# Cantor, Poincaré, Hilbert . . .
# Que sont les êtres mathématiques ?

**Brest, 18 décembre 2014**

**séminaire IREM**

**H. Lombardi, Besançon**

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Pour imprimer ces diapos :

http://hlombardi.free.fr/publis/Brest2014Doc.pdf

# Résumé

La nature des êtres mathématiques est un problème épistémologique crucial.

La théorie des ensembles infinis de Cantor a révolutionné le sujet en semblant offrir une réponse globale. Mais bien des obstacles sont survenus.

Le programme de Hilbert a été une belle tentative de sauver le navire, mais il a échoué. Des alternatives ont vu le jour. Un précurseur était Poincaré.

Nous essayons un survol du sujet, sans cacher notre point de vue, favorable à une conception purement humaine de la vérité en mathématiques.

# L'invention de la droite réelle par Cantor et Dedekind

Il s'agit d'un coup de force étonnant.

Que sont et que doivent être les nombres réels ?, dit Dedekind.

Dedekind prétend être le premier à démontrer $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$

Pourtant Archimède savait le démontrer.

Alors qu'est-ce qui a changé ?

# L'invention de la droite réelle, suite

L'autorisation d'utiliser librement les « infinis actuels » permet à Dedekind et Cantor de définir un nombre réel en toute généralité.

On voit que la définition de Dedekind utilise l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ et celle de Cantor $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Ce n'est plus la géométrie qui justifie intuitivement l'analyse, c'est l'analyse qui justifie la géométrie (via le calcul sur les coordonnées).

**Et l'analyse semble avoir été réduite à l'arithmétique grâce à l'autorisation donnée aux ensembles infinis**

# L'appréciation de Poincaré

La Science et l'Hypothèse. Chapitre II.

La grandeur mathématique et l'expérience.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais *extérieurs* les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.

# Les paradoxes de l'Univers cantorien : des infinis trop grands !

L'univers mathématique de Cantor est trop grand pour être lui-même un ensemble (le cardinal de l'univers est plus grand que tous les autres, mais tout cardinal $\aleph_{bidule}$ est strictement plus petit que le cardinal de $\mathcal{P}(\aleph_{bidule})$.

Au départ, Cantor pensait pouvoir définir un ensemble simplement en disant quelle propriété satisfont ses éléments.

Borel, Lebesgue, Brouwer, Poincaré, Hermann Weyl refuseront de considérer que les ensembles à la Cantor puissent être un fondement fiable pour les mathématiques.

Pour eux, même $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas acceptables.

# Poincaré sur le cantorisme

J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans l'histoire la plus récente des mathématiques. La première est le cantorisme, qui a rendu à la science les services que l'on sait. Cantor a introduit dans la science une manière nouvelle de considérer l'infini mathématique ....

Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées et de définir **par construction**, il part du **genus supremum** et ne définit, comme auraient dit les scolastiques, que per **genus proximum et differentiam specificam**.

# Poincaré sur le cantorisme, suite

De là l'horreur qu'il a quelquefois inspirée à certains esprits, à Hermite par exemple, dont l'idée favorite était de comparer les sciences mathématiques aux sciences naturelles.

Chez la plupart d'entre nous ces préventions s'étaient dissipées, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Élée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède . . .

**Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique**.

in : l'avenir des mathématiques, 1908

# Poincaré et les axiomes de Zermelo

M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait montrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes.
Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? on a pris des axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement.
A mon sens d'ailleurs [...] aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par définition.

in : la logique de l'infini, 1909

# Le programme de Poincaré

Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :

1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;

2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;

3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.

in : la logique de l'infini, 1909

# Le programme de Hilbert

Hilbert tient les critiques de Brouwer et Poincaré pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or, dit-il, les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans l'enfer de Brouwer.

Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu a un sens ou si elle n'en a pas ; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux.

C'est exactement la même attitude que vis à vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste.

# Le programme de Hilbert, suite

Autrement dit, si l'on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler, on serait pleinement satisfaits.

A défaut de pouvoir élucider **la sémantique** des ensembles infinis, essayons au moins de comprendre **leur syntaxe** : comprendre ce que l'on fait exactement quand on les utilise en mathématiques.

