

Errata
du livre
Algèbre commutative
méthodes constructives
Modules projectifs de type fini

Henri Lombardi, Claude Quitté.

Calvage&Mounet. 2011

Dernière mise à jour, 8 mai 2019

Nous remercions tous les lecteurs qui voudront bien nous signaler des erreurs de toutes sortes, des démonstrations élégantes, ou des solutions d'exercices ou problèmes, ce qui nous aidera à enrichir les Errata et les compléments.

Nous signalons les errata d'ordre mathématique, mais pas les fautes d'orthographe, qui seront corrigées s'il y a une deuxième édition.

Les compléments en entier sont disponibles à <http://hlombardi.free.fr/publis/LivresBrochures.html>

ERRATA

Avant-Propos

Une précision

La citation de Marx en bas de la page xv est mal référencée.

En fait il s'agit d'un extrait du texte, *Remarques à propos de la récente instruction prussienne sur la censure*, paru dans la revue *Anekdoty* en 1843.

Nous avons indiqué la traduction par J. Molitor parue en 1927 et citée par G. Perec :

Le moyen fait partie de la recherche de la vérité, aussi bien que le résultat. Il faut que la recherche de la vérité soit elle-même vraie ; la recherche vraie, c'est la vérité déployée, dont les membres épars se réunissent dans le résultat.

La traduction dans la Pléiade par Maximilien Rubel, est la suivante (nous avons rajouté une phrase avant et une phrase après) :

... le caractère de l'objet ne doit-il exercer nulle influence, vraiment pas la moindre, sur la recherche ? La vérité englobe non seulement le résultat, mais aussi le chemin. La recherche de la vérité doit elle-même être vraie, la vraie recherche est la vérité épanouie dont les membres épars se réunissent dans le résultat. Et l'on voudrait que le mode de recherche ne change pas selon son objet !

Chapitre I

Exemples

page 2, ligne 8 :

remplacer «ce sont des espaces vectoriels de type fini» par «ce sont des espaces vectoriels de dimension finie»

page 14, ligne -2 :

remplacer «donc $\delta_1 W' = 0$ » par «donc $\delta_1^2 W' = 0$ ».

Chapitre II

Principe local-global de base et systèmes linéaires

Fait 6.3, point 2.

Dans le point 2 du fait 6.3, il manque une hypothèse : l'application canonique de P dans P^{**} doit être injective. La démonstration doit être précisée comme suit.

6.3. Fait. Soit $\beta : N \rightarrow P$ une application linéaire et $\gamma : P \rightarrow \text{Coker } \beta$ la projection canonique.

1. L'application canonique ${}^t\gamma : (\text{Coker } \beta)^* \rightarrow P^*$ induit un isomorphisme de $(\text{Coker } \beta)^*$ sur $\text{Ker } {}^t\beta$.
2. Si l'application canonique $N \rightarrow N^{**}$ est un isomorphisme, et si l'application canonique de P dans P^{**} est injective, alors la surjection canonique de N^* dans $\text{Coker } {}^t\beta$ fournit par dualité un isomorphisme de $(\text{Coker } {}^t\beta)^*$ sur $\text{Ker } \beta$.

D 1. On applique le fait 6.2 avec $F = \mathbf{A}$.

2. La surjection canonique $N^* \rightarrow \text{Coker } {}^t\beta$ fournit par dualité une injection $\lambda : (\text{Coker } {}^t\beta)^* \rightarrow N^{**} = N$.

On montre que $\text{Im } \lambda \subseteq \text{Ker } \beta$. D'abord, un schéma de la situation pour visualiser $\lambda = \iota_N^{-1} \circ {}^t\pi$ et ${}^t({}^t\beta) = \iota_P \circ \beta \circ \iota_N^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc}
 P^* \xrightarrow{{}^t\beta} N^* & & \\
 \downarrow \pi & \xrightarrow{\text{dualité}} & \\
 \text{Coker } {}^t\beta & & \\
 & & \begin{array}{ccccc}
 & & \lambda & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 (\text{Coker } {}^t\beta)^* & \xrightarrow{{}^t\pi} & N^{**} & \xleftarrow[\iota_N]{\simeq} & N \\
 & & \downarrow {}^t({}^t\beta) & & \downarrow \beta \\
 & & P^{**} & \xleftarrow[\iota_P]{} & P
 \end{array}
 \end{array}$$

Par définition, on a $\pi \circ \iota\beta = 0$ donc $\iota(\iota\beta) \circ \iota\pi = 0$ ou encore :

$$\iota_P \circ \beta \circ \iota_N^{-1} \circ \iota\pi = 0$$

Mais ι_P est injective donc $\beta \circ \iota_N^{-1} \circ \iota\pi = 0$ i.e. $\beta \circ \lambda = 0$, ce que l'on voulait. Soit maintenant $x \in \text{Ker } \beta$ et \tilde{x} l'élément correspondant de N^{**} . On voit que \tilde{x} est nul sur $\text{Im } \iota\beta$, donc fournit par passage au quotient un élément $y \in (\text{Coker } \iota\beta)^*$ tel que $\lambda(y) = \tilde{x}$. \square

Voici un contre-exemple, lorsque ι_P n'est pas injective, pour lequel $(\text{Coker } \iota\beta)^*$ et $\text{Ker } \beta$ ne sont mêmes pas isomorphes. On va faire en sorte que $P^* = 0$ donc $\text{Coker } \iota\beta = N^*$ puis $(\text{Coker } \iota\beta)^* \simeq N$ que l'on doit comparer à $\text{Ker } \beta$. On prend $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[X]$, $N = \mathbf{A}$, $P = \mathbf{A}/\langle 2, X \rangle$ et β la projection canonique de N sur P . On a $P^* = 0$ car $2P = 0$ et $\text{Ker } \beta = \langle 2, X \rangle$.

Et les $\mathbb{Z}[X]$ -modules N et $\text{Ker } \beta$ ne sont pas isomorphes puisque $\langle 2, X \rangle$ n'est pas un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$.

Chapitre III

La méthode des coefficients indéterminés

L'énoncé correct du corollaire 1.6 est le suivant

1.6. Corollaire. *Sur un anneau \mathbf{A} on considère le polynôme générique*

$$f = T^n + f_1 T^{n-1} + f_2 T^{n-2} + \dots + f_n,$$

où les f_i sont des indéterminées.

On a un homomorphisme injectif $j : \mathbf{A}[f_1, \dots, f_n] \rightarrow \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ tel que les $(-1)^k j(f_k)$ sont les polynômes symétriques élémentaires en les X_i .

Théorème 6.7.

Ligne 8 de la démonstration. Il faut mettre \mathbf{L} à la place de \mathbf{M} .

Page 118 ligne -9, il faut lire : ... pour chaque $j \in \llbracket 1..n \rrbracket$, $gX_j^N \in \mathfrak{a}$...

Chapitre IV

Modules de présentation finie

Au sujet de l'exercice 8.

À la fin de l'exercice, on note que sur un anneau de Smith \mathbf{A} , la réduite de Smith d'une matrice A est unique au sens suivant : les éléments b_i sur la diagonale principale de la réduite engendrent des idéaux $\langle b_i \rangle$ qui ne dépendent que de la matrice A (à équivalence près).

Ceci est tout à fait correct, mais ensuite il y a écrit un non-sens : « Ces idéaux principaux sont appelés les facteurs invariants du module A . »

En effet, $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbf{A})$ n'est pas un module, mais une matrice.

Voici une reformulation correcte des commentaires situées à la fin de l'exercice.

Ceci donne un joli théorème de structure pour les modules de présentation finie, en tenant compte pour l'unicité du théorème 5.1. Notez aussi que ce théorème implique l'unicité de la réduite de Smith d'une matrice A (en considérant le module conoyau) au sens suivant : en notant b_i les coefficients diagonaux de la réduite, les idéaux principaux $\langle b_1 \rangle \supseteq \cdots \supseteq \langle b_q \rangle$ avec $q = \inf(m, n)$ sont des invariants de la matrice A à équivalence près.

En termes de modules, ces idéaux principaux caractérisent, à un automorphisme près de \mathbf{A}^m , le morphisme d'inclusion $P = \text{Im}(A) \rightarrow \mathbf{A}^m$.

Une base (e_1, \dots, e_m) de \mathbf{A}^m telle que $P = b_1 \mathbf{A} e_1 + \cdots + b_m \mathbf{A} e_m$ est appelée une *base de \mathbf{A}^m adaptée au sous-module P* .

Posons $b_r = 0$ si $m \geq r > n$, on a $\langle b_1 \rangle \supseteq \cdots \supseteq \langle b_r \rangle$. Les idéaux principaux $\neq \langle 1 \rangle$ de cette liste sont les facteurs invariants du module de présentation finie $M = \text{Coker}(A)$. Le théorème 5.1 nous dit que cette liste caractérise la structure du module M .

Notons enfin que les anneaux de Smith sont stables par produit fini, localisation, passage au quotient.

