**Séminaire d'histoire des mathématiques de l'IHP.**

**16 Janvier 2015.**

**Les constructivismes mathématiques.**

# Erret Bishop.
# Foundations of Constructive Analysis.
# Une révolution mathématique en 1967.

(une refondation des mathématiques, constructive, minimaliste et révolutionnaire)

**H. Lombardi, Besançon**

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Version imprimable de ces transparents :

http://hlombardi.free.fr/publis/Bishop2015Doc.pdf

# L'état des lieux
# avant la parution du livre de Bishop


Poincaré H. *La logique de l'infini*. Revue de Métaphysique et de Morale **17**, 461–482, (1909) réédité dans *Dernières pensées*, Flammarion (1913).

Brouwer L. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism, 1951* (Van Dalen ed.) Cambridge University Press, (1981).

Weyl H. *Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Veit, Leipzig (1918). En français : *Le continu et autres écrits*. Traduits et commentés par Jean Largeault. Librairie Vrin (1994).

Kolmogorov A. *Zur Deutung der intuitionistischen Logik.* Math. Zeitschr., **35** (1932) 58–65.

Hilbert D. *Über das Unendliche*. Math. Annalen **95** (1926), 161–190. (Sur l'infini) Traduit par J. Largeault dans : Logique mathématique. Textes. Armand Colin, coll. U, Paris, (1972), 233–237.

Heyting A. *After thirty years.* In : 1962 Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.) 194–197.

Goodstein R. *Recursive Number Theory*. Amsterdam, North-Holland, (1957).

Goodstein R. *Recursive Analysis*. Amsterdam, North-Holland, (1961).

Shanin N.A. *Constructive Real Numbers and Function Spaces*. En russe, (1962). Transl. Math. Monogr. Vol. 21., AMS, Providence, RI, 1968.

Quelques citations mises en exergue par Gabriel Stolzenberg dans son rapport sur le livre de Bishop.

For, compared with the immense expanse of modern mathematics, what would the wretched remnants mean, the few isolated results, incomplete and unrelated, that the intuitionists have obtained ...
(**Hilbert**, 1927, Die Grundlagen der Mathematik (Fondements des mathématiques). Traduit par Jean Largeault dans : Intuitionisme et théorie de la démonstration, pages 146–163.)

While in a few cases one has succeeded in replacing certain intuitionistically void proofs by constructive ones, for the majority this has not been achieved nor is there a prospect of achieving it...
(**Fraenkel & Bar-Hillel**, 1958, Foundations of set theory)

L'école intuitionniste, dont le souvenir n'est sans doute destiné à subsister qu'à titre de curiosité historique...
(**Bourbaki**, 1960, Éléments d'histoire des mathématiques)

# A straightforward realistic treatment of mathematics....

Almost every conceivable type of resistance has been offered to a straightforward realistic treatment of mathematics.... It is time to make the attempt.
(Bishop, 1967, Foundations ... chap. 1)

"We are not contending that idealistic mathematics is worthless from the constructive point of view. This would be as silly as contending that unrigorous mathematics is worthless from the classical point of view. Every theorem proved with idealistic methods presents a challenge : to find a constructive version, and to give it a constructive proof."
(Bishop 1967, Preface, page x)

# Un point de vue minimaliste acceptable par tout-e mathématicien-ne

Quand on lit le livre de Bishop, on a le sentiment de lire un livre de maths comme tous les autres, . . .
. . . avec certaines précautions qui garantissent un contenu algorithmique pour les théorèmes, mais n'obligent pas à renoncer aux théorèmes usuels.

Le travail consiste en fait à trouver la, ou les, bonne(s) formulation(s) du théorème usuel, de façon à lui découvrir une signification calculatoire. Une part importante de cette activité consiste en l'élaboration de « définitions pertinentes d'un point de vue constructif ».

Le fait que « cela marche » a été un étonnement pour les uns, une divine surprise pour les autres.

# Vérité intuitive versus vérité formelle

Lu sur Wikipedia

(A) Mathematics is common sense ;

(B) Do not ask whether a statement is true until you know what it means ;

(C) A proof is any completely convincing argument ;

(D) Meaningful distinctions deserve to be preserved.

