Table des matières

Compléments

du livre

Algébre commutative Méthodes constructives

Modules projectifs de type fini

2e édition 2021

Henri Lombardi, Claude Quitté.

Calvage&Mounet. 2011

Errata

Compléments de cours,
exercices, problèmes et solutions supplémentaires
Commentaires

Dernière mise à jour, 4 avril 2023

La dernière version de ce fichier se trouve dans `http://hlombardi.free.fr/publis/ComplementsACMC2.pdf`
et au format booklet dans
`http://hlombardi.free.fr/publis/ComplementsACMC2-Booklet.pdf`
Nous remercions toutes les lectrices et lecteurs qui voudront bien nous signaler des erreurs de toutes sortes, des démonstrations élégantes, ou des solutions d'exercices ou problèmes, ce qui nous aidera à enrichir ces compléments.

L'orthographe utilisée ici, contrairement à celle de l'édition papier, est celle de l'orthographe nouvelle recommandée.

Ce texte commence par les errata que nous avons repérés.

Il se poursuit page 5 avec des compléments proprement dits, chapitre par chapitre.

La table des matières se trouve à la fin.

Table des matières

Errata **1**
Chapitre II. Principe local-global de base et systèmes linéaires . . . 1
Chapitre VI. Algèbres de type fini 1
Chapitre XI. Treillis distributifs, groupes réticulés 2
Chapitre XIII. Dimension de Krull 3
Chapitre XV. Le principe local-global 3

Compléments, exercices, problèmes **5**

Chapitre II. Principe local-global de base et systèmes linéaires
Compléments du cours 7
Problèmes 7

Chapitre IV. Modules de présentation finie
Compléments du cours 11

Chapitre VI. Algèbres de type fini
Exercices 13
Solutions 14

Chapitre X. Modules projectifs de type fini (2)
Problèmes 17

Chapitre XI. Treillis distributifs, groupes réticulés
Compléments du cours 19

Chapitre XIV. Nombre de générateurs d'un module
Compléments du cours 21
6 Quelques résultats concernant $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A})$ et $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ 21

Chapitre XV. Le principe local-global
Compléments du cours 23

On a pour chaque i un $g_i \in \langle f, r\rangle$ unitaire dans $\mathbf{A}_{S_i}$, cela signifie que l'on a un $s_i \in S_i$ tel que, dans $\mathbf{A}[X]$

$$s_i g_i = s_i X^{m_i} + h_i \text{ avec } \deg h_i < m_i, \text{ et } s_i g_i \in \langle f, r\rangle\,.$$

Si m majore tous les m_i et si $\sum a_i s_i = 1$ le polynôme recherché est $g = \sum_i a_i X^{m-m_i} g_i$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{S}(0;1) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\mathcal{S}(0;a) & & & \mathcal{S}(a;1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a^{\mathbb{N}} & \mathcal{S}(a;b) & & & \mathcal{S}(a,b;1) \arrow[dl] \arrow[dr] \\
 & b^{\mathbb{N}} + \langle a\rangle & & \mathcal{S}(a,b;c) & & \mathcal{S}(a,b,c;1) \\
 & & & c^{\mathbb{N}} + \langle a,b\rangle & & 1 + \langle a,b,c\rangle
\end{tikzcd}$$

Les anneaux aux feuilles de l'arbre sont les localisés de $\mathbf{A}$ respectivement en $S_1 = a^{\mathbb{N}}$, $S_2 = b^{\mathbb{N}} + \langle a\rangle$, $S_3 = c^{\mathbb{N}} + \langle a,b\rangle$, $S_4 = 1 + \langle a,b,c\rangle$. $\square$

ERRATA

Chapitre II
Principe local-global de base et systèmes linéaires

Erreur rectifiée ici dans la formule située dans la phrase suivante entre les faits 1.2 et 1.3

Rappelons aussi que *l'annulateur* d'un élément x d'un $\mathbf{A}$-module M est l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x) = (\langle 0_M\rangle : \langle x\rangle) = \{\, a \in \mathbf{A} \mid ax = 0 \,\}$.

Chapitre VI
Algèbres de type fini

Lemme 1.10 Dans la démonstration du lemme 1.10 on doit remplacer W par X dans l'équation suivante

$$\textstyle\prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \big(X - \sigma(g_r)\big) = Q_{n,k,r}^{n!/\ell}.$$

Chapitre XI
Treillis distributifs, groupes réticulés

Après le fait 4.2 il y a la phrase suivante

En mathématiques classiques $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n)$ peut être vu comme un quasi-compact de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$: l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ tels que l'un au moins des x_i n'appartienne pas à $\mathfrak{p}$.

mais il faut lire

En mathématiques classiques $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n)$ peut être vu comme un ouvert quasi-compact de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$: l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ tels que l'un au moins des x_i n'appartienne pas à $\mathfrak{p}$.

