

8) INTRODUCTION AU PLAN HYPERBOLIQUE ET A SES MODELES

Introduction

Le plan hyperbolique a été inventé par Lobatchevski, en tant que plan vérifiant les hypothèses euclidiennes naturelles, à l'exception du postulat d'Euclide sur le parallélisme. En quelque sorte Lobatchevski a appliqué la méthode axiomatique d'Euclide avec un axiome contraire à l'intuition courante. Naturellement, d'autres mathématiciens de la même époque ont obtenu des résultats semblables à peu près au même moment.

Après son invention par la méthode axiomatique, on a trouvé différents modèles euclidiens pour le plan de Lobatchevski, ce qui lui a donné un droit incontestable à l'existence mathématique.

Les modèles les plus populaires sont les modèles conformes dans lesquels les angles lus sur le modèle sont égaux aux angles lus dans le plan hyperbolique. Nous présenterons de tels modèles dans les chapitres à venir.

Auparavant nous présenterons dans le chapitre 9 le modèle de Beltrami. Dans ce modèle, les points du plan hyperbolique sont représentés par les points à l'intérieur d'un disque fixé une fois pour toutes dans un plan euclidien ordinaire. Les droites du plan hyperbolique sont représentées par les cordes du cercle qui borde le disque. Les points de ce cercle sont alors vus comme points à l'infini du plan hyperbolique, et leur structure est celle d'une droite projective réelle.

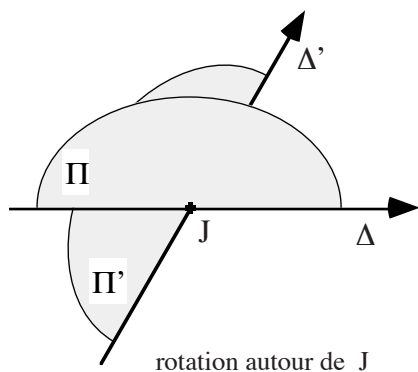
Le chapitre 8 est un chapitre introductif au plan hyperbolique. La section (a) est une introduction informelle, laquelle conduit assez naturellement au modèle de Beltrami. Dans la section (b) nous analysons la structure de droite hyperbolique, telle qu'elle est suggérée par la section (a) en la comparant aux deux structures analogues données par la droite euclidienne et le cercle euclidien, qui sont les droites du plan euclidien et du plan sphérique.

a) Quelques propriétés intuitives inévitables du plan hyperbolique

La géométrie des puzzles

Nous entendons par *géométrie des puzzles* la géométrie des objets solides plans. Selon une telle géométrie, on peut déplacer une pièce de puzzle d'un endroit à l'autre du plan en conformité avec la propriété de libre mobilité. La position d'une pièce (d'un puzzle) est déterminée avec trois degrés de liberté. Selon les deux premiers degrés de liberté, on peut amener un point de la pièce en un point arbitraire du plan. Ensuite, on peut faire tourner librement la pièce autour de ce point. En géométrie euclidienne plane ou en géométrie sphérique, cela est traduit de manière à la fois naturelle et savante par le théorème fondamental qui affirme que le groupe des isométries directes opère simplement transitivement sur les axes pointés (ou que le groupe des isométries opère simplement transitivement sur les drapeaux).

La libre mobilité a de nombreuses conséquences sur la structure du groupe des déplacements. Par exemple les déplacements qui fixent un point forment le même groupe $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ en géométrie euclidienne plane et en géométrie sphérique :



il s'agit toujours d'amener un axe pointé d'origine J sur un autre. Ce groupe des rotations autour d'un point est sous-jacent à la mesure des angles. La composition des rotations correspond à l'addition des angles. De même le groupe des translations le long d'une droite Δ est sous-jacent à la mesure des longueurs. La composition des translations le long de la droite Δ correspond à l'addition des longueurs. (Mais en géométrie sphérique la structure d'une droite est la même que celle d'un cercle.)

