu'il y en a. Ainsi non seulement la Nature est une réalité indépendante du physicien qui pourrait être tenté de l'étudier, mais la physique elle-même est aussi une réalité qui subsisterait s'il n'y avait pas de physiciens. C'est bien là du réalisme.

Et pourquoi les Pragmatistes refusent-ils d'admettre des objets qui ne pourraient être définis par un nombre fini de mots ? C'est parce qu'ils considèrent qu'un objet n'existe que quand il est pensé, et qu'on ne saurait concevoir un objet pensé indépendamment d'un sujet pensant. C'est bien là de l'idéalisme. Et comme un sujet pensant c'est un homme, ou quelque chose qui ressemble à l'homme, que c'est par conséquent un être fini, l'infini ne peut avoir d'autre sens que la possibilité de créer autant d'objets finis qu'on le veut.

Et alors on peut faire une remarque assez curieuse. Les réalistes se placent d'ordinaire au point de vue physique ; ce sont les objets matériels, ou les âmes individuelles, ou ce qu'ils appellent les substances, dont ils affirment l'existence indépendante. Le monde pour eux existait avant la création de l'homme, avant même celle des êtres vivants ; il existerait encore même s'il n'y avait pas de Dieu ni aucun sujet pensant. Cela, c'est le point de vue du sens commun, et ce n'est que par la réflexion qu'on peut être amené à l'abandonner. Les partisans du réalisme physique sont en général finitistes ; dans la question des antinomies kantiennes, ils tiennent pour les thèses ; ils croient que le monde est limité. Telle est par exemple la manière de voir de M. Evellin. Au contraire les idéalistes n'ont pas les mêmes répugnances et sont tout prêts à souscrire aux antithèses.

Mais les Cantoriens sont réalistes, même en ce qui concerne les entités mathématiques ; ces entités leur paraissent avoir une existence indépendante ; le géomètre ne les crée pas, il les découvre. Ces objets existent alors pour ainsi dire sans exister, puisqu'ils se réduisent à de pures essences ; mais comme, par nature, ces objets sont en nombre infini, les partisans du réalisme mathématique sont beaucoup plus infinitistes que les idéalistes ; leur infini n'est plus un devenir, puisqu'il préexiste à l'esprit qui le découvre ; qu'ils l'avouent ou qu'ils le nient, il faut donc qu'ils croient à l'infini actuel.

On reconnaît là la théorie des idées de Platon ; et cela peut paraître étrange de voir Platon classé parmi les réalistes ; rien n'est pourtant plus opposé à l'idéalisme contemporain que le platonisme, bien que cette doctrine soit également très éloignée du réalisme physique.

Je n'ai jamais connu de mathématicien plus réaliste, au sens platonicien, qu'Hermite, et pourtant je dois avouer que je n'en ai pas rencontré de plus réfractaire au Cantorisme. Il y a là une apparente contradiction, d'autant plus qu'il répétait volontiers : Je suis anti-cantorien parce que je suis réaliste. Il reprochait à Cantor de créer des objets, au lieu de se contenter de les découvrir. Sans doute à cause de ses convictions religieuses considérait-il comme une sorte d'impiété de vouloir pénétrer de plain-pied dans un domaine que Dieu seul peut embrasser et de ne pas attendre qu'il nous en révèle un à un les mystères. Il comparait les sciences mathématiques aux sciences naturelles. Un naturaliste qui aurait cherché à deviner le secret de Dieu, au lieu de consulter l'expérience, lui aurait paru non seulement présomptueux mais irrespectueux pour la majesté divine ; les Cantoriens lui paraissaient vouloir agir de même en mathématiques. Et c'est pourquoi, réaliste en théorie, il était idéaliste en pratique. Il y a une réalité à connaître et elle est extérieure à nous et indépendante de nous ; mais tout ce que nous en pouvons connaître dépend de nous, et n'est plus qu'un devenir, une sorte de stratification de conquêtes successives. Le reste est réel mais éternellement inconnaissable.

Le cas d'Hermite est d'ailleurs isolé et je ne m'y étends pas davantage. De tout temps, il y a eu en philosophie des tendances opposées et il ne semble pas que ces tendances soient sur le point de se concilier. C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer. Il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir entre les Pragmatistes et les Cantoriens. Les hommes ne s'entendent pas parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas.

Et pourtant en mathématiques ils ont coutume de s'entendre ; mais c'est justement grâce à ce que j'ai appelé les vérifications ; elles jugent en dernier ressort et devant elles tout le monde s'incline. Mais là où ces vérifications font défaut, les mathématiciens ne sont pas plus avancés que de simples philosophes. Quand il s'agit de savoir si un théorème peut avoir un sens sans être vérifiable, qui pourra juger puisque par définition on s'interdit de vérifier ? On n'aurait plus de ressource que d'acculer son adversaire à une contradiction. Mais l'expérience a été faite et elle n'a pas réussi.

On a signalé beaucoup d'antinomies, et le désaccord a subsisté, personne n'a été convaincu ; d'une contradiction, on peut toujours se tirer par un coup de pouce ; je veux dire par un *distinguo*.