Fait 4.5 On modifie très légèrement l'énoncé, certaines notations n'étaient pas cohérentes.

4.5. Fait. *Soient $a \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$.*

1. *L'homomorphisme $\mathsf{Zar}\,\pi : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\langle a\rangle)$, où $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\langle a\rangle$ est la projection canonique, est surjectif, et il permet d'identifier $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\langle a\rangle)$ au treillis quotient $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)=0)$. Plus généralement, $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ s'identifie à $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})=0)$.*
2. *L'homomorphisme $\mathsf{Zar}\,j : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}(\mathbf{A}[1/a])$, où $j : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/a]$ est l'homomorphisme canonique, est surjectif et il permet d'identifier $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}[1/a])$ au treillis quotient $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)=1)$.*
3. *Pour un monoïde S de $\mathbf{A}$ on a un isomorphisme naturel*
$$\mathsf{Zar}(\mathbf{A}_S/\mathfrak{a}\mathbf{A}_S) \simeq \mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})=0, \mathfrak{f}=1)\,,$$
où $\mathfrak{f}$ est le filtre de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ engendré par les $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(s)$ pour $s \in S$.

Chapitre XV
Le principe local-global

Compléments du cours

On améliore un chouia la preuve du lemme 5.1

5.1. Lemme. *Soit $f \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme primitif et $r \in \mathbf{A}$ un élément régulier avec $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$. Alors l'idéal $\langle f, r\rangle$ contient un polynôme unitaire.*

D On commence par démontrer le lemme dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret. On peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in (\mathrm{Rad}\,\mathbf{A})[X]$ et f_2 pseudo unitaire. Par ailleurs, pour tout $e \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ on a une égalité dans $\mathbf{A}$ du type $r^m(e^m(1+ye)+zr)=0$, donc r divise e^m. Par suite r divise une puissance de f_1, disons d'exposant N. On a
$$f_2{}^N = (f-f_1)^N \in \langle f, f_1^N\rangle \subseteq \langle f, r\rangle\,.$$
Alors, f_2^N fournit le polynôme unitaire cherché.

Pour un anneau arbitraire on reprend la démonstration précédente de manière dynamique. On note que l'élément r régulier dans $\mathbf{A}$ reste régulier dans tout localisé de $\mathbf{A}$. Traitons l'exemple $f = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On explicite le raisonnement précédent sous la forme suivante.

Ou bien a est inversible, ou bien il est dans le radical. Si a est inversible, on prend $f_2 = f$, $f_1 = 0$.

Sinon, a est dans le radical, et ou bien b est inversible, ou bien il est dans le radical. Si b est inversible, on prend $f_2 = bX^2 + cX + d$, $f_1 = aX^3$.

Sinon, a, b sont dans le radical, et ou bien c est inversible, ou bien il est dans le radical. Si c est inversible, on prend $f_2 = cX + d$, $f_1 = aX^3 + bX^2$.

Sinon puisque $\langle 1\rangle = \langle a,b,c,d\rangle$ et que a,b,c sont dans le radical, d est inversible, on prend $f_2 = d$, $f_1 = aX^3 + bX^2 + c$.

Voir plus loin le dessin de l'arbre des localisations successives. Les monoïdes comaximaux se trouvent aux feuilles de l'arbre.

La preuve donnée en mathématiques classiques pour un anneau local résiduellement discret fonctionne pour l'anneau localisé à chacune des feuilles de l'arbre. Notez que certains localisés peuvent être triviaux, mais cela n'affecte pas la démonstration.

Terminons en indiquant comment on construit un polynôme unitaire dans l'idéal $\langle f, r\rangle$ de $\mathbf{A}[X]$ à partir de polynômes unitaires g_i dans les idéaux $\langle f, r\rangle$ de $\mathbf{A}_{S_i}$ lorsque les S_i sont des monoïdes comaximaux.