Chapitre V

Modules projectifs de type fini, 1

Il est plus simple d'énoncer le lemme des localisations successives 7.2 comme suit.

7.2. Fait. (Lemme des localisations successives, 1)

Si s_1, \dots, s_n sont des éléments comaximaux de \mathbf{A} et si pour chaque i , on a des éléments $s_{i,1}, \dots, s_{i,k_i}$, comaximaux dans $\mathbf{A}[1/s_i]$, alors les $s_i s_{i,j}$ sont comaximaux dans \mathbf{A} .

Le point 1 dans le lemme 7.7 est laissé au lecteur, mais il vaut bien mieux donner l'argument suivant.

1. Il suffit de montrer que pour un $a \in \mathfrak{b}$ arbitraire on a un idéal de type fini \mathfrak{c} tel que $\mathfrak{b} \mathfrak{c} = \langle a \rangle$. Ceci est donné par le point 1e de la proposition 7.4 lorsque $M = \mathfrak{b}$.

Dans le point 3 du théorème 8.1, l'endomorphisme $\tilde{\psi}$ est décrit comme si la «matrice» était diagonale, alors qu'a priori elle est seulement triangulaire : le point 3 doit être réécrit en disant qu'on donne les deux blocs diagonaux.

La première phrase de l'exercice 18 doit être écrite comme suit :

On considère le module quasi libre $M = \bigoplus_{k \in \llbracket 1..n \rrbracket} (r_k \mathbf{A})^k$, où les r_k sont des idempotents orthogonaux.

Chapitre VI

Algèbres strictement finies et algèbres galoisiennes

Section 1. lemme 1.10.

La démonstration du lemme 1.10 est un peu elliptique. Voici une démonstration plus détaillée

1.10. Lemme. *Un corps \mathbf{K} est séparablement factoriel si, et seulement si, on a un test pour l'existence d'un zéro dans \mathbf{K} pour un polynôme séparable arbitraire de $\mathbf{K}[T]$.*

⊃ La deuxième condition est a priori plus faible puisqu'elle revient à déterminer les facteurs de degré 1 pour un polynôme séparable de $\mathbf{K}[X]$. Supposons cette condition vérifiée. La preuve est à peu près la même que pour le lemme III-8.14, mais demande quelques détails supplémentaires. On note $f(T) = T^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j$, on fixe un entier $k \in \llbracket 2..n-2 \rrbracket$ et l'on cherche les polynômes $g = T^k + \sum_{j=0}^{k-1} b_j T^j$ qui divisent f . On va montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités, explicites, pour chacun des b_j . La démonstration du théorème de Kronecker utilise des polynômes universels $Q_{n,k,r}(a_0, \dots, a_{n-1}, X) \in \mathbb{Z}[\underline{a}, X]$, unitaires en X , tels que $Q_{n,k,r}(\underline{a}, b_r) = 0$. Ces polynômes peuvent être calculés dans l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \text{Adu}_{\mathbf{K},f}$ comme suit. On pose

$$G(T) = \prod_{i=1}^k (T - x_i) = T^k + \sum_{j=0}^{k-1} g_j T^j.$$

On considère l'orbite $(g_{r,1}, \dots, g_{r,\ell})$ de g_r sous l'action de S_n , et l'on obtient

$$Q_{n,k,r}(\underline{a}, X) = \prod_{i=1}^{\ell} (X - g_{r,i}).$$

On en déduit que

$$\prod_{\sigma \in S_n} (W - \sigma(g_r)) = Q_{n,k,r}^{n!/l}.$$

Donc, d'après le lemme III-5.12, $C_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z)(X) = Q_{n,k,r}^{n!/l}(X)$. Enfin, comme \mathbf{A} est étale sur \mathbf{K} (corollaire 1.8), le polynôme caractéristique de g_r annule un produit de polynômes séparables de $\mathbf{K}[T]$ d'après le théorème 1.4 4.

Ainsi, b_r doit être cherché parmi les zéros d'un nombre fini de polynômes séparables : il y a un nombre fini de possibilités, toutes explicites. \square

Section 6. Point 4 du lemme 6.16.

Remplacer «deux à deux orthogonaux» par «égaux ou orthogonaux»

Section 7. page 353.

Dans le point 1 de la démonstration du théorème 7.13, à la ligne 5, mettre \mathbf{A}'^G au lieu de \mathbf{A}'^H (d'ailleurs H n'intervient que dans le point 2).

Problème 4. page 367, point 7 Il faut rajouter que \mathbf{k} est supposé non trivial.

Dans le corrigé du point 7b il faut expliquer que \mathbf{B} n'est pas libre sur \mathbf{A} , car sinon, E serait stablement libre de rang 1 donc libre.

La fin de la démonstration du point 8 doit être rédigée comme suit pour être complètement constructive.

À l'endroit où $x = ua$ et $u \in \mathbf{B}^\times$, on raisonne comme suit. Puisque u est un élément inversible de \mathbf{B} , sa valeur absolue est minorée par un élément > 0 , et u est de signe strict constant. Comme x est impaire et a paire, a et x sont identiquement nulles : contradiction.

Chapitre VII

La méthode dynamique

Plus de précision à ce sujet dans les compléments : le **théorème 1.5 bis** de l'exercice 3 doit être modifié. Une solution de l'exercice est donnée dans les compléments.

– remplacer le point 2 par :

$\mathbf{K}_0 \cap \mathfrak{f} = 0$ et \mathbf{A}_0 est un \mathbf{K}_0 -module quasi libre fidèle.

– à la ligne -4, supprimer « $\mathbf{A} =$ » devant « $\bigoplus_{r=0}^n \mathbf{K}_r[Y_1, \dots, Y_r]$ ».

Chapitre VIII

Modules plats

Un typo dans la démonstration de la proposition 4.2, il faut mettre

$$G \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ au lieu de } G \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il y a un trou dans la démonstration de la proposition 4.7. Nous ne savons pas si l'énoncé est correct. Nous rajoutons l'hypothèse que l'anneau arithmétique considéré est cohérent et nous donnons une démonstration correcte

4.7. Proposition. (Idéaux déterminantiels sur un anneau arithmétique)
Soit \mathbf{A} un anneau arithmétique cohérent, M une matrice $\in \mathbf{A}^{n \times m}$. On note $\mathfrak{d}_k = \mathcal{D}_{\mathbf{A},k}(M)$ ses idéaux déterminantiels¹. On note $\mathfrak{b}_k = (\mathfrak{d}_k : \mathfrak{d}_{k-1})$ pour tout k , puis $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{c}_k = \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_k$ pour $k \geq 2$. Ce sont tous les idéaux de type fini et l'on a $\mathfrak{c}_k \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$ pour tout k . En conséquence si des idéaux de type fini $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_p$ vérifient $\mathfrak{a}_k \mathfrak{c}_{k-1} = \mathfrak{c}_k$ (on sait qu'il en existe), on obtient

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2, \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3, \dots$$

▷ On a $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{d}_i = \langle 1 \rangle$ pour $i \leq 0$. La suite des idéaux $(\mathfrak{c}_k)_{k \geq 1}$ est décroissante par définition. On a également l'égalité $\mathfrak{b}_k \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$ parce que l'anneau est arithmétique cohérent.

L'objet de la proposition est l'égalité $\boxed{\mathfrak{c}_k \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k}$. Cette égalité est claire pour $k \leq 1$.

Si \mathbf{A} est un anneau arithmétique local la matrice admet une forme réduite de Smith (proposition IV-7.2). Notons $p = \inf(m, n)$

L'algorithme qui produit la forme réduite de Smith dans le cas local et la machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques précédente nous fournissent un système d'éléments comaximaux (s_1, \dots, s_r) tel que, sur chaque anneau $\mathbf{A}[1/s_i]$, la matrice M admet une forme réduite de Smith avec la sous-matrice diagonale $\text{Diag}(c_1, c_2, \dots, c_p)$ et $c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_p$. En outre, pour $k \geq 1$, $\mathfrak{d}_k = \langle c_1 \cdots c_k \rangle$.

Il suffit de prouver l'égalité encadrée après localisation en ces éléments comaximaux. Le fait que $\mathfrak{b}_k \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$ implique $\mathfrak{c}_k \mathfrak{d}_{k-1} \subseteq \mathfrak{d}_k$.