Cette position de repli peut sembler effarante, car elle consiste à arithmétiser les mathématiques d'une façon radicale : l'étude d'une théorie formelle n'est rien d'autre que l'étude d'une unique fonction primitive récursive de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ : celle qui énumère les numéros des théorèmes de la théorie.

# L'échec du programme de Hilbert

## Les théorèmes d'incomplétude de Gödel

1) Aucune théorie formelle ne peut décrire complètement le plus simple des infinis : $\mathbb{N}$.

2) Pour démontrer qu'une théorie formelle suffisamment expressive est consistante, on a besoin de méthodes de démonstration plus puissantes que celles codifiées dans la théorie formelle.

# Les vertus du programme de Hilbert

1) Un nouveau domaine des mathématiques : la logique mathématique

2) Cela conduit par exemple à une clarification décisive, due à Brouwer et Heyting : la distinction nette entre la logique des mathématiques constructives (la logique intuitionniste) et la logique classique. Cette dernière accepte l'idée d'une vérité absolue a priori : toute propriété ayant une signification claire est vraie ou fausse dans l'absolu (principe du tiers exclu).

3) La volonté de trouver une façon convaincante de justifier les idéalités cantoriennes. Ceci trouve aujourd'hui des confirmations surprenantes lorsque l'on remplace les exigences « finitistes » du programme de Hilbert par des exigences « constructives » ou « algorithmiques ».

# L'analyse constructive à la Bishop

Dans **Foundations of Constructive Analysis** (1967), Errett Bishop développe une version constructive de la théorie des ensembles, avec laquelle **il réalise un nouveau type de programme de Hilbert**. Il démontre dans un cadre entièrement constructif l'essentiel des théorèmes qui fondent l'analyse réelle et complexe (ce que l'on enseigne aujourd'hui jusqu'au Master).

Il s'agit d'un **cadre mathématique minimaliste** parce que les démonstrations sont acceptables aussi bien par un mathématicien classique que par toutes les variantes des mathématiques constructives.

# Le programme de Poincaré réalisable ?

En fait Bishop réalise même le programme de Poincaré. Tous les objets usuels de l'analyse, qui sont de nature infinie par définition (les nombres réels, les espaces fonctionnels . . .) sont traités dans les algorithmes à travers leurs approximations finies.

Ce ne sont certes pas des mathématiques qui tournent sur ordinateur, car la complexité des algorithmes est en général trop grande. Mais il s'agit néanmoins de la base théorique solide sur laquelle fonder l'analyse numérique.

# Quelques références

Poincaré H. *La logique de l'infini*, Revue de Métaphysique et de Morale **17**, 461–482, (1909) réédité dans *Dernières pensées*, Flammarion (1913).

Weyl H. *Le continu et autres écrits*. Traduits et commentés par Jean Largeault. Librairie Vrin (1994).

Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw Hill, (1967). Réédition : Ishi Press. New York and Tokio, (2012). (1967)

Per Martin-Löf. *An intuitionistic theory of types : Predicative part.* In H. E. Rose and J. C. Shepherdson, editors, Logic Colloquium '73, pages 73–118. North Holland, (1975).

Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988)

Feferman S. *In the Light of Logic*. Oxford University Press, (1998).

## Quelques références


Coquand T. *La contribution de Kolmogorov en logique intuitionniste*. dans : L'héritage de Kolmogorov en mathématiques. Charpentier E., Lesne A., Nikolski N. (eds). Belin, Paris (2004).

Dowek G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier. (2007).

Per Martin-Löf. *The Hilbert-Brouwer controversy resolved ?* dans : One hundred years of intuitionism (1907-2007), (Cerisy), (Mark Van Atten & al., editors) Publications des Archives Henri Poincaré, Birkhäuser Basel, (2008), pp. 243–256.

Lombardi H. *Épistémologie mathématique*, Ellipse. (2011).

Lombardi H., Quitté C. *Algèbre Commutative, Méthodes Constructives.* Calvage & Mounet, (2011).

Díaz-Toca G., Lombardi H., Quitté C. *Modules sur les anneaux commutatifs.* Calvage & Mounet, (2014).

**Passons au tableau noir
pour un exemple
de décryptage**