On note r pour $[\mathbf{A}^r]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ Par hypothèse $(r+\eta)^n = r^n$. On traite le cas $n = 3$, et cela suffira bien. On a $\eta(3r^2 + 3r\eta + \eta^2) = 0 = \eta(3r^2 - \mu)$ avec μ nilpotent. Formellement $(1 - \mu/3r^2)$ est inversible parce que μ est nilpotent. En chassant les dénominateurs, $(3r^2 - \mu)$ divise $(3r^2)^k =: m$ si $\mu^k = 0$. Donc $m\eta = 0$ et $m[P] = mr$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$. Et on conclut avec le point *2* que $P^{md} \simeq \mathbf{A}^{mrd}$. □

6.2. Proposition. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau arbitraire.*

1. *L'idéal* $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A})$ *est le nilradical de* $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.
2. *Si* $[P] = [Q]$ *dans* $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ *il existe* $N > 0$ *tel que* $P^N \simeq Q^N$.
3. *Si* $\alpha \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ *et* $\mathrm{rg}(a) \geqslant 1$, *il existe un* $N > 0$ *et un module projectif de type fini* Q *tels que* $N\alpha = [Q]$ *dans* $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.
4. *Soit* P *un module projectif de type fini. Si* $P^{\otimes n}$ *est libre il existe* $N > 0$ *tel que* P^N *est libre.*

D Lorsque l'on a des modules projectifs de type fini dans un énoncé, ils sont donnés (de manière directe ou indirecte) par des matrices de projection, ils existent donc sur un sous-anneau $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ de dimension finie (le sous-anneau engendré par les entrées des matrices). Dans les énoncés ci-dessus si une égalité a lieu dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{B})$ ou dans $\mathsf{GK}_0(\mathbf{B})$, alors elle a lieu dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ ou dans $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A})$. On est donc ramené à la proposition 6.1 avec une dimension majorée de manière explicite. □

6.3. *Remarque.* Un isomorphisme sur $\mathbf{A}$ de deux modules projectifs de type fini a-t-il automatiquement lieu sur $\mathbf{B}$? Ce sont des modules de présentation finie, et l'on a un isomorphisme exactement lorsque deux matrices formées à partir des matrices de présentation sont élémentairement équivalentes (lemme IV-1.1). Mais les manipulations élémentaires sur $\mathbf{A}$ qui interviennent ici ne sont pas forcément définies sur $\mathbf{B}$. ■

Chapitre XIII
Dimension de Krull

Au début de la section 2 remplacer «croissantes» par «décroissantes» :

Puisque le complémentaire d'un idéal premier est un filtre premier, la dimension de Krull est aussi le maximum des longueurs des chaines strictement décroissantes de filtres premiers.

Chapitre XV
Le principe local-global

Après le théorème de MacCoy XV-8.7 la remarque contient la phrase suivante (ici rectifiée)

Donc si $m < n$ on obtient «à l'initialisation» une application injective de $\mathbf{A}^{n-m}$ dans $\mathbf{A}^0$, ce qui implique $1 = 0$ dans $\mathbf{A}$.

Chapitre XIV
Nombre de générateurs d'un module
Compléments du cours

On ajoute une section 6.

6. Quelques résultats concernant $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A})$ et $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$

6.1. Proposition. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau de dimension de Krull $< d$.*

1. *L'idéal $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A})$ est le nilradical de $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.*
2. *Si $[P] = [Q]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$, alors $P^d \simeq Q^d$.*
3. *Si $\alpha \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ et $\mathrm{rg}(\alpha) \geqslant 1$, il existe un module projectif de type fini Q tel que $d\alpha = [Q]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$*
4. *Soit P un module projectif de type fini. Si $P^{\otimes n}$ est libre il existe $N > 0$ entier tel que P^N est libre.*

Remarque préliminaire. Tout module projectif de type fini P a un rang de la forme $1[e_1] + 2[e_2] + \cdots$. avec des idempotents e_i dans $\mathbf{A}$ deux à deux orthogonaux. Ces idempotents sont calculés à partir d'une matrice de projection dont l'image est isomorphe à P. On a alors $P = e_1P \oplus e_2P \oplus \cdots$. Si $[P] = [Q]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ leurs rangs sont égaux, donc ils définissent les mêmes idempotents e_i. Si $P \simeq Q$ on a $e_iP \simeq e_iQ$ pour chaque i. Si $[P] = [Q]$ on a $[e_iP] = [e_iQ]$ pour chaque i. Cette remarque permet de considérer dans la plupart des problèmes uniquement des modules projectifs de type fini de rang constant entier connu.

D *1.* C'est la proposition X-5.5 (plus générale).