Il faut montrer l'inclusion réciproque. Plus précisément, montrons pour tout $k \geq 1$ que $c_k \in \mathfrak{c}_k$, ce qui implique $\mathfrak{c}_k \mathfrak{d}_{k-1} \supseteq \mathfrak{d}_k$. On a $c_k \mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$, donc $c_k \in \mathfrak{b}_k$. Par ailleurs c_k est multiple des $c_i \in \mathfrak{b}_i$ pour $i \leq k-1$, donc $c_k \in \mathfrak{b}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{b}_{k-1}$. On a donc bien $c_k \in \mathfrak{c}_k$ □

1. On peut se limiter à $k \in \llbracket 0..p+1 \rrbracket$ avec $p = \inf(m, n)$.

Remarque. Si \mathbf{A} est un domaine de Prüfer (un anneau arithmétique intègre), on peut voir que la suite des idéaux \mathfrak{b}_k est décroissante jusqu'à ce que \mathfrak{d}_r s'annule. Si l'on prend pour \mathbf{A} un produit de domaines de Prüfer, on peut constater qu'il est en général faux que la suite des idéaux \mathfrak{b}_k soit décroissante. ■

Chapitre IX

Anneaux locaux, ou presque

La deuxième partie du point 1 du lemme du nombre de générateurs local 2.4 n'est pas bien formulée : il faut supposer ici le module M de présentation finie, ou alors dans la conclusion, mettre que M est le quotient d'un module de présentation finie qui admet une matrice de présentation dont tous les coefficients sont dans l'idéal maximal $\text{Rad } \mathbf{A}$.

On aurait par exemple dû écrire la chose suivante.

2.4. Lemme du nombre de générateurs local.

Soit M un \mathbf{A} -module de type fini.

1. *Supposons \mathbf{A} local.*

- a. *Le module M est engendré par k éléments si, et seulement si, son idéal de Fitting $\mathcal{F}_k(M)$ est égal à \mathbf{A} .*
- b. *Si en outre \mathbf{A} est résiduellement discret et M de présentation finie, le module admet une matrice de présentation dont tous les coefficients sont dans l'idéal maximal $\text{Rad } \mathbf{A}$.*

2. *En général les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- a. *$\mathcal{F}_k(M)$ est égal à \mathbf{A} .*
- b. *Il existe des éléments comaximaux s_j tels que après extension des scalaires à chacun des $\mathbf{A}[1/s_j]$, M est engendré par k éléments.*
- c. *Il existe des monoïdes comaximaux S_j tels que chacun des M_{S_j} est engendré par k éléments.*
- d*. *Après localisation en n'importe quel idéal premier, M est engendré par k éléments.*
- e*. *Après localisation en n'importe quel idéal maximal, M est engendré par k éléments.*

Notons que la démonstration reste inchangée.

Chapitre XI

Treillis distributifs, groupes réticulés

Introduction, page 602, ligne 5 du paragraphe 3

Intervertir «pgcd» et «ppcm».

Section 5.

Démonstration du théorème 5.3.

Remplacer «(intuitivement X représente $\bigvee_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket} \bigwedge A_i$)»
par «(intuitivement X représente $\bigwedge_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket} \bigvee A_i$)».

Sur la première ligne de (25), permuter 0 et 1.

Dans la remarque 1) page 644. A'_i est une partie de E et non de \mathbf{B} .

Modification de la question 2 dans l'exercice qui suit.

Exercice 6. (*L'astuce de Kronecker*) Soit d un entier fixé ≥ 2 .

1. Soit $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d} \subset \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ le sous- \mathbf{A} -module constitué des polynômes P tels que $\deg_{X_i} P < d$ pour tout $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$, et $\mathbf{A}[T]_{<d^n} \subset \mathbf{A}[T]$ celui formé par les polynômes $f \in \mathbf{A}[T]$ de degré $< d^n$.

Montrer que $\varphi : P(X_1, \dots, X_n) \mapsto P(T, T^d, \dots, T^{d^{n-1}})$ induit un isomorphisme de \mathbf{A} -modules entre les \mathbf{A} -modules $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ et $\mathbf{A}[T]_{<d^n}$.

2. On suppose $\mathbf{A}[X]$ factoriel. Soit $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ et $f = \varphi(P) \in \mathbf{A}[T]_{<d^n}$. Montrer que toute factorisation de P dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ peut être retrouvée par une procédure finie à partir de celles de $\varphi(P)$ dans $\mathbf{A}[T]$.

Solution

Exercice 6. 1. Soit $\underline{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$, alors :

$$\varphi(\underline{X}^\alpha) = T^a \quad \text{avec} \quad a = \alpha_1 + \alpha_2 d + \dots + \alpha_n d^{n-1}.$$

On voit ainsi que $a < d^n$. La numération en base d prouve que φ transforme la \mathbf{A} -base de $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ constituée des \underline{X}^α avec $\alpha_i < d$ en la \mathbf{A} -base $(1, T, \dots, T^{d^n-1})$ de $\mathbf{A}[T]_{<d^n}$.

2. Rappelons que $\mathbf{A}[X]^\times = \mathbf{A}^\times = \mathbf{A}[\underline{X}]^\times$. Ici on suppose $\mathbf{A}[X]$ factoriel.

Si $P = QR \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ alors Q et $R \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$, et $\varphi(Q)$ et $\varphi(R) \in \mathbf{A}[T]_{<d^n}$.

Comme $\varphi(QR) = \varphi(Q)\varphi(R)$, et que $f = \varphi(P)$ n'a qu'un nombre fini de facteurs (dans $\mathbf{A}[X]^*/\mathbf{A}^\times$), il suffit de tester pour chaque facteur $g(T)$ de $f(T)$ si $\varphi^{-1}(g)$ est un facteur de P . Ceci est possible car \mathbf{A} est supposé à divisibilité explicite.

Chapitre XII

Anneaux de Prüfer et de Dedekind

Dans la deuxième partie du lemme 1.9, il manque l'hypothèse « \mathbf{A} est intégralement clos dans $\text{Frac } \mathbf{A}$ » (ce qui est le cas si \mathbf{A} est normal) .

On réécrit ici le lemme sous une forme plus complète, et l'on donne la démonstration.

Pour \mathfrak{a} et \mathfrak{b} dans $\text{Ifr } \mathbf{A}$, on note $\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} = \{ x \in \text{Frac } \mathbf{A} \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \}$.

1.9. Lemme. *Soit \mathbf{A} un anneau cohérent.*

1. *Ifr \mathbf{A} est un treillis pour la relation d'inclusion, le sup est donné par la somme et le inf par l'intersection.*
2. *Ifr \mathbf{A} est un treillis distributif si, et seulement si, l'anneau est arithmétique.*
3. *Au sujet des éléments inversibles de Ifr \mathbf{A} .*
 - a. *Si $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathbf{A}$ dans Ifr \mathbf{A} , on a $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}(\mathfrak{c} \div \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$ pour tout $\mathfrak{c} \in \text{Ifr } \mathbf{A}$. En particulier $\mathbf{A} \div \mathfrak{a}$ est l'inverse de \mathfrak{a} .*
 - b. *Un idéal fractionnaire $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ (où \mathfrak{a} est un idéal de type fini de \mathbf{A}) est inversible dans Ifr \mathbf{A} si, et seulement si, \mathfrak{a} est un idéal inversible.*
 - c. *Si $\mathfrak{a}(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) = \mathbf{A}$, \mathfrak{a} est inversible dans Ifr \mathbf{A} .*

Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \text{Ifr } \mathbf{A}$ avec $b \in \mathfrak{b} \cap \text{Reg } \mathbf{A}$. On suppose que \mathbf{A} est intégralement clos dans $\text{Frac } \mathbf{A}$.

4. *On a $\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} \in \text{Ifr } \mathbf{A}$.*
5. *Si en outre $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}$, alors on a $\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.*

D Tout élément de $\text{Ifr } \mathbf{A}$ s'écrit sous la forme $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ pour un idéal de type fini \mathfrak{a} de \mathbf{A} et un $a \in \text{Reg } \mathbf{A}$. En outre $\frac{\mathfrak{a}}{a} \frac{\mathfrak{b}}{b} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{ab}$. Enfin l'élément neutre du monoïde est $\mathbf{A} = \langle 1 \rangle$. Ceci montre les points 1, 2 et 3b.

3a. On a $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ donc $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{c} \div \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$.

Si $x \in \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$, i.e. $x\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$, alors $x\mathbf{A} = x\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}'\mathfrak{c}$, donc $x \in \mathfrak{a}'\mathfrak{c}$.

3c. Avec $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq \mathbf{A}$, supposons que $\mathfrak{a}(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) = \mathbf{A}$.

Il existe $x_1, \dots, x_k \in (\mathbf{A} \div \mathfrak{a})$ tels que $\sum_i x_i a_i = 1$ et $x_i a_j \in \mathfrak{a}$ pour tous i, j .

On peut écrire les x_i sous la forme $\frac{b_i}{c}$ avec un même dénominateur c . On obtient $\sum_i a_i b_i = c$ et $a_i b_j \in \langle c \rangle$ pour tous i, j .

Ainsi en posant $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ on obtient $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle c \rangle$.

5. L'inclusion $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \div \mathfrak{b}$ est immédiate. Réciproquement, si un $x \in \mathbf{K}$ vérifie $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, nous devons montrer que $x \in \mathbf{A}$.

Comme \mathbf{A} est intégralement clos dans $\text{Frac } \mathbf{A}$, on applique le point 3 du fait III-8.2, avec $M = \mathfrak{b}$ et $\mathbf{B} = \text{Frac } \mathbf{A}$, car $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.