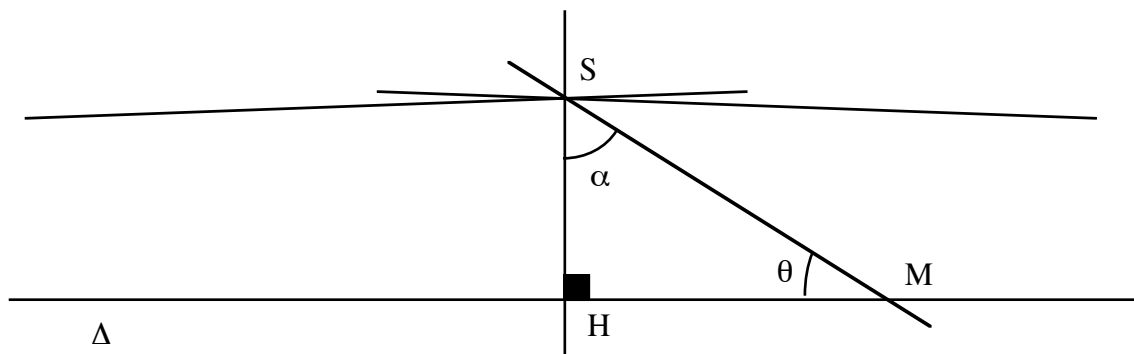
Autre exemple, un déplacement qui envoie A en B peut être décomposé en une translation de A à B le long de la droite (AB) suivi d'une rotation autour du point B , qu'on soit en géométrie euclidienne plane ou en géométrie sphérique.

Les traditionnels cas d'égalité des triangles sont eux aussi des conséquences de la libre mobilité. Ils constituent des résultats de la géométrie des puzzles. Bien qu'ils soient formulés en utilisant des égalités de longueur et des égalités d'angles, ces deux notions sont des notions subordonnées au groupe des déplacements, et doivent leur légitimité à la propriété de libre mobilité. Par exemple la distance AB est égale à la distance CD si et seulement si le segment $[AB]$ est envoyé sur le segment $[CD]$ par le déplacement qui est le candidat naturel à réaliser cette coïncidence : la translation de A à C suivie d'une rotation convenable autour de C .

La géométrie sphérique, bien connue depuis des siècles n'a cependant pas porté ombrage à la toute puissance de la géométrie euclidienne comme géométrie de l'espace absolu. Cela est lié

à la difficulté d'imaginer une sphère pour elle-même, indépendamment de l'espace où elle est plongée, ce qui implique à son tour la difficulté d'imaginer la possibilité d'un espace sphérique de dimension 3. Cela tient aussi sans doute à l'intuition d'un univers infini. Qu'un segment de droite puisse se prolonger indéfiniment dans les deux directions était une des demandes formulées dès le départ par Euclide, qui semblait naturelle et incontestable à tout un chacun, et disqualifiait de ce fait la géométrie sphérique comme véritable concurrente de la géométrie euclidienne plane. En fait la géométrie sphérique n'a acquis un statut de géométrie autonome qu'après que la géométrie de Lobatchevski ait fait vaciller celle d'Euclide.

La géométrie hyperbolique est née de l'impossibilité de démontrer le cinquième postulat d'Euclide. Une formulation équivalente à ce postulat est la suivante. Considérons une droite Δ et un point S extérieur à Δ , puis les sécantes (SM) à Δ où M est un point variable sur Δ . Une de ces sécantes est la droite (SH) orthogonale à Δ au point H . En admettant, comme notre intuition nous le dit, que la droite Δ peut être prolongée indéfiniment dans ses deux directions opposées, quelle est la position limite de (SM) lorsque M s'éloigne indéfiniment sur Δ dans l'une des deux directions ?



Selon le cinquième postulat, les deux positions limites de la droite (SM) sont les mêmes. Autrement dit, chacune de ces deux positions limites, qui sont symétriques par rapport à la droite (SH) forme un angle droit avec (SH) : lorsque θ tend vers l'angle nul, α tend vers un angle droit. Notons que l'angle droit en α est impossible pour une sécante (SM) car sinon, par raison de symétrie, la droite (SM) couperait aussi Δ en le point M' symétrique de M par rapport à H , et il passerait deux droites distinctes par les points M et M' ⁽¹⁾. Dans le cas où la position limite de (SM) n'est pas orthogonale à (SH) la valeur limite de α serait strictement inférieure à un droit et il y aurait moyen d'insérer dans l'angle formé par les deux positions limites autant de droites que l'on veut ne coupant pas Δ et passant par S .

