Le programme de Hilbert en algèbre commutative

Conférence en l'honneur de Jean-Luc Chabert

Amiens 13 décembre 2012

H. Lombardi, Besançon

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Pour imprimer ces transparents :

http://hlombardi.free.fr/publis/Chabert2012Doc.pdf

Pour plus de détails :

http://hlombardi.free.fr/publis/Plaidoyer.pdf

L'invention de la droite réelle par Cantor et Dedekind

Il s'agit d'un coup de force étonnant.

Que sont et que doivent être les nombres réels ?, dit Dedekind.

Dedekind prétend être le premier à démontrer $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$

Pourtant Archimède savait le démontrer.

Alors qu'est-ce qui a changé ?

L'invention de la droite réelle, suite

L'autorisation d'utiliser librement les « infinis actuels » permet à Dedekind et Cantor de définir un nombre réel en toute généralité.

On voit que la définition de Dedekind utilise l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ et celle de Cantor $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Ce n'est plus la géométrie qui justifie intuitivement l'analyse, c'est l'analyse qui justifie la géométrie (via le calcul sur les coordonnées).

Et l'analyse semble avoir été réduite à l'arithmétique grâce à l'autorisation donnée aux ensembles infinis

L'appréciation de Poincaré

La Science et l'Hypothèse. Chapitre II.
La grandeur mathématique et l'expérience.

Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais *extérieurs* les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur. Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.

Les paradoxes : des infinis trop grands !

L'univers mathématique de Cantor est trop grand pour être lui-même un ensemble (le cardinal de l'univers est plus grand que tous les autres, mais tout cardinal c est strictement plus petit que le cardinal de $\mathcal{P}(c)$.

Cantor pensait pouvoir définir un ensemble simplement en disant quelle propriété satisfont ses éléments.

Borel, Lebesgue, Brouwer, Poincaré, Hermann Weyl refuseront de considérer que les ensembles à la Cantor puissent être un fondement fiable pour les mathématiques.

Pour eux, même $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas acceptables.

Poincaré sur le cantorisme

J'ai parlé plus haut du besoin que nous avons de remonter sans cesse aux premiers principes de notre science et du profit qu'en peut tirer l'étude de l'esprit humain. C'est ce besoin qui a inspiré deux tentatives qui ont tenu une très grande place dans l'histoire la plus récente des mathématiques. La première est le cantorisme, qui a rendu à la science les services que l'on sait. Cantor a introduit dans la science une manière nouvelle de considérer l'infini mathématique ....

Un des traits caractéristiques du cantorisme, c'est qu'au lieu de s'élever au général en bâtissant des constructions de plus en plus compliquées et de définir **par construction**, il part du **genus supremum** et ne définit, comme auraient dit les scolastiques, que per **genus proximum et differentiam specificam**.

Poincaré sur le cantorisme, suite

De là l'horreur qu'il a quelquefois inspirée à certains esprits, à Hermite par exemple, dont l'idée favorite était de comparer les sciences mathématiques aux sciences naturelles.

Chez la plupart d'entre nous ces préventions s'étaient dissipées, mais il est arrivé qu'on s'est heurté à certains paradoxes, à certaines contradictions apparentes, qui auraient comblé de joie Zénon d'Élée et l'école de Mégare. Et alors chacun de chercher le remède . . .

Quel que soit le remède adopté, nous pouvons nous promettre la joie du médecin appelé à suivre un beau cas pathologique.

in : l'avenir des mathématiques, 1908

Poincaré et les axiomes de Zermelo

M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait montrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes.
Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? on a pris des axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement.
A mon sens d'ailleurs [...] aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par définition.

in : la logique de l'infini, 1909

Le programme de Poincaré

Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :

1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;

2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;

3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.

in : la logique de l'infini, 1909

Le programme de Hilbert

Hilbert tient les critiques de Brouwer et Poincaré pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or, dit-il, les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans l'enfer de Brouwer.

Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu a un sens ou si elle n'en a pas ; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux.

C'est exactement la même attitude que vis à vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste.

Le programme de Hilbert, suite

Autrement dit, si l'on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler, on serait pleinement satisfaits.

A défaut de pouvoir élucider **la sémantique** des ensembles infinis, essayons au moins de comprendre **leur syntaxe** : comprendre ce que l'on fait exactement quand on les utilise en mathématiques.

Cette position de repli peut sembler effarante, car elle consiste à arithmétiser les mathématiques d'une façon radicale : l'étude d'une théorie formelle, n'est rien d'autre que l'étude d'une unique fonction primitive récursive de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: celle qui énumère les numéros des théorèmes de la théorie.

L'échec du programme de Hilbert

Les théorèmes d'incomplétude de Gödel

1) Aucune théorie formelle ne peut décrire complètement le plus simple des infinis : $\mathbb{N}$.

2) Pour démontrer qu'une théorie formelle suffisamment expressive est consistante, on a besoin de méthodes de démonstration plus puissantes que celles codifiées dans la théorie formelle.

Les vertus du programme de Hilbert

1) Un nouveau domaine des mathématiques : la logique mathématique

2) Cela conduit par exemple à une clarification décisive, due à Brouwer et Heyting : la distinction nette entre la logique des mathématiques constructives (la logique intuitionniste) et la logique classique, qui accepte une idée de vérité absolue a priori : toute propriété sensée est vraie ou fausse dans l'absolu (principe du tiers exclu).

3) La volonté de trouver une façon convaincante de justifier les idéalités cantoriennes.

L'analyse constructive à la Bishop

Dans **Foundations of Constructive Analysis** (1967), Errett Bishop développe une version constructive de la théorie des ensembles, avec laquelle il réalise un nouveau type de programme de Hilbert.

Il démontre dans un cadre entièrement constructif l'essentiel des théorèmes qui fondent l'analyse réelle et complexe (ce que l'on enseigne aujourd'hui jusqu'au Master).

Il s'agit d'un **cadre mathématique minimaliste** parce que les démonstrations sont acceptables aussi bien par un mathématicien classique que par toutes les variantes des mathématiques constructives.

En algèbre : Mines R., Richman F., Ruitenburg W. **A Course in Constructive Algebra.** Universitext. Springer-Verlag, (1988).

Le nouveau programme de Hilbert

D'une certaine manière, il s'agit de réaliser le programme de Poincaré (tout ramener au fini) mais en tenant compte des progrès réalisés au moyen des méthodes abstraites héritières de Cantor et Hilbert.

Tout en continuant le travail déjà accompli par Bishop, Brouwer, Richman et bien d'autres, nous pensons disposer d'une méthode assez générale de décryptage des démonstrations abstraites lorsqu'elles aboutissent à des résultats de nature concrète.

A logical approach to abstract algebra. Coquand T., Lombardi H. (survey) Math. Struct. in Comput. Science **16** (2006), 885–900.

Algèbre Commutative, Méthodes Constructives. Lombardi H., Quitté C. Calvage & Mounet, (2011).

Le nouveau programme de Hilbert, suite

L'idée générale est que le **programme de Hilbert pour l'algèbre abstraite** est tout à fait réalisable, selon les lignes qui suivent.

Les objets idéaux de l'algèbre abstraite, inaccessibles d'un point de vue constructif, doivent être remplacés par des spécifications incomplètes de ces mêmes objets.

Les démonstrations abstraites concernant les objets idéaux peuvent alors être relues comme des démonstrations concrètes concernant leurs spécifications incomplètes.