4. Résulte du point 5 car on se ramène au cas traité dans le point 5, et dans un anneau cohérent, le transporteur $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ est de type fini si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} le sont. \square

Dans le fait 2.4, la réciproque nécessite une hypothèse supplémentaire.

2.4. Fait. Soient x un élément et \mathfrak{a} un idéal de \mathbf{A} . Pour les propriétés qui suivent on a $2 \Rightarrow 1$, et $1 \Rightarrow 2$ si \mathfrak{a} est fidèle et de type fini.

1. L'élément x est entier sur l'idéal \mathfrak{a} .
2. Il existe un \mathbf{A} -module fidèle M de type fini tel que $xM \subseteq \mathfrak{a}M$.

D (Comparer à la démonstration du fait III-8.2.)

$2 \Rightarrow 1$. On considère une matrice A à coefficients dans \mathfrak{a} qui représente $\mu_{M,x}$ (la multiplication par x dans M) sur un système générateur fini de M . Si f est le polynôme caractéristique de A , on a par le théorème de Cayley-Hamilton $0 = f(\mu_{M,x}) = \mu_{M,f(x)}$, et puisque le module est fidèle, $f(x) = 0$.
 $1 \Rightarrow 2$. Si l'on a une relation de dépendance intégrale de degré k de x sur \mathfrak{a} on prend $M = (\mathfrak{a} + \langle x \rangle)^{k-1}$. \square

Dans le **principe local-global 2.10** le point 2 est :

L'idéal \mathfrak{a} est intégralement clos dans \mathbf{A} si, et seulement si, ...

Théorème 4.5.

Dans la démonstration, bas de la page 682 et haut de la page 683, il faut permuter 1 et 2 dans les deux alinéas correspondants.

Dans le point 3 du **théorème 7.9** il faut rajouter «cohérent» dans les propriétés de l'anneau.

L'erratum suivant est dû à Claire Tête et Lionel Ducos.

La démonstration du théorème 7.12 supposait sans le dire que les corps résiduels sont finis. Pour obtenir un énoncé plus général et rectifier la démonstration, nous ajoutons tout d'abord un lemme à la fin de la section 5.

5.7. Lemme. (Radical de Jacobson d'un anneau de dimension ≤ 1)

Soit \mathbf{A} un anneau intègre de dimension ≤ 1 .

1. Pour tout a non nul dans \mathbf{A} on a $\text{Rad}(\mathbf{A}) \subseteq \sqrt[a]{a\mathbf{A}}$.
2. Pour \mathfrak{b} de type fini contenant $\text{Rad}(\mathbf{A})$, on a $\text{Rad}(\mathbf{A}) = \mathfrak{b}(\text{Rad}(\mathbf{A}) : \mathfrak{b})$.
3. Si $\text{Rad}(\mathbf{A})$ est un idéal inversible, \mathbf{A} est un domaine de Bezout

⊔ On note $\mathfrak{a} = \text{Rad}(\mathbf{A})$.

1. Soit $x \in \mathfrak{a}$, $\mathbf{A}/\langle x \rangle$ est zéro-dimensionnel, donc il existe $y, z \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $x^m(1 + xz) = ay$. Comme $x \in \text{Rad}(\mathbf{A})$, on a $1 + xz \in \mathbf{A}^\times$, donc $x^m \in a\mathbf{A}$ et $x \in \sqrt[m]{a\mathbf{A}}$.

2. Si $\mathfrak{a} = 0$ c'est clair, sinon l'anneau \mathbf{A}/\mathfrak{a} est zéro-dimensionnel réduit, donc l'idéal de type fini \mathfrak{b} est égal à un idéal $\langle e \rangle$ modulo \mathfrak{a} , avec e idempotent modulo \mathfrak{a} . Donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \langle e \rangle$, puis $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \langle 1 - e \rangle$, et enfin

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} + \langle e \rangle)(\mathfrak{a} + \langle 1 - e \rangle) = \mathfrak{a}.$$

3. Soit \mathfrak{c}_1 un idéal de type fini non nul arbitraire. On définit $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{b}_1)$. D'après le point 2, puisque \mathfrak{a} est inversible, \mathfrak{b}_1 également. Si $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}' = \langle b \rangle$ (b régulier), tous les éléments de $\mathfrak{c}_1 \mathfrak{b}'$ sont divisibles par b , on considère alors $\mathfrak{d} = \frac{1}{b} \mathfrak{c}_1 \mathfrak{b}'$, donc $\mathfrak{d} \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1$ et \mathfrak{d} est de type fini. On a clairement $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{c}_2$. Réciproquement si $x \mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{c}_1$ alors $bx = x \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b} \mathfrak{d}$, donc $x \in \mathfrak{d}$. En bref $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}$ et l'on a établi l'égalité $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1$, avec \mathfrak{c}_2 de type fini. En itérant le processus on obtient une suite croissante d'idéaux de type fini $(\mathfrak{c}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_k : \mathfrak{b}_k)$ et $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + \mathfrak{a}$.

En fait $\mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{c}_1 : (\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a})) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a})$, puis $\mathfrak{c}_3 = (\mathfrak{c}_2 : \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}^2)$ et plus généralement $\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}^k)$.

Soit $a \neq 0$ dans \mathfrak{c}_1 . Par le point 1, $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{a\mathbf{A}}$. Or \mathfrak{a} est de type fini, donc l'inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{a\mathbf{A}}$ implique que pour un certain k , $\mathfrak{a}^k \subseteq a\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{c}_1$, donc $\mathfrak{c}_{k+1} = \langle 1 \rangle$.

Lorsque $\mathfrak{c}_{k+1} = \langle 1 \rangle$, on a $\mathfrak{c}_1 = \prod_{i=1}^k \mathfrak{b}_i$, qui est inversible comme produit d'idéaux inversibles.

On a montré que tout idéal de type fini non nul est inversible, donc l'anneau est un domaine de Prüfer, et d'après la proposition 5.3 c'est un anneau de Bezout. \square

Voici le théorème 7.12 rectifié. On a ajouté comme hypothèse que les corps résiduels des idéaux maximaux contenant le discriminant sont parfaits.

7.12. Théorème. (Un calcul de clôture intégrale)

Soit \mathbf{A} un anneau de Dedekind, $\mathbf{K} = \text{Frac}(\mathbf{A})$, $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ une \mathbf{K} -algèbre étale et \mathbf{B} la clôture intégrale de \mathbf{A} dans \mathbf{L} .

Supposons que $\mathbf{L} = \mathbf{K}[X]/\langle f \rangle$ avec $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire et $\text{disc}_X(f) \in \text{Reg } \mathbf{A}$ (ce qui n'est pas vraiment restrictif). Si $\langle \text{disc}_X(f) \rangle$ admet une factorisation totale, et si pour chaque idéal maximal \mathfrak{m} de cette factorisation, le corps résiduel \mathbf{A}/\mathfrak{m} est parfait, alors \mathbf{B} est un \mathbf{A} -module projectif de type fini.

⊔ Comme \mathbf{A} est quasi intègre, il suffit de traiter le cas où \mathbf{A} est intègre (machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres), donc \mathbf{K} est un corps discret. L'hypothèse $\mathbf{L} = \mathbf{K}[X]/\langle f \rangle$ avec $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire et $\text{disc}_X(f) \in \text{Reg } \mathbf{A}$ n'est pas vraiment restrictive car d'après le théorème VI-1.9, \mathbf{L} est un produit de \mathbf{K} -algèbres étales monogènes. On peut

même supposer que \mathbf{L} est un corps étale sur \mathbf{K} (machinerie locale-globale élémentaire des anneaux zéro-dimensionnels réduits).

On pose $\Delta = \text{disc}_X(f)$. D'après le point 5 du théorème 4.10 on a les inclusions

$$\mathbf{A}[x] \subseteq \mathbf{B} \subseteq \frac{1}{\Delta} \mathbf{A}[x].$$

Ainsi \mathbf{B} est un sous-module du \mathbf{A} -module de type fini $\frac{1}{\Delta} \mathbf{A}[x]$. D'après le théorème 4.5, si \mathbf{B} est de type fini, il est projectif de type fini.

On a $\mathbf{A}[x, \frac{1}{\Delta}] = \mathbf{B}[\frac{1}{\Delta}]$, donc \mathbf{B} est de type fini après localisation en $\Delta^{\mathbb{N}}$. Il reste à montrer que \mathbf{B} est de type fini après localisation en $S = 1 + \Delta \mathbf{A}$. L'anneau \mathbf{A}_S est un anneau de Bezout (théorème 6.1). Si $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ sont les idéaux maximaux qui interviennent dans la factorisation totale de Δ , les monoïdes $1 + \mathfrak{p}_i$ sont comaximaux dans \mathbf{A}_S , et il suffit de montrer que \mathbf{B} est de type fini après localisation en chacun des $1 + \mathfrak{p}_i$. On est ainsi ramené au cas traité dans le lemme 7.13 qui suit. \square

Notez qu'un domaine de Dedekind local \mathbf{V} est aussi bien un domaine de valuation noethérien fortement discret, ou encore un anneau principal local avec \mathbf{V}^\times détachable. Le lemme demande en outre que le radical soit principal, ce qui est automatique en mathématiques classiques.