2. On peut supposer que les modules sont de rang constant entier connu. Si le rang est nul les modules sont nuls et tout va bien. On suppose désormais le rang > 0. Par définition, on a un module projectif de type fini R tel que $P \oplus R \simeq Q \oplus R$. On a alors $P^d \oplus R^d \simeq Q^d \oplus R^d$ Comme $\mathrm{rg}(P^d) \geqslant d$, le théorème de simplification de Bass nous dit que $P^d \simeq Q^d$.

3. On peut écrire $\alpha = [P] - [\mathbf{A}^r]$ pour un entier r, et alors $\mathrm{rg}(P) \geqslant r+1$. On a alors $d\alpha = [P^d] - [\mathbf{A}^{rd}]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$, c'est-à-dire encore $d\alpha + [\mathbf{A}^{rd}] = [P^d]$ avec $\mathrm{rg}(P^d) \geqslant dr + d$. Le Splitting Off de Serre nous dit que $P^d \simeq P_1 \oplus \mathbf{A}^{rd}$ pour un module projectif de type fini P_1. D'où $d\alpha = [P_1]$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.

4. Si le rang est nul tout est OK. On suppose $\mathrm{rg}(P) = r \geqslant 1$. On définit η par $[P] = [\mathbf{A}^r] + \eta$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$, de sorte que η est nilpotent d'après le point *1.*

COMPLÉMENTS, EXERCICES ET PROBLÈMES

chapitre par chapitre

Chapitre XI

Treillis distributifs, groupes réticulés

Compléments du cours

Dans la section XI-4, avant le fait 4.3, on ajoute la notation suivante avec un petit commentaire

Plus généralement, les idéaux de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ correspondent bijectivement aux idéaux radicaux (i.e, égaux à leur nilradical) de $\mathbf{A}$ via :

$$\mathfrak{a}\,(\text{idéal de } \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}) \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) := \{\, x \in \mathbf{A} \mid \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x) \in \mathfrak{a} \,\}$$

Pour plus de détails sur le spectre de Zariski voir la section XIII-1.

Chapitre II

Principe local-global de base et systèmes linéaires

Compléments du cours

Dans la section II-5, après le proposition 5.2, on ajoute la remarque suivante

Remarque. Le fait que le rang d'un module libre sur un anneau non nul est bien défini n'est pas si évident. À titre d'illustration, on présente ici un anneau *non commutatif* $\mathbf{C}$ et deux matrices $F \in \mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ et $G \in \mathbb{M}_{1,2}(\mathbf{C})$ telles que $FG = \mathrm{I}_2$ et $GF = \mathrm{I}_1$. Cela signifie que les modules libres $\mathbf{C}^2$ et $\mathbf{C}^1$ sont isomorphes (on peut les considérer soit tous deux comme des modules à droite, soit tous deux comme des modules à gauche).
L'anneau $\mathbf{C}$ est l'anneau des endomorphismes du groupe additif $\mathbf{B}[X]$, où $\mathbf{B}$ est un anneau non nul. Tout élément f de $\mathbf{B}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f_1(X^2) + Xf_2(X^2)$, avec $f_1,\ f_2 \in \mathbf{B}[X]$.
On considère les éléments π_1, π_2, ι_1, ι_2 de l'anneau $\mathbf{C}$ définis comme suit :

$$\pi_1(f) = f_1,\ \pi_2(f) = f_2,\ \iota_1(g) = g(X^2),\ \iota_2(g) = Xg(X^2).$$

Un calcul facile donne alors les égalités

$$\begin{bmatrix} \iota_1 & \iota_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \iota_1 & \iota_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{\mathbf{C}} & 0 \\ 0 & 1_{\mathbf{C}} \end{bmatrix}.$$

■

Problèmes

Problème 3. *(La* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$*)*
Le *centre* d'un anneau $\mathbf{A}$ non nécessairement commutatif, est le sous-anneau, noté $\mathrm{Z}(\mathbf{A})$, formé par les éléments qui commutent avec tout élément de $\mathbf{A}$.
Un anneau non nécessairement commutatif $\mathbf{A}$ est appelé un *anneau simple* s'il est discret (il possède un test à zéro) et si pour tout élément non nul u on peut trouver un nombre fini d'éléments a_k et c_k tels que $\sum_k a_k u c_k = 1$. Notons qu'un anneau commutatif simple est un corps discret.