Le nouveau programme de Hilbert, suite

Par exemple plutôt que considérer le spectre de Zariski d'un anneau, on considère le treillis de ses ouverts quasi-compacts, qui est un objet "concret" car il s'identifie à l'ensemble des radicaux d'idéaux de type fini.
Notons $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(I) = \sqrt[\mathbf{A}]{I}$ le radical de l'idéal I dans l'anneau $\mathbf{A}$.
Les idéaux $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(I)$ pour les I de type fini forment ce que l'on appelle le **treillis de Zariski de l'anneau $\mathbf{A}$**. C'est un treillis distributif dont l'espace dual est le fameux **spectre de Zariski** $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$ (qui hante les mathématiques classiques).

Pour le moment, la possibilité de réaliser le programme de Hilbert en algèbre selon ces lignes est **un fait purement expérimental**, mais qui reçoit régulièrement de nouvelles confirmations.

La théorie de Galois dynamique

Le système de calcul formel D5 a montré comment on peut calculer dans la cloture algébrique d'un corps dès que l'on sait calculer dans le corps, grâce à la méthode de l'évaluation dynamique (dite encore : évaluation paresseuse).

Ceci bien que le corps des racines d'un polynôme ne puisse pas être construit en tant qu'objet mathématique statique usuel.

Cette découverte est à la base des nouvelles méthodes mises en œuvre pour le décryptage constructif de l'algèbre classique abstraite.

En particulier elle a permis de développer une version constructive dynamique de la théorie de Galois (auparavant, on avait besoin d'avoir des algorithmes de factorisation des polynômes pour mener à bien la version constructive de la théorie classique). Voir le chapitre VII de [ACMC].

La dimension de Krull

Il est connu, mais peu utilisé, qu'un anneau $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel si et seulement si

pour tout $a \in \mathbf{A}$ il existe x tel que $a(1 - ax)$ est nilpotent.

Il est connu, mais peu utilisé, qu'un anneau intègre $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\leqslant 1$ si et seulement si

pour tout $a \neq 0$, $\mathbf{A}/\langle a \rangle$ est zéro-dimensionnel.

Possibilité d'une définition par récurrence en initialisant à la dimension -1. Un anneau commutatif est de dimension de Krull -1 si, et seulement si, il est trivial.

Nous notons $I_x = x\mathbf{A} + (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) : x)$.

La dimension de Krull, 2

Théorème pour la dimension de Krull

Soit ℓ un entier $\geqslant 0$ et $\mathbf{A}$ un anneau commutatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La dimension de Krull de $\mathbf{A}$ est $\leqslant \ell$*
2. *Pour tous $x_0, \ldots, x_\ell \in \mathbf{A}$ il existe $b_0, \ldots, b_\ell \in \mathbf{A}$ tels que*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0 x_0) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 x_1) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0, x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_\ell x_\ell) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_\ell, x_\ell) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

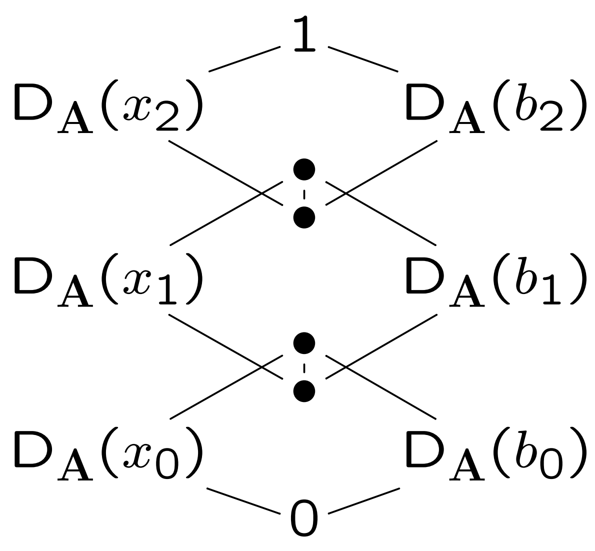
3. *Pour tous $x_0, \ldots, x_\ell \in \mathbf{A}$ il existe $a_0, \ldots, a_\ell \in \mathbf{A}$ et $m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tels que*

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0$$

4. *Pour tout $x \in \mathbf{A}$ l'anneau quotient $\mathbf{A}/I_x$ est de dimension de Krull $\leqslant \ell - 1$.*

La dimension de Krull, 3

Par exemple, pour la dimension $\leqslant 2$, le point *2.* correspond au dessin suivant dans le treillis de Zariski de $\mathbf{A}$.
Notez que $\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(xy) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(x) \vee \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(y)$ et $\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(x, y) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(x) \wedge \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(y)$.



