Anneaux à diviseurs et anneaux de Krull (une approche constructive)

T. Coquand, H. Lombardi

Résumé

Nous présentons dans cet article une approche constructive de la théorie des diviseurs.

L'excellent livre [Edwards] traite constructivement la clôture intégrale d'un anneau factoriel dans une extension finie de son corps des fractions. Edwards suppose aussi que l'anneau factoriel possède de bonnes propriétés pour la factorisation des polynômes.

Nous traitons ici de manière constructive un cas plus général dans lequel nous n'avons aucune d'hypothèse de décomposition en facteurs irréductibles. L'exemple le plus important en pratique reste celui des anneaux géométriques[1] intégralement clos. Et dans ce cas la décomposition d'un diviseur en somme d'irréductibles n'est pas assurée constructivement.

Nous nous situons dans la suite du livre [ACMC], où est développée une théorie constructive des domaines de Dedekind (chapitre XII) indépendante de la possibilité d'une décomposition des idéaux en produit d'idéaux maximaux. Comme cet article est écrit dans le style des mathématiques constructives à la Bishop, nous donnerons la version constructive précise que nous choisissons pour beaucoup de notions classiques, même très bien connues.

Le « tour de force » qui est réalisé par l'adjonction de pgcds idéaux en théorie des nombres peut-il être généralisé de manière significative ?

Oui, pour certains anneaux intégralement clos, que nous appelons les *anneaux à diviseurs*, dénommés « anneaux pseudo-prüfériens » dans les exercices de Bourbaki. Ils constituent une classe d'anneaux suffisamment large pour lesquels on a une notion raisonnable de diviseurs, mais où l'on ne réclame pas l'existence de diviseurs irréductibles.

La théorie correspondante en mathématiques classiques semble due principalement à Lorenzen, Jaffard, Lucius et Aubert ([Jaffard] et [2, 13, 14, 15]).

Cette théorie généralise la théorie plus classique des anneaux dits de Krull, dans laquelle on réclame une décomposition unique en facteurs premiers pour les diviseurs. Elle a été élaborée notamment par Krull, Arnold (1929), van der Waerden (1929), Prüfer (1932) et Clifford (1938) ([1, 4, 12, 16, 18]). Il semble aussi que l'approche de [Borevich & Shafarevich] ait eu une forte influence sur les exposés ultérieurs de la théorie.

En pratique les anneaux à diviseurs sont au départ des anneaux à pgcd intègres ou des domaines de Prüfer. Ensuite la classe des anneaux à diviseurs est stable par extensions polynomiales ou entières et intégralement closes, ce qui donne les exemples usuels de la littérature.

Références

[Bigard, Keimel & Wolfenstein] Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S. *Groupes et anneaux réticulés.* Springer LNM 608, (1977).

[Borevich & Shafarevich] Borevich & Shafarevich. *Théorie des nombres.* Gauthier-Villars, (1967). 1

[Edwards] Edwards H. M. *Divisor Theory.* Birkhäuser, (1990). 1

[Jaffard] Jaffard P. *Les systèmes d'idéaux.* Dunod (1960). 1

[ACMC] Lombardi H., Quitté C. *Algèbre Commutative. Méthodes constructives.* Calvage&Mounet, (2011). 1

1. Algèbres de présentation finie sur un corps discret

[Matsumura] Matsumura H. *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics n°8. Cambridge University Press, (1989).

[MRR] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988).

Articles

[1] Arnold I. *Ideale in kommutativen Halbgruppen.* Rec. Math. Soc. Moscow **36**, (1929), 401–407. 1

[2] Aubert K. *Divisors of finite character.* Ann. Mat. Pura Appl. **38**, (1983), 327–360. 1

[3] Chang G.W. *Prüfer $\star$-multiplication domains, Nagata rings, and Kronecker function rings.* Journal of Algebra **319**, (2008), 309–319.

[4] Clifford A. H. *Arithmetic and ideal theory of commutative semigroups.* Annals of Math. **39**, (1938), 594–610. 1

[5] Coquand T. *Recursive functions and constructive mathematics.* À paraître dans : Bourdeau M., Dubucs J. (Eds.), Calculability and Constructivity. Historical and Philosophical Aspects. Logic, Epistemology and the Unity of Science. Springer, Dordrecht, Heidelberg, London.

[6] Fontana M., Loper K. *An historical overview of Kronecker function rings, Nagata rings, and related star and semistar operations.* p. 169–187 in "Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra : A tribute to the work of Robert Gilmer", Jim Brewer, Sarah Glaz, William Heinzer, and Bruce Olberding Editors, Springer 2006.

[7] Fontana M., Zafrullah M. *A "v-opération free" approach to Prüfer v-multiplication domains.* Int. J. Math. Math. Sci. (2009), Article ID 349010, 8 pages.

[8] Fontana M., Zafrullah M. *On v-domains : a survey.* In *Commutative Algebra : Noetherian and non-Noetherian Perspectives* (M. Fontana, S. Kabbaj, B. Olberding, and I. Swanson Editors), 145–179, Springer, New York, (2011).

[9] Glaz S. *Finite conductor rings.* Proc. Amer. Math. Soc. **129**, (2001), 2833–2843.

[10] Griffin M. *Some results on v-multiplication rings.* Canad. Math. **19**, (1967), 710-722.

[11] Kang B.G., *Prüfer v-multiplication domains and the ring $R[X]_{N_v}$.* J. Algebra. **123**, (1989), 151–170.

[12] Krull W. *Beitrige zur Arithmetik kommutativer Integritäts-bereiche. II. v-Ideale und vollständig ganz abgeschlossene Integritäts- bereiche.* Math. Z. **41**, n°6, (1936), 665–679. 1

[13] Lorenzen P. *Abstrakte Begründung der multiplicativen Idealtheorie.* Math. Z. **45**, n°6, (1939), 533–553. 1

[14] Lucius F. *Rings with a theory of greatest common divisors.* Manuscripta Math. **95**, (1998), 117–136. 1

[15] Lucius F. *Kronecker's Divisor Theory and the Generalization of Notions and Theorems of Classical Algebraic Number Theory to Krull Domains.* Mathematica Gottingensis n°13, (1998), 17 pages. 1

[16] Prüfer H. *Untersuchungen fiber Teilbarkeitseigenschaften in Körpern.* J. Reine Angew. Math. **168**, (1932), 1–36. 1

[17] Skula L. *Divisorentheorie einer Halbgruppe.* Math. Z. **114**, (1970), 113–120.

[18] van der Waerden B. L. *Zür Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringe.* Math. Annalen **101**, (1929), 293–308. 1

[19] Zafrullah M. *What w-coprimality can do for you.* p. 387–404 in "Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra : A tribute to the work of Robert Gilmer", Jim Brewer, Sarah Glaz, William Heinzer, and Bruce Olberding Editors, Springer 2006.