0. Pour un anneau arbitraire $\mathbf{k}$, on note $\mathrm{e}_{i,j}^{n,\mathbf{k}}$ (ou $\mathrm{e}_{i,j}$ si le contexte est clair) la matrice dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ dont le seul coefficient non nul est en position (i,j) et égal à $1_{\mathbf{k}}$. Ainsi $\mathrm{E}_{i,j}(1) = \mathrm{I}_n + \mathrm{e}_{i,j}$ si $i \neq j$. Les $\mathrm{e}_{i,j}$ forment la base naturelle du module libre $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$: pour toute matrice $M = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1..n]\!]}$, on a $\boxed{M = \sum_{i,j \in [\![1..n]\!]} a_{ij}\mathrm{e}_{ij}}$.

Dans la suite du problème, $\mathbf{k}$ désigne un anneau commutatif.

Nous notons $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base naturelle de $\mathbf{k}^n$ et nous pouvons identifier $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ avec l'anneau $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n)$ des applications $\mathbf{k}$-linéaires de $\mathbf{k}^n$ dans lui-même. Si un élément de $\mathbf{k}^n$ est vu comme un vecteur colonne X, l'endomorphisme représenté par M est $X \mapsto MX$.
Considérons $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ avec sa structure de $\mathbf{k}$-algèbre (associative unitaire). Une matrice de changement de base P pour $\mathbf{k}^n$ produit un automorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$.

On note e_i pour $\mathrm{e}_{i,i}$ On a les égalités

$$\boxed{\mathrm{e}_{i,j}\,\mathrm{e}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{e}_{i,\ell}} \quad \text{et} \quad \boxed{\textstyle\sum_{i=1}^n \mathrm{e}_i = \mathrm{I}_n}. \tag{1}$$

Donc $\mathrm{e}_{ij} M \mathrm{e}_{k\ell} = a_{jk}\mathrm{e}_{i\ell}$. En particulier $\mathrm{e}_i M \mathrm{e}_j = a_{ij}\mathrm{e}_{ij}$, et $\mathrm{e}_i M \mathrm{e}_{ji} = a_{ij}\mathrm{e}_i$.

Les matrices e_i sont idempotentes et 2 à 2 orthogonales ; elles forment, dans le contexte d'un anneau non commutatif, un «système fondamental d'idempotents orthogonaux». Mais dans un anneau non commutatif, un tel système ne correspond pas à la décomposition de l'anneau en un produit d'anneaux. Les matrices e_{ij} sont de carré nul pour $i \neq j$.

1. Les matrices diagonales sont les matrices M qui vérifient $\mathrm{e}_i M \mathrm{e}_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Elles forment un sous-anneau commutatif de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ isomorphe à $\mathbf{k}^n$ (muni de la loi produit). Pour $i \neq j$, la matrice $\mathrm{s}_{ij} = \mathrm{e}_{ij} + \mathrm{e}_{ji} + \sum_{k \neq i,j} \mathrm{e}_k$ est involutive, l'automorphisme $M \mapsto \mathrm{s}_{ij} M \mathrm{s}_{ij}$ correspond au changement de base qui permute ε_i et ε_j. Les matrices $\in \mathbf{k}\,\mathrm{I}_n$ sont les matrices diagonales qui vérifient $\mathrm{s}_{ij} M \mathrm{s}_{ij} = M$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $\mathbf{k}\,\mathrm{I}_n$ est le centre de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$.

On suppose dans la suite que $\mathbf{k}$ est un corps discret.

2. Montrer que si $M \neq 0 \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ on peut trouver n couples de matrices (A_k, C_k) telles que $\sum_k A_k M C_k = \mathrm{I}_n$. En particulier $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ est un anneau simple.

3. On appelle *base matricielle de* $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ tout système de n^2 éléments e_{ij} qui vérifie les équations (1). Montrer qu'alors il existe une base $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ de $\mathbf{k}^n$ par rapport à laquelle les matrices des e_{ij} sont exactement les e_{ij}. En déduire que tout automorphisme de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ est intérieur.

Solution

Problème 3.

1. Si $M \in \mathrm{Z}(\mathbb{M}_n(\mathbf{k}))$, alors $\mathrm{e}_i M \mathrm{e}_j = \mathrm{e}_j M \mathrm{e}_j$ et donc $a_{ij}\mathrm{e}_{ij} = a_{ji}\mathrm{e}_{ji}$. Pour $i \neq j$ cela signifie $a_{ij} = 0 = a_{ji}$. Par ailleurs une matrice diagonale $\sum_k a_k \mathrm{e}_k$ commute avec s_{ij} si, et seulement si, $a_i = a_j$.