Contrairement à toutes les autres demandes ou postulats, il semblait peu naturel que le cinquième postulat doive être posé a priori. Mais sa négation, l'existence d'une infinité de parallèles à Δ passant par S , semblait encore moins naturelle. A force de chercher des conséquences néfastes à la négation de ce postulat, on finit par construire une géométrie cohérente, et sa beauté interne plaiderait en sa faveur. Furent ensuite découverts des modèles

¹ C'est par exemple le cas en géométrie sphérique. Il y aurait aussi la possibilité que M soit égal à M' . Mais cela contredit l'hypothèse selon laquelle une droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux directions, sans jamais se refermer sur elle-même.

euclidiens de la géométrie hyperbolique, ce qui enlevait tout soupçon d'incohérence à cette dernière.

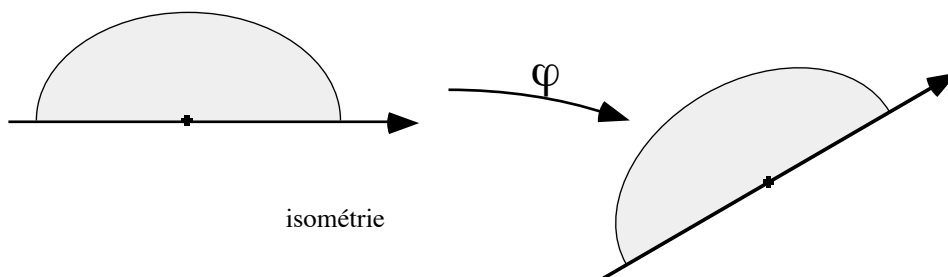
La géométrie des puzzles n'impose donc pas le cinquième postulat, pas plus qu'elle n'interdit la géométrie sphérique. Nous allons dans cette section explorer quelques conséquences intuitives de la négation du cinquième postulat, qui légitimeront en grande partie le parachutage du modèle de Beltrami au chapitre 9.

A vrai dire, notre intuition d'un espace homogène et isotrope est purement locale et il semble finalement peu logique d'imposer des conditions autres que locales à une géométrie des puzzles. Par exemple le fait que par deux points il passe une seule droite est certes raisonnable du point de vue de l'intuition locale, mais ne devrait être imposé que localement. En géométrie sphérique, il passe une infinité de droites par deux points antipodaux, mais ceci ne saurait en aucune manière la discréditer en tant que géométrie cohérente des puzzles. De la même manière on devrait seulement déplacer des figures finies, de taille raisonnable, et ne rien postuler concernant la possibilité de prolongement indéfini d'un déplacement à des figures arbitrairement grandes.

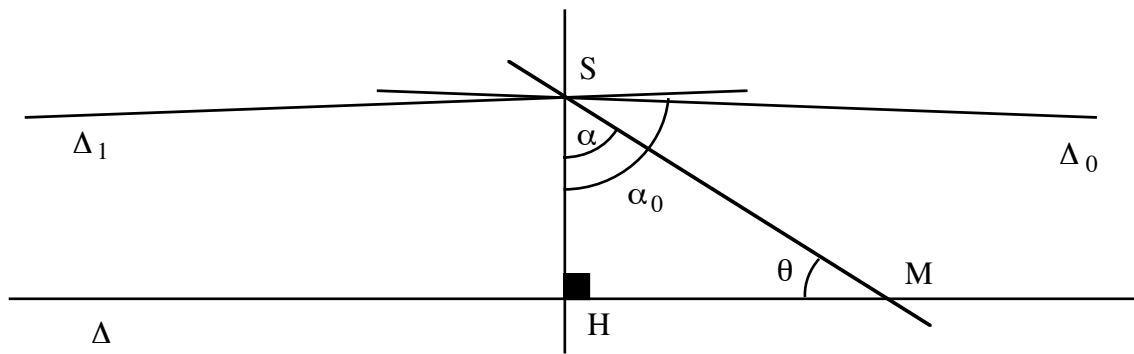
Si dans ce livre nous acceptons en définitive le point de vue global, ce n'est pas sans un certain remords, car nous préférierions rester plus proche de l'intuition purement locale. Nous avons privilégié le point de vue global uniquement en raison de l'avantage d'une plus grande simplicité de l'outillage mathématique correspondant.