7.13. Lemme. *Soit \mathbf{V} un domaine de Dedekind local avec $\text{Rad } \mathbf{V} = p\mathbf{V}$ et de corps résiduel $\mathbf{k} = \mathbf{V}/\langle p \rangle$ parfait. Soit $f \in \mathbf{V}[X]$ unitaire irréductible, donc $\Delta = \text{disc}_X(f) \in \text{Reg } \mathbf{V}$. Soit $\mathbf{K} = \text{Frac}(\mathbf{V})$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f \rangle$, et \mathbf{W} la clôture intégrale de \mathbf{V} dans \mathbf{L} . Alors \mathbf{W} est de type fini sur \mathbf{V} .*

D Puisque \mathbf{k} est parfait, d'après le lemme VI-1.16, pour tout polynôme unitaire f_i de $\mathbf{V}[X]$ on sait calculer la «partie sans carré» de $\overline{f_i}$ (f_i vu modulo p), i.e. un polynôme $\overline{g_i}$ séparable dans $\mathbf{k}[X]$ qui divise $\overline{f_i}$, et dont une puissance est multiple de $\overline{f_i}$.

La stratégie est de rajouter des éléments $x_i \in \mathbf{W}$ à $\mathbf{V}[x]$ jusqu'au moment où l'on obtient un anneau \mathbf{W}' dont le radical est un idéal inversible. Lorsque ceci est réalisé, nous savons d'après le lemme 5.7 que \mathbf{W}' est un domaine de Prüfer, donc qu'il est intégralement clos, donc égal à \mathbf{W} .

Pour «construire» \mathbf{W}' (de type fini sur \mathbf{V}) on va utiliser dans une récurrence le fait suivant, initialisé avec $\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}[x]$ ($x_1 = x, r_1 = 1$).

Fait. Soit $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}[x_1, \dots, x_{r_k}] \subseteq \mathbf{W}$, alors

$$\text{Rad}(\mathbf{W}_k) = \langle p, g_1(x_1), \dots, g_k(x_{r_k}) \rangle,$$

où $\overline{g_i}$ est la partie sans carré de $\overline{f_i}$, f_i polynôme minimal sur \mathbf{K} de l'entier x_i .

Le théorème IX-1.8 nous dit que $\text{Rad}(\mathbf{W}_k) = D_{\mathbf{W}_k}(p\mathbf{W}_k)$. Cet idéal est l'image réciproque de $D_{\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k}(0)$ et l'on a $\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k = \mathbf{k}[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{r_k}}]$. Comme les $g_i(x_i)$ sont nilpotents modulo p par construction, ils sont dans le nilradical $D_{\mathbf{W}_k}(p\mathbf{W}_k)$. Il nous suffit maintenant de vérifier que la \mathbf{k} -algèbre

$$\mathbf{k}[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{r_k}}] / \langle \overline{g_1}(x_1), \dots, \overline{g_{r_k}}(x_{r_k}) \rangle$$

est réduite. En fait \mathbf{W}_k est un sous- \mathbf{V} -module de type fini de $\frac{1}{\Delta} \mathbf{V}[x]$, donc est libre fini sur \mathbf{V} . En conséquence $\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k$ est strictement finie sur \mathbf{k} , et elle est étale parce qu'elle est engendrée par des éléments qui annulent des polynômes séparables sur \mathbf{k} (théorème VI-1.7). \square

Ceci étant vu, puisque \mathbf{W} est un domaine de Prüfer, nous savons inverser l'idéal de type fini $\text{Rad}(\mathbf{W}_k)$ dans \mathbf{W} .

Cela signifie calculer des éléments $x_{r_{k+1}}, \dots, x_{r_{k+1}}$ de \mathbf{W} et un idéal de type fini \mathfrak{g}_k dans le nouvel anneau \mathbf{W}_{k+1} tels que l'idéal produit $\mathfrak{g}_k \text{Rad}(\mathbf{W}_k)$ soit principal (non nul).

Il se peut cependant que les générateurs de $\text{Rad}(\mathbf{W}_k)$ n'engendrent pas l'idéal $\text{Rad}(\mathbf{W}_{k+1})$ de \mathbf{W}_{k+1} , ce qui oblige à itérer le processus.

La suite croissante des \mathbf{W}_k est une suite croissante de \mathbf{V} -modules de type fini contenus dans $\frac{1}{\Delta} \mathbf{V}[x]$, donc elle admet deux termes consécutifs égaux. Dans ce cas on a atteint le but prescrit. \square

Le commentaire bibliographique sur les anneaux héréditaires, page 722, est incorrect (il est indiqué qu'un anneau héréditaire est noethérien), et doit être modifié comme suit.

Un *anneau héréditaire* est un anneau dans lequel tout idéal est projectif. Cette notion est mal définie en mathématiques constructives à cause de la quantification non légitime « tout idéal ». On peut citer un exemple d'un tel anneau non noethérien, qui est le sous anneau d'un produit dénombrable de corps \mathbb{F}_2 , formé par les suites qui sont ou bien presque partout nulles, ou bien presque partout égales à 1.

Le cas le plus intéressant est celui des anneaux de Prüfer cohérents noethériens, que l'on décrit en mathématiques classiques comme les anneaux dans lesquels tout idéal est projectif de type fini. Il s'agit alors d'une variante non intègre de la notion d'anneau de Dedekind. Notre définition pour un anneau de Dedekind (libéré de la contrainte d'intégrité) correspond exactement (en mathématiques classiques) à la notion d'anneau héréditaire noethérien. Nous avons seulement précisé les choses, en demandant en outre que l'anneau soit cohérent fortement discret (ce qui est automatiquement vérifié si l'on admet le principe du tiers exclu), pour que l'on puisse mener les calculs les plus usuels dans nos anneaux de Dedekind. Mais nous n'avons pas demandé la propriété de factorisation complète, qui n'est pas suffisamment stable.

Chapitre XIII

Dimension de Krull

Une meilleure démonstration pour le **théorème 5.4**

▷ La dimension de Krull est $\leq r$ par application de la proposition 5.2. On peut d'ailleurs donner une preuve du fait que $r + 1$ éléments de \mathbf{A} sont algébriquement dépendants sur \mathbf{K} dans le même style que celle donnée page 812 pour une algèbre de polynômes.

Enfin la dimension de Krull est $\geq r$ d'après la proposition 4.1.

Notons que le théorème 7.16 nous donne une autre démonstration, via l'égalité $\text{Kdim } \mathbf{A} = \text{Kdim } \mathbf{B}$. \square

Exercice 17. Le point 3 doit être remplacé par ce qui suit, suivi de sa solution.
énoncé

3. Pour un treillis distributif \mathbf{T} les propriétés suivantes sont équivalentes.

- a. \mathbf{T} est de dimension de Krull $\leq n$.
- b. Toute chaîne de longueur n admet une suite complémentaire.
- c. Toute chaîne de longueur n admet une chaîne qui lui est liée.

solution

3. Le point 3a implique le point 3c d'après le point 2. Le point 3c implique le point 3b parce qu'une chaîne liée est un cas particulier de suite complémentaire. Pour voir que 3b implique 3a, soit y_0, \dots, y_n une suite arbitraire. On définit alors $x_0 = y_0$, $x_i = y_i \vee x_{i-1}$ ($i \in \llbracket 1..n \rrbracket$). Soit (a_0, \dots, a_n) une suite complémentaire de (x_0, \dots, x_n) .

On définit $b_0 = a_0$ et $b_i = a_i \vee x_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$. On a alors $x_i \vee a_i = y_i \vee b_i$ pour $i \in \llbracket 0..n \rrbracket$. Donc $0 = x_0 \wedge a_0 = y_0 \wedge b_0$ et $1 = x_n \vee a_n = y_n \vee b_n$. Voyons maintenant les inégalités intermédiaires. Pour $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$ on a $x_i \wedge a_i \leq x_{i-1} \vee a_{i-1}$, et donc

$$y_i \wedge a_i \leq x_i \wedge a_i \leq x_{i-1} \vee a_{i-1} = y_{i-1} \vee b_{i-1},$$

d'où

$$y_i \wedge b_i = y_i \wedge (a_i \vee x_{i-1}) = (y_i \wedge a_i) \vee (y_i \wedge x_{i-1}) \leq (y_i \wedge a_i) \vee x_{i-1}.$$

Comme les deux derniers termes après \leq sont majorés par $x_{i-1} \vee a_{i-1} = y_{i-1} \vee b_{i-1}$, on obtient bien l'inégalité $y_i \wedge b_i \leq y_{i-1} \vee b_{i-1}$.

Chapitre XV

Le principe local-global

Dans le paragraphe 4) du commentaire qui suit le principe local-global abstrait XV-3.1, il y a une confusion entre les foncteurs Tor et Ext. Voici le texte réctifié.