2. Pour $M = \sum_{i,j} a_{ij}\mathrm{e}_{ij}$ on a $\mathrm{e}_{ki} M \mathrm{e}_{jk} = a_{ij}\mathrm{e}_k$. Donc $\sum_{k=1}^n \mathrm{e}_{ki} M \mathrm{e}_{jk} = a_{ij}\mathrm{I}_n$. Enfin si $M \neq 0$ un des coefficients a_{ij} est inversible et $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}^{-1}\mathrm{e}_{ki} M \mathrm{e}_{jk}$.

3. Notons $\mu_i \colon \xi \mapsto e_i\xi$ et $\mu_{ij} \colon \xi \mapsto e_{ij}\xi$ les endomorphismes de multiplication correspondant aux e_{ij}.
Comme $\mu_i^2 = \mu_i$ chaque μ_i est un projecteur. Chaque $s_{ij} = e_{ij} + e_{ji} + \sum_{k \neq i,k} e_k$

Chapitre X

Modules projectifs de type fini (2)

Problèmes

Dans le problème 2 (Les opérations λ_t et γ_t sur $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$) on ajoute la phrase d'introduction suivante

Ce problème est largement inspiré de la section 2 d'un article de Richard Swan disponible en `http://math.uchicago.edu/~swan/MKN.pdf`.

---

vérifie $s_{ij}^2 = \mathrm{Id}$ et $s_{ij} e_i s_{ij} = e_j$. Donc les projecteurs μ_i et μ_j sont conjugués. En particulier ils ont même rang. Comme $\sum_{k=1}^n \mu_k = \mathrm{Id}_{\mathbf{k}^n}$, ce rang est égal à 1.
On considère une base formée de vecteurs $\neq 0$ dans les images des μ_i, disons $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. La matrice de μ_i par rapport à cette base est alors égale à e_i pour chaque i. Soit $N_{ij} = (n_{ijk\ell})_{k,\ell \in [\![1..n]\!]}$ la matrice de l'endomorphisme μ_{ij} sur cette base. On a $e_i e_{ij} e_j = e_{ij}$, donc $\mu_i \mu_{ij} \mu_j = \mu_{ij}$ donc $N_{ij} = \mathrm{e}_i N_{ij} \mathrm{e}_j = n_{ijij} \mathrm{e}_{ij}$, ce qui donne $N_{ij} = n_{ijij} \mathrm{e}_{ij}$. Notons $a_{ij} = n_{ijij}$. On a $\mu_{ij}(\xi_j) = a_{ij}\xi_i$ et $\mu_{ij}(\xi_k) = 0$ pour $k \neq j$. Comme $e_{ij} e_{ji} = e_i$, on obtient $a_{ij} a_{ji} = 1$. On prend maintenant $\varepsilon_i' = a_{i1}\xi_i$ pour chaque i. On a $\mu_{i1}(\varepsilon_1') = \varepsilon_i'$: les nouveaux a_{i1} sont égaux à 1. Comme $e_{ij} e_{jk} = e_{ik}$ pour tous i, j, k, sur la nouvelle base tous les a_{ij} sont égaux à 1.
Soit maintenant θ un automorphisme de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. Les $e_{ij} = \theta(\mathrm{e}_{ij})$ vérifient es équations (1) ; ils forment une base matricielle de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. On vient de voir que pour un changement de base convenable, disons de matrice P, on obtient $P\,\mathrm{e}_{ij} P^{-1} = e_{ij}$ pour tous i, j. Autrement dit θ coïncide avec l'automorphisme intérieur défini par P sur tous les e_{ij}. Il est donc égal à cet automorphisme intérieur.

Note. On a supposé que $\mathbf{k}$ est un corps discret. Plus généralement, pour le point *3*, il suffit de supposer que pour l'anneau $\mathbf{k}$ tout module projectif de rang 1 est libre. Nous verrons que c'est le cas pour les anneaux locaux et plus généralement pour les anneaux local-globals (voir le fait IX-6.2 et le principe local-global concret IX-6.9) Les anneaux zéro-dimensionnels (définition en section IV-8) sont local-globals. La démonstration sous l'hypothèse formulée ci-dessus est essentiellement inchangée.