Ce qu'on réclame d'un plan hyperbolique

Ce qu'on réclame d'un plan hyperbolique ce sont les mêmes ingrédients de base que dans un plan euclidien : les points, les droites, les segments, les demi droites, et... la possibilité de déplacer librement les pièces des puzzles, conformément au dessin avec lequel nous avons maintenant une certaine familiarité.



Ceci implique les notions d'égalité de longueurs ou d'égalité d'angles avant même qu'on sache les mesurer. En particulier, on en déduit les cercles. On a aussi les cas d'égalité des triangles. On demande également qu'une droite puisse être prolongée aussi loin qu'on le désire dans chacune de ses deux directions. On réclame en outre que la figure paradoxale correspondant à la négation du cinquième postulat soit vérifiée. Lorsque l'angle θ tend vers 0 l'angle α tend vers une valeur α_0 strictement plus petite qu'un angle droit. Les deux positions limites de (SM) sont Δ_0 et Δ_1 qui laissent donc entre elles un secteur angulaire de $\pi - 2\alpha_0$.



Dans cette figure paradoxale fondatrice de la géométrie hyperbolique, les deux droites orientées Δ et Δ_0 sont dites strictement parallèles, ou encore parallèles convergentes. Tandis qu'une droite passant par S et située dans le secteur angulaire délimité par Δ_0 et Δ_1 est dite (parallèle) divergente avec la droite Δ . Deux droites distinctes peuvent donc être sécantes, strictement parallèles ou divergentes. Notons ici que la notion de parallélisme strict est plus facile à manipuler avec des droites orientées qu'avec des droites.

L'angle de parallélisme et la formule liant l'aire et les angles d'un triangle

L'angle α_0 qui dépend de la distance SH est appelé **l'angle de parallélisme** correspondant à cette distance. Si on déplace S sur la perpendiculaire à Δ en H «on voit» que l'angle de parallélisme diminue lorsque la distance SH augmente. Lobatchevski en donne même une preuve assez rigoureuse.

Nous allons maintenant justifier intuitivement ce résultat.

En prenant le point S fixé et le point M suffisamment éloigné de H sur Δ , l'angle θ sera plus petit que $\pi/2 - \alpha_0$ et la somme des angles du triangle SMH est alors plus petite que deux droits.

C'est le moment de nous rappeler quelques considérations concernant l'aire des polygones en géométrie sphérique. On avait à peu de chose près la proposition suivante (numérotée 5)

Proposition : En géométrie sphérique, il existe, au choix de l'unité d'aire près, exactement une fonction «aire d'un polygone» qui ait les propriétés suivantes :

- 1) additivité : l'aire de la réunion presque disjointe de deux polygones est la somme de leurs aires
- 2) l'aire est invariante par les isométries de \mathbb{S} (c.-à-d. les aires de deux triangles égaux sont égales)
- 3) non nullité : l'aire d'un polygone est nulle si et seulement si il est aplati



Cette proposition doit être vraie dans toute géométrie des puzzles (on peut se reporter à ce qui a été dit dans le cas de la géométrie sphérique.)

En géométrie hyperbolique, si nous voulons bien admettre que la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits (ce que nous avons vu sur un cas particulier), et si nous considérons la fonction qui à un triangle associe le réel

$\pi - \text{somme des angles du triangle}$

nous obtenons bien les deux

propriétés essentielles de l'aire : l'invariance par déplacement est évidente, et pour l'additivité, vous pouvez vous en convaincre en la démontrant pour un cas particulier sur la figure ci-contre. Ceci permet ensuite de définir sans ambiguïté l'aire d'un polygone grâce à la propriété d'additivité. Notez que puisque la somme des angles d'un triangle est minorée par 0, l'aire de tout triangle doit être majorée par une borne absolue en géométrie hyperbolique. Dans la figure paradoxale fondatrice, on peut considérer que le segment $[SH]$ et les deux demi-droites parallèles convergentes Δ et Δ_0 issues de H et S forment un triangle infini dont l'un des angles est nul. Son aire est finie, égale à

$$K(\pi - \text{somme des angles}) = K(\pi/2 - \alpha_0)$$

où K est une constante qui dépend du choix de l'unité d'aire. Ceci signifie que ces deux demi-droites Δ et Δ_0 se rapprochent asymptotiquement très vite l'une de l'autre. En tout cas plus vite que, en géométrie euclidienne, une branche d'hyperbole ne se rapproche de son asymptote (l'aire comprise entre une branche d'une hyperbole et son asymptote est infinie).