La dimension de Krull, 4

Dans les trois transparents qui suivent, nous donnons des théorèmes non nœthériens dus à Heitmann (1984). Grâce à notre définition constructive de la dimension de Krull, nous avons pu en donner des preuves constructives qui permettent de réaliser ces théorèmes au moyen d'algorithmes explicites.

La dimension de Krull, Kronecker

Théorème de Kronecker-Heitmann, avec la dimension de Krull, non nœthérien

1. *Soit* $n \geqslant 0$. *Si* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* b_1, ..., $b_n \in \mathbf{A}$, *il existe* x_1, ..., x_n *tels que pour tout* $a \in \mathbf{A}$, $\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \ldots, b_n) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \ldots, b_n + ax_n)$.
2. *En conséquence, dans un anneau de dimension de Krull* $\leqslant n$, *tout idéal de type fini a même nilradical qu'un idéal engendré par au plus* $n+1$ *éléments.*

La dimension de Krull, Splitting off

Nous disons qu'une matrice F est **de rang $\geqslant k$** lorsque l'idéal $\mathcal{D}_k(F)$ engendré par ses mineurs d'ordre k est égal à $\langle 1 \rangle$.

Théorème splitting off de Serre, version non nœthérienne avec la dimension de Krull

Soit $k \geqslant 1$ et M un $\mathbf{A}$-module projectif de rang $\geqslant k$, (resp. isomorphe à l'image d'une matrice de rang $\geqslant k$).

Supposons que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < k$. *Alors $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$ pour un certain module N projectif de rang $\geqslant k-1$ (resp. isomorphe à l'image d'une matrice de rang $\geqslant k-1$).*

La dimension de Krull
Théorème de Forster

Nous disons qu'un module de type fini, engendré par le système générateur $(y_1, \dots, y_{\ell+t})$ est **localement engendré par ℓ éléments** s'il existe une matrice de relations de rang $\geqslant t$ pour ce système générateur.

Théorème de Forster, version non nœthérienne avec la dimension de Krull

Soit $k \geqslant 0$ et $r \geqslant 1$. Si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$*, et si un $\mathbf{A}$-module de type fini M est localement engendré par r éléments, alors il est engendré par $k + r$ éléments.*

Plus précisément, si M est engendré par y_1, ..., y_{k+r+s}, on peut calculer z_1, ..., z_{k+r} dans $\left\langle y_{k+r+1}, \dots, y_{k+r+s} \right\rangle$ tels que M soit engendré par $y_1 + z_1$, ..., $y_{k+r} + z_{k+r}$.

La dimension du spectre maximal

Les théorèmes précédents, établis originellement dans le cas nœthérien avec la dimension de Krull, ont été généralisés par Swan (dans le cas nœthérien) avec la dimension du spectre maximal.

En ce qui concerne la dimension du spectre maximal, Heitmann a remarqué en 1984 que celle-ci intervenait dans la littérature uniquement dans le cas nœthérien. Il a proposé de la remplacer, dans le cas général, par la dimension de l'espace spectral suivant : $\mathsf{Jspec}(\mathbf{A})$ **est le plus petit sous-espace spectral de** $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$ **contenant le spectre maximal**, autrement dit l'adhérence du spectre maximal, pour la topologie constructible, dans $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$, munie de la topologie induite par $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$. On note $\mathsf{Jdim}(\mathbf{A})$ la dimension de l'espace spectral défini par Heitmann.