Exercice 23. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 3)*

1. On écrit $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ sans présupposer que le morphisme $\mathbb{Z} \to \mathbf{A}$ est injectif. L'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ noyau du morphisme $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r] \to \mathbf{A}$ engendre un idéal $\mathfrak{m}'$ de $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_r]$. Le quotient $\mathbf{B}$ correspondant est aussi zéro-dimensionnel réduit car le quasi inverse d'un élément arbitraire y de $\mathbf{A}$ satisfait $y(yz-1) = z(yz-1) =_{\mathbf{A}} 0$ ce qui veut dire que les éléments Y et Z au dessus de y et z satisfont $Y(YZ-1)$ et $Z(YZ-1) \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}'$. Et tout élément de $\mathbf{B}$ provient d'un élément de la forme YU avec $Y \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r]$ et $U \in \mathbb{Q}^\times$. D'après l'exercice 21, si $\mathbf{B}$ est non trivial, il est isomorphe à un corps $\mathbb{Q}[T]/\langle P(T)\rangle$, où P est irréductible dans $\mathbb{Q}[T]$. Pour l'élément t correspondant dans $\mathbf{B}$, il y a un entier m tel que $t' = mt$ existe dans $\mathbf{A}$.

Et ... à terminer

Exercice 24.

Exercice 25.

Exercice 25. *(Radical de Jacobson d'une algèbre de présentation finie sur $\mathbb{Z}$)* Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de présentation finie sur sur $\mathbb{Z}$. Démontrer que son radical de Jacobson coïncide avec son nilradical.

Solutions

Exercice 21. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 1)*

1. Le morphisme $\mathbb{Q} \to \mathbf{A}$ est injectif parce que $\mathbf{A}$ est non trivial. On peut donc écrire $\mathbf{A} = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$ avec $\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{A}$. Le théorème 3.15 nous dit que chacun des x_i est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Donc $\mathbf{A}$ est à la fois un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de type fini et un corps discret. Chaque x_i est zéro d'un polynôme $R_i \in \mathbb{Q}[X_i]$. Comme $\mathbb{Q}[X_i]$ est un domaine de Bézout factoriel, R_i se décompose en produits de polynômes irréductibles et x_i annule l'un de ces facteurs P_i, de sorte que $\mathbb{Q}[x_i] \simeq \mathbb{Q}[X_i]/\langle P_i \rangle$. Et $\mathbf{K}_i = \mathbb{Q}[x_i]$ est strictement fini sur $\mathbb{Q}$, étale sur $\mathbb{Q}$. D'après le corolaire 1.12, $\mathbf{K}_i[Y]$ est de nouveau un domaine de Bézout factoriel. Ainsi, on voit de proche en proche que $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$ est strictement finie sur $\mathbb{Q}$.

2. On peut remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps de caractéristique 0 séparablement factoriel. Les corps finis sont aussi éligibles (expliquer pourquoi ?).

Exercice 22. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 2)*

1. Soit p un nombre premier étranger à c. Si $p =_{\mathbf{A}} 0$, cela force $\mathbf{A} \simeq \mathbb{F}_p$. Si p est inversible dans $\mathbf{A}$ on a un $a/c^k \in \mathbb{Z}[1/c]$ tel que $ap/c^k - 1 =_{\mathbf{A}} 0$. Comme c est inversible dans $\mathbf{A}$, $ap - c^k =_{\mathbf{A}} 0$. L'élément $ap - c^k$ est non nul modulo p donc non nul. Il n'est pas égal à ± 1 car $1 \neq 0$ dans $\mathbf{A}$. Un diviseur premier q de $am - c^k$ est nul dans $\mathbf{A}$ et cela force $\mathbf{A} \simeq \mathbb{F}_q$: q est $\neq 0$ dans $\mathbf{A}$ car sinon $\mathbf{A}$ est trivial.

2a. Laissé au lecteur.

2b. Supposons x inversible dans $\mathbf{A}$. On a polynôme $B \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $B(0) =_{\mathbb{Z}[X]} 1$ et $B(x) =_{\mathbf{A}} 0$. Soit c le coefficient dominant de B. Si $c =_{\mathbf{A}} 0$ on conclut par *2a* que $\mathbf{A}$ est un corps fini. Sinon x est entier sur $\mathbb{Z}[1/c]$ dans $\mathbf{A}$, et l'on peut voir $\mathbf{A}$ comme un quotient de $\mathbb{Z}[1/c][X]$. Soit p un nombre premier étranger à c. Supposons p inversible dans $\mathbf{A}$. Soit z l'inverse de p dans $\mathbf{A}$, on peut voir z dans $\mathbb{Z}[1/c][x]$. Considérons les matrices M_p et M_z de multiplication par p et z sur la $\mathbb{Z}[1/c]$-base de $\mathbb{Z}[1/c][x]$. On a alors $\text{dét}(M_p)\,\text{dét}(M_z) = 1$ dans $\mathbf{A}$. Cela donne $p^k m - c^\ell =_{\mathbf{A}} 0$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. L'entier $p^k m - c^\ell$ est non nul modulo p donc non nul dans $\mathbb{Z}$. Il ne peut pas être égal à ± 1 car $\mathbf{A}$ est non trivial. Il existe un facteur premier q de $p^k m - c^\ell$ nul dans $\mathbf{A}$. Ceci nous ramène au point *2a*.