Concernant l'aire des triangles nous sommes dans une situation symétrique à celle de la géométrie sphérique, pour laquelle c'est l'excès de la somme des angles par rapport à deux droits qui donne l'aire (à un facteur multiplicatif près). Le fait que l'excès de cette somme ne puisse pas dépasser 2π est alors étroitement relié au fait que l'aire totale du plan sphérique est finie.

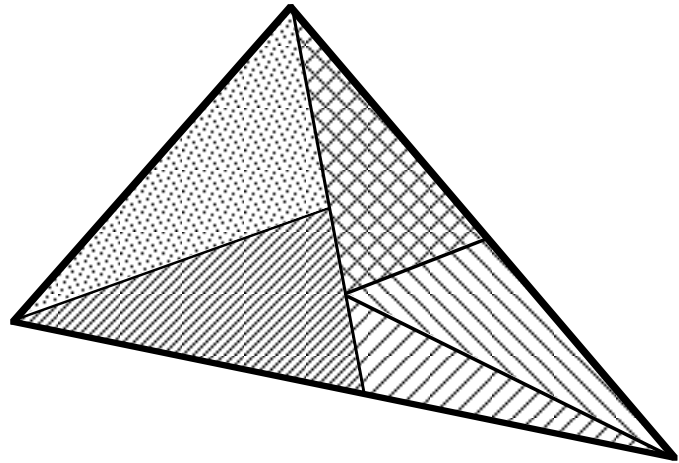
Ce genre de résultat est d'ailleurs également en partie vrai en géométrie euclidienne : l'écart (algébrique) entre la somme des angles d'un triangle et deux droits est bien, là encore, proportionnelle à l'aire !

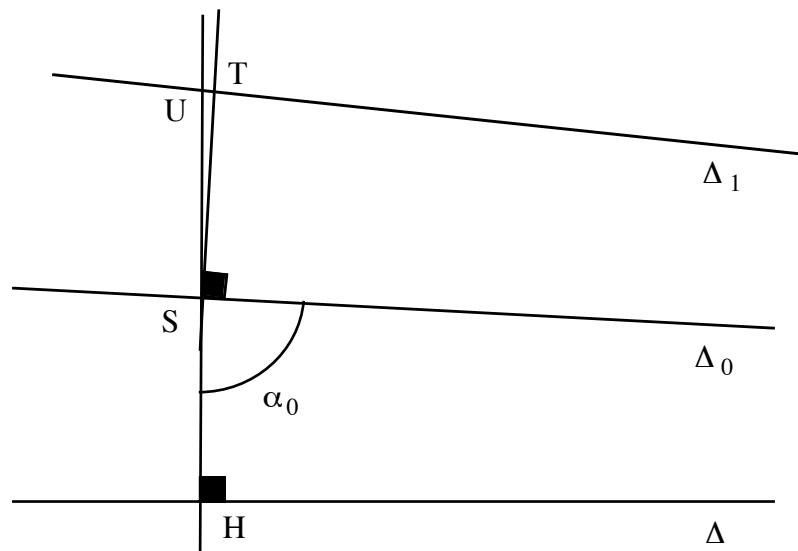
Revenons à la question de l'angle de parallélisme, et discutons la situation sans trop de rigueur. Notons $\alpha_0 = \alpha_S$ pour indiquer la dépendance de l'angle de parallélisme par rapport au point S , qui se déplace sur une perpendiculaire fixée à la droite Δ . Dans la figure ci-dessous, on a déplacé le triangle infini $\Delta[HS]\Delta_0$ et on l'a amené sur le triangle $\Delta_0[ST]\Delta_1$. Dans le triangle STU l'angle en T est supplémentaire de $\alpha_0 = \alpha_S$ donc l'angle en U , c.-à-d. α_U , ajouté à l'angle en S est plus petit que α_S , donc