4) Dans l'article [10], Hyman Bass fait le commentaire suivant concernant une version affaiblie du principe local-global abstrait 3.1, point 7.

Aussi élémentaire que ce résultat puisse paraître, il ne semble pas qu'aucune preuve puisse en être donnée sans utiliser, ou reconstruire pour l'essentiel, le foncteur Ext¹.

Ce commentaire est étonnant, au vu du caractère tout à fait anodin de notre preuve du principe concret correspondant, laquelle ne calcule rien qui ressemble à un Ext¹. En fait, lorsque le but est de montrer le scindage d'une suite exacte courte, il semble que l'efficace machinerie calculatoire des Ext est souvent inutile, et qu'elle peut être court-circuitée par un argument plus élémentaire.

Dans la démonstration du principe local-global 4.2 (Recollement concret d'éléments dans un module, et d'homomorphismes entre modules)

Primo. Il faut supprimer la première phrase de la démonstration, car elle ne correspond pas à la réalité. « Nous écrivons la démonstration avec des localisations en des éléments comaximaux, ce qui ne change rien. »

Secundo. Ligne 2 du point 2 de la démonstration :

$x \in M$ au lieu de $x \in \mathbf{A}$

Tertio. Dans l'explication du cas simple où \mathbf{A} est intègre, il faut aussi demander que les s_i soient non nuls et le module M sans torsion.

Quarto. Tout à la fin de la démonstration : (point 2). au lieu de (point 1).

Dans l'énoncé et la démonstration du principe local-global 4.4 les conditions de compatibilité sont appréciées de manière complètement erronée.

Voici l'énoncé et la démonstration correctes, ainsi qu'une réécriture de la remarque qui suit, sous forme maintenant d'une reformulation du principe local-global concret.

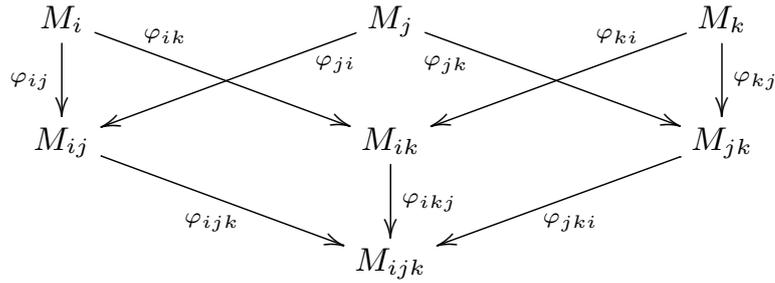
4.4. Principe local-global concret. (Recollement concret de modules)

Soient S_1, \dots, S_n des monoïdes comaximaux de \mathbf{A} .

Notons $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{S_i}$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{S_i S_j}$ et $\mathbf{A}_{ijk} = \mathbf{A}_{S_i S_j S_k}$. On donne dans la catégorie des \mathbf{A} -modules un diagramme commutatif \mathfrak{D} :

$$((M_i)_{i \in I}, (M_{ij})_{i < j \in I}, (M_{ijk})_{i < j < k \in I}; (\varphi_{ij})_{i \neq j}, (\varphi_{ijk})_{i < j, i \neq k, j \neq k})$$

comme dans la figure ci-après.



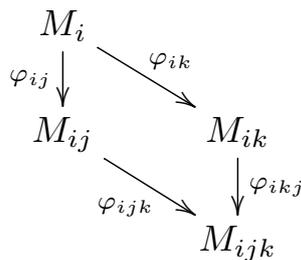
On suppose que

- Pour tous i, j, k (avec $i < j < k$), M_i est un \mathbf{A}_i -module, M_{ij} est un \mathbf{A}_{ij} -module et M_{ijk} est un \mathbf{A}_{ijk} -module. Rappelons que selon nos conventions de notation on pose $M_{ji} = M_{ij}$, $M_{ijk} = M_{ikj} = \dots$
- Pour $i \neq j$, $\varphi_{ij} : M_i \rightarrow M_{ij}$ est un morphisme de localisation en S_j (vu dans \mathbf{A}_i).
- Pour $i \neq k, j \neq k$ et $i < j$, $\varphi_{ijk} : M_{ij} \rightarrow M_{ijk}$ est un morphisme de localisation en S_k (vu dans \mathbf{A}_{ij}).

Alors, en notant $(M, (\varphi_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket})$ la limite projective du diagramme, chaque morphisme $\varphi_i : M \rightarrow M_i$ est un morphisme de localisation en S_i . En outre $(M, (\varphi_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket})$ est, à isomorphisme unique près, l'unique système qui rend le diagramme commutatif et qui fait de chaque φ_i un morphisme de localisation en S_i .

⊔ Le premier point ne dépend pas du fait que les S_i sont comaximaux. En effet la construction d'une limite projective de \mathbf{A} -modules pour un diagramme arbitraire est stable par extension des scalaires plate (parce qu'il s'agit du noyau d'une application linéaire entre deux produits).

Or si l'on prend comme extension des scalaires le morphisme de localisation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_i$, le diagramme se simplifie comme suit



et il admet trivialement la limite projective M_i .

Pour démontrer l'unicité, nous raisonnons sans perte de généralité avec un système d'éléments comaximaux (s_1, \dots, s_n) . Soit $(N, (\psi_i))$ un concurrent. Puisque M est la limite projective du diagramme, il y a une unique application \mathbf{A} -linéaire $\lambda : N \rightarrow M$ telle que $\psi_i = \varphi_i \circ \lambda$ pour tout i . En fait on a $\lambda(v) = (\psi_1(v), \dots, \psi_n(v))$. Montrons que λ est injective. Si $\lambda(v) = 0$ tous les $\psi_i(v)$ sont nuls, et puisque ψ_i est un morphisme de localisation en s_i , il existe des exposants m_i tels que $s_i^{m_i} v = 0$.

Puisque les s_i sont comaximaux, on a $v = 0$. Comme λ est injective on peut supposer $N \subseteq M$ et $\psi_i = \varphi_i|_N$. Montrons que $N = M$. Soit $x \in M$.

Comme ψ_i et φ_i sont deux morphismes de localisation en s_i , il y a un exposant m_i tel que $xs_i^{m_i} \in N$. Puisque les s_i sont comaximaux, $x \in N$. \square

Remarque. Pour comprendre pourquoi la condition de comaximalité est vraiment nécessaire pour l'unicité, examinons l'exemple «trop simple» suivant. Avec l'anneau \mathbb{Z} , et l'unique élément $s = 2$, prenons pour M un $\mathbb{Z}[1/2]$ -module libre de base (a) (où a est un objet individuel arbitraire). Pour y voir clair, nous notons M' le \mathbb{Z} -module M .

Considérons aussi le \mathbb{Z} -module N libre de base (a) . Considérons deux morphismes de localisation en $2^{\mathbb{N}}$, $\varphi : M' \rightarrow M$ et $\psi : N \rightarrow M$. Ils envoient tous deux a sur a . Ainsi M' et N ne sont pas isomorphes comme \mathbb{Z} -modules et l'unicité est en défaut.

Si l'on avait pris $s = 1$ on pourrait définir deux morphismes de localisation en 1 distincts, à savoir $\phi_1 : N \rightarrow N$, $a \mapsto a$, et $\phi_2 : N \rightarrow N$, $a \mapsto -a$, et l'unicité serait assurée au sens demandé dans l'énoncé. \blacksquare

En pratique, on construit souvent un module en donnant des \mathbf{A}_i -modules M_i et en les recollant via leurs localisations $M_{ij} = M_i[1/s_j]$. Dans ce cas les modules M_{ij} et M_{ji} sont distincts, et l'on doit donner pour chaque (i, j) un isomorphisme de \mathbf{A}_{ij} -modules $\theta_{ij} : M_{ij} \rightarrow M_{ji}$. Cela donne la variante suivante, dans laquelle on omet les modules M_{ijk} , mais où l'on indique les conditions de compatibilité que doivent satisfaire les θ_{ij} pour permettre l'existence de M_{ijk} convenables.

Principe local-global concret 4.4 bis (Recollement concret de modules)

Soient S_1, \dots, S_n des monoïdes comaximaux de \mathbf{A} .

Notons $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{S_i}$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{S_i S_j}$ et $\mathbf{A}_{ijk} = \mathbf{A}_{S_i S_j S_k}$.

On suppose donnés des \mathbf{A}_i -modules M_i et l'on note

$M_{j\ell} = M_j[1/s_\ell]$ et $M_{jkl} = M_j[1/s_k s_\ell]$ pour tous j, k, ℓ distincts $\in \llbracket 1..n \rrbracket$, de sorte que $M_{jkl} = M_{j\ell k}$, avec les morphismes de localisation

$$\varphi_{j\ell} : M_j \rightarrow M_{j\ell} \quad \text{et} \quad \varphi_{j\ell k} : M_{j\ell} \rightarrow M_{j\ell k}.$$

On suppose donnés aussi des morphismes de \mathbf{A}_{ij} -modules $\theta_{ij} : M_{ij} \rightarrow M_{ji}$.