Lorsque l'anneau est nœthérien le spectre maximal est un espace spectral et coïncide avec $\mathsf{Jspec}(\mathbf{A})$.

La dimension de $\mathsf{Jspec}(\mathbf{A})$

De même que la dimension de Krull est la dimension du treillis distributif formé par les radicaux d'idéaux de type fini, on peut démontrer que la Jdim est la dimension du treillis distributif formé par les radicaux de Jacobson d'idéaux de type fini.

En mathématiques classiques, le radical de Jacobson $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(I)$ d'un idéal I est défini comme l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent I.
Une définition constructivement acceptable est

$$\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(I) := \{x \in \mathbf{A} \mid \forall y \in \mathbf{A},\ 1 + xy \in (\mathbf{A}/I)^{\times}\}.$$

Le radical de Jacobson de $\mathbf{A}$ est l'idéal $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$.
Ceci permet de donner une définition constructivement acceptable de la Jdim. C'est la dimension du treillis distributif formé par les $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(I)$ pour les I de type fini.

La dimension de Heitman

Heitmann a réussi à généraliser pour la Jdim, dans le cadre non nœthérien, certains théorèmes établis avec la Kdim.

C'est seulement T. Coquand (avec l'aide de L.H. et Q.C.) qui a réussi à généraliser les théorèmes de Serre et Forster pour la Jdim. Pour cela il a été nécessaire d'inventer une nouvelle dimension.

Définition. *On définit* $\mathsf{Hdim}(\mathbf{A})$ *par récurrence comme suit.*

– $\mathsf{Hdim}(\mathbf{A}) = -1$ *si et seulement si* $\mathbf{A}$ *est trivial.*

– *Pour* $\ell \geqslant 0$, $\mathsf{Hdim}(\mathbf{A}) \leqslant \ell$ *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbf{A}$, $\mathsf{Hdim}(\mathbf{A}/J_x) \leqslant \ell - 1$ *où* $J_x = \langle x \rangle + (\mathsf{J}_{\mathbf{A}}(0) : x)$
(on a $(\mathsf{J}_{\mathbf{A}}(0) : x) = \{\, y \in \mathbf{A} \,|\, \forall z \in \mathbf{A},\ 1 + xyz$ *est inversible*$\}$*.*

Le théorème de Quillen-Suslin

Ce théorème, parfois appelé **conjecture de Serre** affirme qu'un module projectif de type fini sur un anneau de polynômes à coefficients dans un **corps** est libre.

De manière équivalente et plus terre à terre, toute matrice idempotente d'ordre n (sur un tel anneau) est semblable à une matrice de projection canonique $\mathrm{I}_{k,n}$ pour un certain k.

$$\mathrm{I}_{k,n} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathrm{I}_k & 0_{k,p} \\ \hline 0_{p,k} & 0_{p,p} \\ \hline \end{array} \qquad (p + k = n).$$

Le théorème de Quillen-Suslin

La démonstration de Quillen étend le résultat au cas d'un **anneau principal**.

Plus tard, le résultat a été étendu aux **anneaux de Bezout intègres de dimension** $\leqslant 1$ (Brewer&Costa, Maroscia).

Enfin le résultat a été étendu à **tous les anneaux de Bezout intègres** (théorèmes de Bass pour $\mathbf{V}[X]$ lorsque $\mathbf{V}$ est un anneau de valuation de dimension de Krull finie, puis de Lequain-Simis).

Le théorème de Quillen-Suslin, 2

Des algorithmes pour le théorème de Quillen-Suslin sont parus dans la littérature du Calcul Formel pour le cas des corps, voire pour le cas des anneaux principaux. Ils sont en général basés sur la démonstration de Suslin.

Ces algorithmes utilisent des bases de Gröbner et fonctionnent grâce à la nœtherianité.