$$\alpha_U < \alpha_S \text{ et } \alpha_U < 2\alpha_S - \pi/2.$$

Ce qui donne :

$$\pi/2 - \alpha_U > 2(\pi/2 - \alpha_S).$$



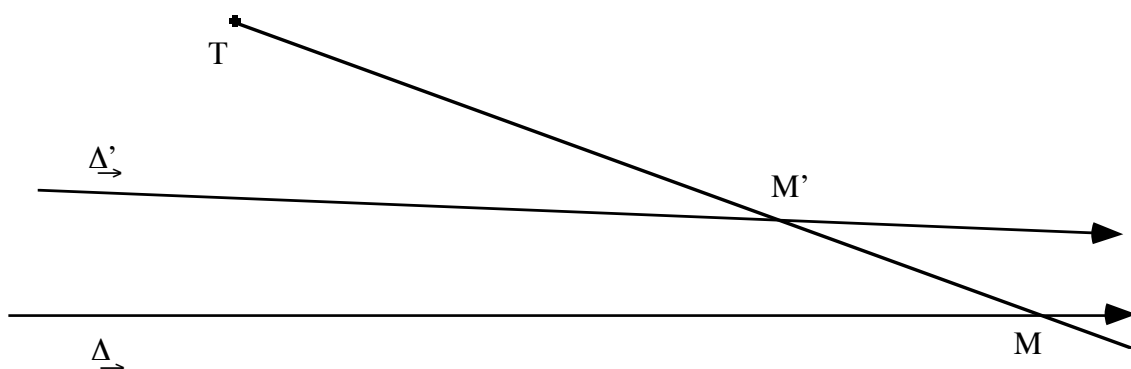


En particulier la figure est impossible si $\alpha_S < \pi/4$: dans ce cas le point U n'existe pas, parce que la droite Δ_1 ne coupe pas la droite (SH) .

Si α_S est suffisamment proche de $\pi/2$, le point U existe. Notons φ le déplacement que nous avons effectué. L'opération précédente ne saurait cependant être répétée indéfiniment en obtenant toujours une intersection telle que dessinée en U , puisque $\pi/2 - \alpha$, qui double au moins à chaque fois, ne saurait devenir supérieur à $\pi/2$. Quand l'angle α_V est censé devenir négatif, c'est que le point V n'existe plus car la droite ne coupe plus la perpendiculaire (SH) . Autrement dit, lorsque le point V part à l'infini sur la perpendiculaire en H à Δ , l'angle de parallélisme tend vers 0 et la droite strictement parallèle à Δ passant par V subit seulement un déplacement fini.

Les points à l'infini dans le plan hyperbolique

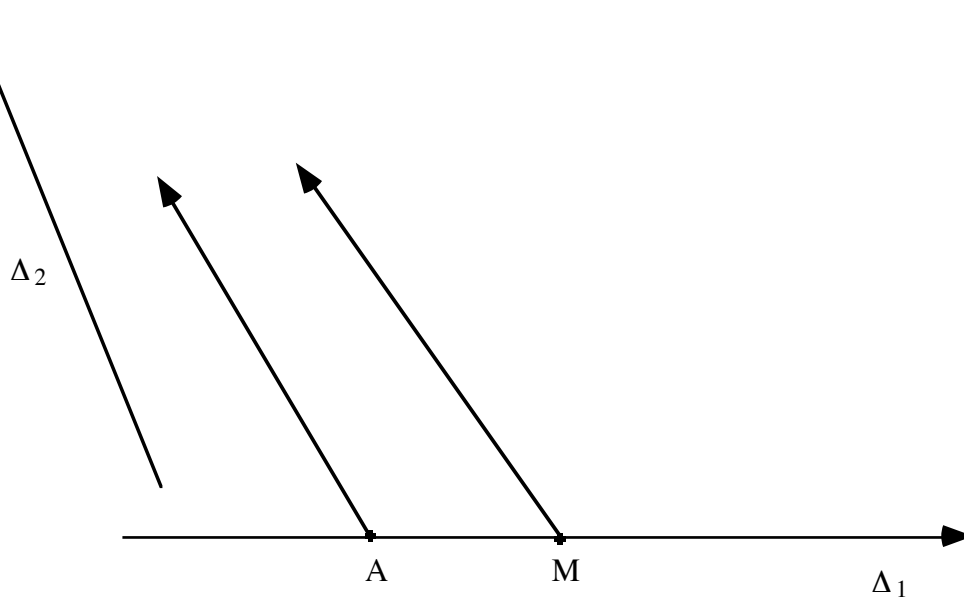
Dans la figure paradoxale fondatrice de la géométrie hyperbolique, on peut considérer que les deux droites orientées Δ et Δ_0 ont en commun un point à l'infini idéal dans la direction convenable. Par un tel point à l'infini idéal et par un point ordinaire du plan, il passe exactement une droite. Soient en effet deux droites orientées strictement parallèles Δ et Δ' , et T un point du plan. Lorsque s s'éloigne à l'infini sur Δ la droite (TM) admet une position limite qui est la même que celle de la droite (TM') lorsque M' s'éloigne à l'infini sur Δ' .