On note $\theta_{ij}^k : M_{ijk} \rightarrow M_{jik}$ le morphisme de \mathbf{A}_{ijk} -modules obtenu par localisation en s_k à partir de θ_{ij} . On suppose enfin que les relations de compatibilité suivantes sont satisfaites :

- $\theta_{ji} \circ \theta_{ij} = \text{Id}_{M_{ij}}$ pour $i \neq j \in \llbracket 1..n \rrbracket$,
- pour i, j, k distincts dans $\llbracket 1..n \rrbracket$, en composant circulairement

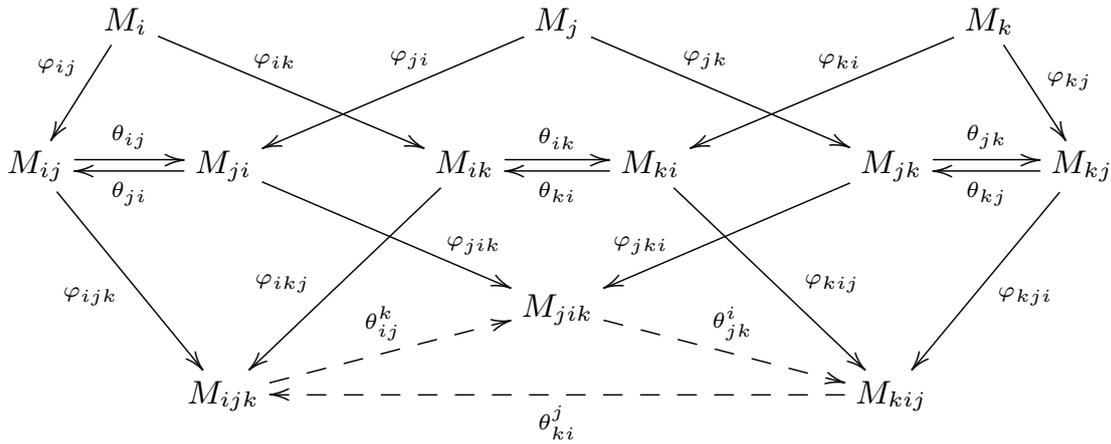
$$M_{ijk} \xrightarrow{\theta_{ij}^k} M_{jik} = M_{jki} \xrightarrow{\theta_{jk}^i} M_{kji} = M_{kij} \xrightarrow{\theta_{ki}^j} M_{ikj}$$

on doit obtenir l'identité.

Alors, si $(M, (\varphi_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket})$ est la limite projective du diagramme

$$((M_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket}), (M_{ij})_{i \neq j \in \llbracket 1..n \rrbracket}; (\varphi_{ij})_{i \neq j}, (\theta_{ij})_{i \neq j},$$

chaque morphisme $\varphi_i : M \rightarrow M_i$ est un morphisme de localisation en S_i .
 En outre, $(M, (\varphi_i)_{i \in \llbracket 1..n \rrbracket})$ est, à isomorphisme unique près, l'unique système qui rend le diagramme commutatif et qui fait de chaque φ_i un morphisme de localisation en S_i .



D Notez que le diagramme ci-dessus est commutatif par construction, sauf éventuellement le triangle du bas en trait-tirets, chaque fois qu'il est possible de joindre deux modules par deux chemins différents : par exemple $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ijk} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{ikj}$ et $\theta_{ij}^k \circ \varphi_{ijk} = \varphi_{jik} \circ \theta_{ij}$.

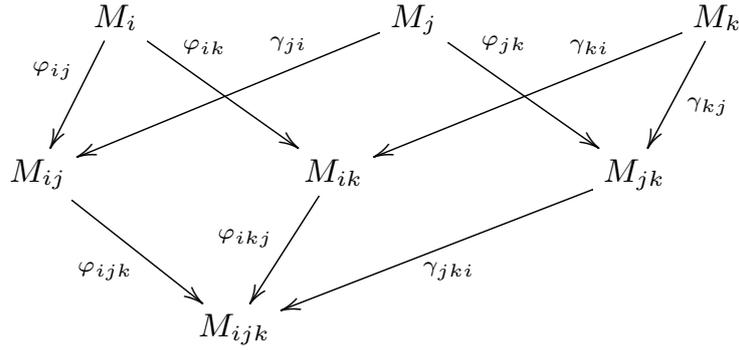
Nous devons ici nous convaincre que les conditions de compatibilité indiquées sont exactement ce qui est nécessaire et suffisant pour se ramener à la situation décrite au principe local-global 4.4.

Pour cela, lorsque $i < j < k$ nous conserverons seulement M_{ij} , M_{ik} , M_{jk} et $M_{ijk} = M_{ikj}$.

Ceci nous force à remplacer

$$\begin{array}{llll}
 \varphi_{ji} & : & M_j \rightarrow M_{ji} & \text{par} & \gamma_{ji} = \theta_{ji} \circ \varphi_{ji} & : & M_j \rightarrow M_{ij}, \\
 \varphi_{ki} & : & M_k \rightarrow M_{ki} & \text{par} & \gamma_{ki} = \theta_{ki} \circ \varphi_{ki} & : & M_k \rightarrow M_{ik}, \\
 \varphi_{kj} & : & M_k \rightarrow M_{kj} & \text{par} & \gamma_{kj} = \theta_{kj} \circ \varphi_{kj} & : & M_k \rightarrow M_{jk}, \\
 \varphi_{jki} & : & M_{jk} \rightarrow M_{jik} & \text{par} & \gamma_{jki} = \theta_{ji}^k \circ \varphi_{jki} & : & M_{jk} \rightarrow M_{ijk}.
 \end{array}$$

Jusqu'ici tout se passe sans encombre (en relation avec les modules à deux et trois indices que l'on a décidé de conserver) : les carrés de sommets M_i et M_j sont commutatifs et les flèches sont des morphismes de localisation. C'est seulement avec les deux morphismes de localisation $M_k \rightarrow M_{ijk}$ que l'on va voir le problème.



Les deux morphismes de localisation sont maintenant imposés, à savoir, celui qui passe par M_{ik} , qui doit être

$$\varphi_{ikj} \circ \gamma_{ki} = \varphi_{ikj} \circ \theta_{ki} \circ \varphi_{ki} = \theta_{ki}^j \circ \varphi_{kij} \circ \varphi_{ki},$$

et celui qui passe par M_{jk} , qui doit être

$$\gamma_{jki} \circ \gamma_{kj} = \theta_{ji}^k \circ \varphi_{jki} \circ \theta_{kj} \circ \varphi_{kj} = \theta_{ji}^k \circ \theta_{kj}^i \circ \varphi_{kji} \circ \varphi_{kj}.$$

Comme $\varphi_{kij} \circ \varphi_{ki} = \varphi_{kji} \circ \varphi_{kj}$, la fusion a réussi si $\theta_{ki}^j = \theta_{ji}^k \circ \theta_{kj}^i$.

En fait la condition est aussi nécessaire parce que « tout morphisme de localisation est un épimorphisme » : si $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$ avec φ un morphisme de localisation, alors $\psi_1 = \psi_2$. \square

Dans l'énoncé du principe local-global 4.6 (Recollement de morphismes d'anneaux) il est implicitement supposé que les deux homomorphismes

$$\beta_{ij} \circ \varphi_i : \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{B}_{ij} \text{ et } \beta_{ji} \circ \varphi_j : \mathbf{A}_j \rightarrow \mathbf{B}_{ij}$$

peuvent se factoriser via un même homomorphisme $\varphi_{ij} : \mathbf{A}_{ij} \rightarrow \mathbf{B}_{ij}$. En particulier $\beta_{ij}(\varphi_i(s_i s_j))$ et $\beta_{ji}(\varphi_j(s_i s_j))$ doivent être égaux et inversibles, ce qui donne des factorisations, mais il faut aussi indiquer que les deux factorisations doivent être les mêmes.

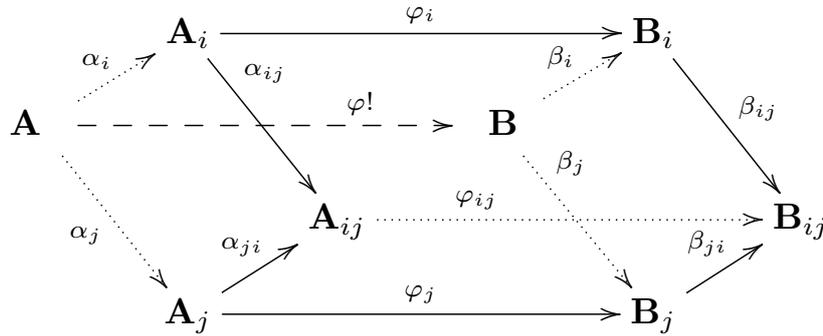
Cela donnerait donc la chose suivante en explicitant la chose implicite.