Nos méthodes de décryptage nous ont permis au contraire de donner des preuves constructives (et donc des algorithmes) pour toutes les versions, sans jamais utiliser d'hypothèse de type nœthérien. Pour cela il a fallu décrypter l'induction de Quillen et l'induction de Lequain-Simis.

Le Quillen patching

Théorème de recollement de Vaserstein, version constructive
Soit G une matrice sur $\mathbf{A}[X]$ et S_1, ..., S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Les matrices $G(X)$ et $G(0)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[X]$ si et seulement si elles sont équivalentes sur $\mathbf{A}_{S_i}[X]$ pour chaque i.

Théorème de recollement de Quillen, version constructive
Soit M un module de présentation finie sur $\mathbf{A}[X]$ et S_1, ..., S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Alors, M est un module étendu depuis $\mathbf{A}$ si et seulement si chaque M_{S_i} est étendu depuis $\mathbf{A}_{S_i}$.

La méthode locale-globale constructive

Ces versions constructives, dans lesquelles la **localisation en un système de monoïdes comaximaux** (ou d'éléments comaximaux) **remplace** la **localisation en tous les idéaux premiers**, est une illustration de la méthode dite locale-globale constructive.

En fait la version constructive remplace plutôt la localisation **au voisinage de tous les idéaux premiers** (rarement évoquée mais plus pertinente).

Non seulement la localisation en un système d'éléments comaximaux marche mieux que la localisation en tous les idéaux premiers, mais surtout, c'est la version qui permet de passer des schémas affines aux schémas généraux dans la théorie de Grothendieck.

Les résolutions libres finies

La théorie des résolutions libres finies est une théorie qui étudie les suites exactes de matrices :

$$\boxed{L_\bullet : \quad 0 \to L_m \xrightarrow{A_m} L_{m-1} \xrightarrow{A_{m-1}} \cdots\cdots \xrightarrow{A_2} L_1 \xrightarrow{A_1} L_0, \quad L_k = \mathbf{A}^{p_k}.}$$

Ici, A_k est une matrice $\in \mathbb{M}_{p_{k-1},p_k}(\mathbf{A})$. On a $\mathrm{Im}(A_k) = \mathrm{Ker}(A_{k-1})$ pour $k = m, \ldots, 1$.
On est intéressé par les propriétés des matrices A_k ainsi que par la structure du $\mathbf{A}$-module $M = \mathrm{Coker}(A_1) = L_0/\,\mathrm{Im}(A_1)$ (la suite exacte ci-dessus constitue une résolution libre finie de ce module).

Un très bon livre de référence sur le sujet est le livre de Northcott **Finite Free Resolutions**. Il reste néanmoins dans cet ouvrage de nombreuses démonstrations très abstraites et non constructives.

Les résolutions libres finies, 2

Comme le sujet en lui-même est basé sur des objets tout à fait concrets, on pouvait s'attendre à ce qu'une version constructive convenable de la théorie puisse être écrite sans trop s'écarter du texte original de Northcott.

Les outils nécessaires (notamment des définitions constructivement acceptables pour les concepts essentiels de la théorie) ont été mis au point et utilisés pour démontrer tous les théorèmes essentiels du livre de Northcott dans l'article suivant :
Constructive finite free resolutions.
Coquand T., Quitté C. Manuscripta Math., **137**, (2012), 331–345.
On peut consulter une synthése en
`http://hlombardi.free.fr/publis/ACMC-FFR`.

L'anneau des polynômes à valeurs entières

La méthode locale-globale constructive peut être utilisée pour donner une version algorithmique du théorème qui affirme que l'anneau des polynômes à valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ est un anneau de Prüfer.

Autrement dit, en décryptant la démonstration classique, qui utilise le fait que la localisation en un idéal maximal est toujours un anneau de valuation, on est capable de produire un algorithme pour inverser un idéal $\langle f, g \rangle$ arbitraire de l'anneau.

On peut consulter à ce sujet
`http://hlombardi.free.fr/publis/PruferPVE`.

Merci de votre attention