Items A through D are principles of constructivism from his Schizophrenia in Contemporary Mathematics. American Mathematical Society. 1973.

# Une théorie des ensembles enfin raisonnable

Les notions de base, prémathématiques, non susceptibles de définition, sont celles de **nombre entier**, de **construction**, de **raisonnement convaincant**. On peut les commenter, on ne peut pas les définir.

Un ensemble est bien défini lorsque l'on a clairement dit comment construire ses éléments d'une part, ce que signifie l'égalité entre deux éléments d'autre part (on doit démontrer constructivement que c'est une relation d'équivalence).

Les ensembles sont les êtres mathématiques sur lesquels la quantification, universelle ou existentielle, est autorisée.

Si $A$ et $B$ sont bien définis, alors l'ensemble des fonctions de $A$ vers $B$ est également bien défini.

# Bishop et le programme de Hilbert

On peut considérer que le livre de Bishop réalise une variante du programme de Hilbert, en remplaçant les exigences finitistes (du programme de Hilbert) par des exigences constructives.
En fait, ce serait plutôt le **programme de Poincaré**, car il n'y a pas de formalisation, et l'infini est « correctement » contrôlé, i.e. « ramené au fini », comme le demande Poincaré dans son texte sur la logique de l'infini.

1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots.
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini.
3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.

# Les nombres réels tous calculables ?

Bishop ne prend pas partie sur cette question. Mais il démontre en premier le théorème de Cantor.

For the constructivist, Bishop's book is the most important book on foundations of mathematics ever to appear. Its framework is closely related to, but not identical with, Brouwerian intuitionism. An important difference is that the notion of "free choice sequence" is dropped and the only sequences used are lawlike ones. Another difference is that no results are stated which contradict theorems of classical mathematics ; for instance, instead of the intuitionistic result that all real functions are continuous, we have the metatheorem that the only functions that can be proved to exist are provably continuous. Both these differences make the mathematics in the book look far more familiar to the classical mathematician than do Brouwer's papers.
John Myhill, Journal of Symbolic Logic, **37**, 744–747 (1972).

# Bishop et
# le programme d'Herman Weyl
# (Das Kontinuum)

# Calculabilité intuitive (à la Brouwer) versus calculabilité mécanique (à la Turing)

# Les boréliens.
# Un exemple intéressant
# de définition inductive

# Quelques références (/Bishop)


Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw Hill, (1967). Reprint facsimilé avec une préface de Michael Beeson. 2012. IshiPress New York and Tokyo.

Per Martin-Löf. *Notes on constructive mathematics*. Almqvist & Wiksell, Stockholm, (1970).

Per Martin-Löf. *An intuitionistic theory of types : Predicative part.* In H. E. Rose and J. C. Shepherdson, editors, Logic Colloquium' 73, pages 73–118. North Holland, (1975).

Beeson M. *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer-Verlag, (1985).

Bishop E., Bridges D. *Constructive Analysis*. Springer-Verlag, (1985).

Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988).

Troelstra A. S., van Dalen D. *Constructivism in mathematics. An Introduction. Vols. I and II.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 121 and 123. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1988).

Stolzenberg G. *Review of FCA by Erret Bishop.* Bulletin of the AMS, **76**, 301-323 (1970)

Richman F. *Church Thesis without tears.* Journal of Symbolic Logic, **48** (3) (1983), 797–803.

Bridges D., Richman F. *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press, (1987).

Richman F. *Intuitionism as generalization.* Philosophia Mathematica, **5** (1990), 124–128.

Ishihara H. *Reverse mathematics in Bishop's constructive mathematics*. Philosophia Scientiae, Cahier Spécial **6** (2006), 43–59.

Per Martin-Löf *The Hilbert-Brouwer controversy resolved ?* dans : One hundred years of intuitionism (1907-2007), (Cerisy), (Mark Van Atten & al., editors) Publications des Archives Henri Poincaré, Birkhäuser Basel, (2008), pp. 243–256.

Schwichtenberg H., Wainer S. *Proofs and Computations.* Perspectives in Logic. Association for Symbolic Logic and Cambridge University Press, (2012).

# Approfondir, développer, critiquer, améliorer les mathématiques après Bishop

## Merci de votre attention