2c. Laissé à la lectrice.

3. On peut remplacer $\mathbb{Z}$ par un domaine de Bézout factoriel $\mathbf{Z}$ qui possède une infinité d'éléments irréductibles et dont les quotients $\mathbf{Z}/\langle p \rangle$ pour p irréductible sont des corps discrets séparablement factoriels (?).

Chapitre IV
Modules de présentation finie

Compléments du cours

Dans la section IV-5, après le corolaire 5.3, on ajoute le corolaire suivant

5.4. Corolaire. *Soient M et N des modules de type fini.*

1. *Si on a une application linéaire surjective $M \to M \oplus N$, alors N est nul.*
2. *Si M est isomorphe à M^2, alors M est nul.*
3. *Si on a une application linéaire surjective $M^n \to M^{n+k}$ avec $k > 0$, alors M est nul.*

D *1.* Soit $\varphi\colon M \to M \oplus N$ une application linéaire surjective. On a aussi la projection sur le premier facteur $\pi_1\colon M \oplus N \to M$. L'application linéaire composée $\varphi \circ \pi_1\colon M \oplus N \to M \oplus N$ est surjective, donc est un isomorphisme. Donc π_1 est injective. Or $\operatorname{Ker} \pi_1 = N$. Donc $N = 0$.

Il est clair que les points *2* et *3* sont conséquences du point *3*. □

Chapitre VI

Algèbres de type fini

Exercices

Exercice 21. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 1)*
Cet exercice est une application du théorème 3.15 (Nullstellensatz faible).

1. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre de type fini qui est aussi un corps discret non trivial. Montrer que $\mathbf{A}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre strictement finie. On pourra utiliser le corolaire 1.12.

2. Par quel type de corps discret peut-on remplacer $\mathbb{Q}$ dans l'énoncé précédent pour obtenir la même conclusion.

Exercice 22. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 2)*

1. Soit $c \geqslant 2$ un entier naturel et $\mathbf{A}$ un anneau quotient de $\mathbb{Z}[1/c]$ qui est un corps discret non trivial. Montrer qu'il existe un nombre premier p étranger à c tel que $\mathbf{A} \simeq \mathbb{F}_p$.

2. Soit $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x]$ un anneau quotient de $\mathbb{Z}[X]$ qui est aussi un corps discret non trivial.

2a. Si p est un nombre premier nul dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ est un quotient de $\mathbb{F}_p[x]$ avec x entier sur $\mathbb{F}_p$. En déduire que $\mathbf{A}$ est un corps fini (strictement fini sur $\mathbb{F}_p$).

2b. Supposons x inversible dans $\mathbf{A}$. On a un polynôme $B \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $B(0) =_{\mathbb{Z}[X]} 1$ et $B(x) =_{\mathbf{A}} 0$. Soit c le coefficient dominant de B. Si $c =_{\mathbf{A}} 0$ conclure. Sinon x est entier sur $\mathbb{Z}[1/c]$ dans $\mathbf{A}$, et l'on peut voir $\mathbf{A}$ comme un quotient de $\mathbb{Z}[1/c][X]$. Soit p un nombre premier étranger à c. Si $p =_{\mathbf{A}} 0$ conclure. Sinon démontrer qu'il existe un nombre premier q nul dans $\mathbf{A}$.

2c. Conclure que $\mathbf{A}$ est strictement fini sur un corps $\mathbb{F}_p$, donc est un corps fini.

3. Par quel type d'anneau intègre peut-on remplacer $\mathbb{Z}$ dans l'énoncé précédent pour obtenir une conclusion de même nature.

Exercice 23. *(Algèbres de type fini qui sont des corps discrets, 3)*
Cet exercice utilise les résultats des deux exercices précédents.

1. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini qui est aussi un corps discret non trivial. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $\mathbf{A}$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre strictement finie.

2. Par quel type d'anneau intègre peut-on remplacer $\mathbb{Z}$ dans l'énoncé précédent pour obtenir une conclusion de même nature ?

Exercice 24. *(Radical de Jacobson d'une algèbre de présentation finie sur un corps discret)* Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de présentation finie sur un corps discret. Démontrer que son radical de Jacobson coïncide avec son nilradical.