4.6. Principe local-global concret. (Recollement de morphismes d'anneaux) Soient \mathbf{A} et \mathbf{B} deux anneaux, s_1, \dots, s_n des éléments comaximaux de \mathbf{A} et t_1, \dots, t_n des éléments comaximaux de \mathbf{B} . Posons

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/s_i], \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}[1/s_i s_j], \mathbf{B}_i = \mathbf{B}[1/t_i] \text{ et } \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{B}[1/t_i t_j].$$

Pour chaque $i \in \llbracket 1..n \rrbracket$, soit $\varphi_i : \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{B}_i$ un homomorphisme. Supposons que les conditions de compatibilité suivantes soient satisfaites : pour $i \neq j$ les deux homomorphismes $\beta_{ij} \circ \varphi_i : \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{B}_{ij}$ et $\beta_{ji} \circ \varphi_j : \mathbf{A}_j \rightarrow \mathbf{B}_{ij}$ se factorisent via \mathbf{A}_{ij} et donnent un même homomorphisme $\varphi_{ij} : \mathbf{A}_{ij} \rightarrow \mathbf{B}_{ij}$

(voir le diagramme).



Alors il existe un unique homomorphisme $\varphi : A \rightarrow B$ tel que pour chaque i , on ait $\varphi_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \varphi$.

Chapitre XVI

Modules projectifs étendus

La démonstration du théorème 6.6 et du lemme 6.7 est un peu plus claire sous la forme suivante.

6.6. Théorème. *Si V est un anneau de valuation, $V[X]$ est 2-stable.*

On commence par le lemme suivant (la démonstration du théorème est reportée page 23).

6.7. Lemme. *Soient V un anneau de valuation et V' le sous-anneau de valuation de V engendré par une famille finie d'éléments de V . Alors, $V'[X]$ est 2-stable.*

▷ Notons V_1 le sous-anneau de V engendré par la famille finie. Notons

$$V' = \{ c/b \mid c, b \in V_1, b \text{ régulier divise } c \text{ dans } V \} \subseteq \text{Frac}(V_1).$$

On voit facilement que V' est un anneau de valuation. On sait que V_1 est de dimension de Krull finie (lemme XIII-5.3), disons $\text{Kdim}(V_1) \leq m$. Montrons que l'on a aussi $\text{Kdim}(V') \leq m$. Le théorème XIII-8.4 nous dit le contrat à remplir pour cela. On doit considérer une suite (y_0, \dots, y_m) avec

$$D_{V'}(y_0) \leq D_{V'}(y_1) \leq \dots \leq D_{V'}(y_m).$$

On peut écrire $y_k = x_k/b$ pour un même dénominateur $b \in \text{Reg}(V_1)$ et des $x_k \in V_1$. On a maintenant

$$D_{V'}(x_0) \leq D_{V'}(x_1) \leq \dots \leq D_{V'}(x_m),$$

Introduisons une suite (a_0, \dots, a_m) complémentaire de celle des x_i dans V_1 .

A fortiori elle est complémentaire dans \mathbf{V}' . Puisque $\text{Zar } \mathbf{V}'$ est totalement ordonné, le lemme XIII-8.3 nous dit que $D_{\mathbf{V}'}(x_0) = D_{\mathbf{V}'}(0)$, ou $D_{\mathbf{V}'}(x_m) = D_{\mathbf{V}'}(1)$, ou $D_{\mathbf{V}'}(x_i) = D_{\mathbf{V}'}(x_{i+1})$ pour un $i \in \llbracket 0..m-1 \rrbracket$. Et l'on en déduit la même chose pour les $D_{\mathbf{V}'}(y_i)$: le contrat est rempli.

Soient ℓ_1, ℓ_2 et a dans $\mathbf{V}'[X]$. Nous posons $L = (\ell_1, \ell_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$. Nous cherchons $q_1, q_2 \in \mathbf{V}'[X]$ qui vérifient $D_{\mathbf{V}'[X]}(a, L) = D_{\mathbf{V}'[X]}(L + aQ)$. Si \mathbf{V}' était un corps discret, on disposerait d'un algorithme pour calculer Q à partir de L . En exécutant cet algorithme, nous utiliserions le test « $y = 0$ ou y inversible ?» pour des éléments $y \in \mathbf{V}_1$ qui se présentent au cours du calcul (en effet, dans le cas où \mathbf{V}' est un corps discret, un y/z dans \mathbf{V}' est nul si y est nul, inversible si y est inversible, z ayant été déjà certifié inversible).

Nous pouvons transformer l'algorithme de façon dynamique en remplaçant chaque test « $y = 0$ ou y inversible ?» par le scindage de «l'anneau \mathbf{A} en cours», qui donne les deux anneaux $\mathbf{A}[1/y]$ et $\mathbf{A}/D_{\mathbf{A}}(y)$.

Au départ $\mathbf{A} = \mathbf{V}'$. Comme dans \mathbf{V}' les éléments sont comparables pour la divisibilité, tous les anneaux introduits peuvent être ramenés à la forme standard $\mathbf{V}'/D_{\mathbf{V}'}(y_i)[1/y_{i-1}]$ ($i \in \llbracket 2..k \rrbracket$) pour une famille finie $(y_i)_{i \in \llbracket 1..k \rrbracket}$ de \mathbf{V}_1 , avec y_{i-1} divise y_i dans \mathbf{V}' pour $i \in \llbracket 2..k \rrbracket$.

Ici nous pourrions avoir l'impression d'avoir gagné dans la mesure où nous pourrions dire : nous appliquons maintenant le lemme XIV-4.15.

Mais en lisant la démonstration de ce lemme, nous voyons que lors d'un scindage $\mathbf{B} \mapsto (\mathbf{B}[1/b], \mathbf{B}/\langle b \rangle)$, d'abord les données L et a produisent un Q pour $\mathbf{B}/\langle b \rangle$, puis $L + aQ$ et ab produisent un R pour $\mathbf{B}[1/b]$, le résultat final étant que $Q + bR$ convient pour L et a dans \mathbf{B} .

Ainsi la dynamique de notre algorithme transformé doit être mieux contrôlée². Ce qui nous sauve la mise, c'est que dans notre utilisation dynamique du lemme XIV-4.15, les calculs qui démarrent avec L et a restent entièrement dans $\mathbf{V}' \subseteq \text{Frac}(\mathbf{V}_1)$. En conséquence, nous pouvons être certains de ne pas entrer dans une boucle infinie où le nombre d'anneaux $\mathbf{V}'/D_{\mathbf{V}'}(y_i)[1/y_{i-1}]$ croîtrait indéfiniment, ce qui empêcherait la terminaison de l'algorithme. En effet, puisque \mathbf{V}' est de dimension de Krull $\leq m$, on dispose d'une procédure qui, étant donnée une famille finie (y_i) comme ci-dessus, permet de raccourcir la famille des $D_{\mathbf{V}'}(y_i)$ à au plus m éléments grâce au lemme XIII-8.3. Considérons en effet les $m + 1$ premiers termes consécutifs dans la suite des y_i , nous savons que l'une des trois situations suivantes se produit

- $D_{\mathbf{V}'}(y_1) = 0$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/D_{\mathbf{V}'}(y_2)[1/y_1]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_1 ,
- $D_{\mathbf{V}'}(y_{m+1}) = 1$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/D_{\mathbf{V}'}(y_{m+1})[1/y_m]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_{m+1} ,

2. Sinon, le lemme pourrait en fait être démontré sans aucune hypothèse sur \mathbf{V} .

- pour un $i \in \llbracket 2, m+1 \rrbracket$, on a l'égalité $D_{\mathbf{V}'}(y_{i-1}) = D_{\mathbf{V}'}(y_i)$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/D_{\mathbf{V}'}(y_i)[1/y_{i-1}]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_i . \square

Remarque. Ainsi, une fois \mathbf{V}_1 fixé, l'anneau \mathbf{V}' se comporte, pour ce qui concerne la 2-stabilité de $\mathbf{V}'[X]$ comme l'anneau de dimension de Krull «finie > 0 mais entièrement contrôlée» qui était donné dans le paragraphe précédent : la suite des y_i , limitée à m termes, se comporte comme la suite des a_i du paragraphe précédent, à ceci près que les y_i sont produits de façon dynamique par l'exécution de l'algorithme alors que les a_i étaient donnés au départ. \blacksquare

Démonstration du théorème 6.6. Soient ℓ_1, ℓ_2 et a dans $\mathbf{V}[X]$. Nous cherchons $q_1, q_2 \in \mathbf{V}[X]$ vérifiant $D_{\mathbf{V}[X]}(a, L) = D_{\mathbf{V}[X]}(L+aQ)$ (avec $L = (\ell_1, \ell_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$). On applique le lemme 6.7 avec la famille finie constituée par les coefficients de ℓ_1, ℓ_2 et a . On trouve q_1, q_2 dans $\mathbf{V}'[X] \subseteq \mathbf{V}[X]$. \square