On obtient ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites orientées du plan hyperbolique en demandant que les deux droites orientées soient strictement parallèles ou confondues. Chaque classe d'équivalence donne un point à l'infini idéal. Pour ne pas s'emmêler les pinceaux, on dira désormais que deux droites orientées confondues sont aussi strictement parallèles.

Nous allons voir maintenant qu'une droite est déterminée par ses deux points à l'infini, qui peuvent être choisis arbitrairement. Le fait qu'une droite donnée est la seule droite passant par ses deux points à l'infini est clair sur la figure paradoxale fondatrice. La droite Δ_0 a un seul point à l'infini en commun avec Δ : du simple fait que S est en dehors de Δ les deux droites Δ_0 et Δ_1 sont distinctes, cela signifie qu'il n'existe pas de droite passant par S et par les deux points à l'infini de Δ .

Voyons maintenant que les deux points à l'infini d'une droite peuvent être choisis arbitrairement. Cela signifie que si on considère deux droites orientées Δ_1 et Δ_2 il existe une droite Δ qui, orientée dans un sens est strictement parallèle à Δ_1 , et orientée dans l'autre sens est strictement parallèle à Δ_2 . Autrement dit encore, notons ∞_2 le point à l'infini défini par Δ_2 et prenons un point M sur Δ_1 . Considérons la droite $(M\infty_2)$ et faisons tendre M à l'infini sur la droite orientée Δ_1 .



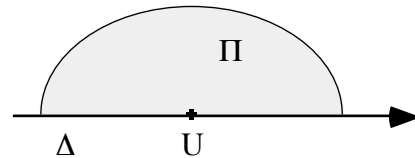
Nous voulons voir que la droite $(M\infty_2)$ ne part pas à l'infini. Nous l'avons déjà constaté au paragraphe précédent dans le cas où Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales. Voici un argument du même style et plausible dans le cas général : si $(M\infty_2)$ partait à l'infini, le triangle infini $AM\infty_2$ où A est la position de départ de M , aurait une aire infinie. Or l'aire de tout triangle admet une borne absolue finie.

La droite à l'infini d'un plan hyperbolique

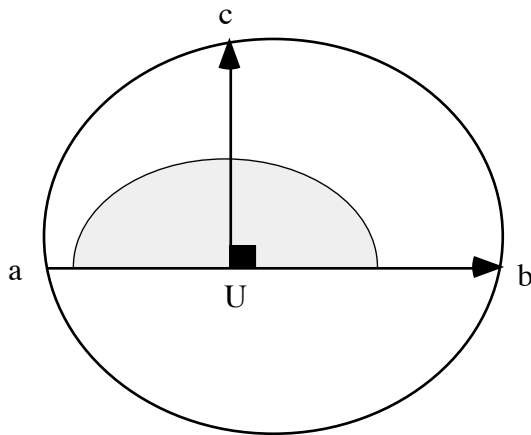
La figure idéale formée par les points à l'infini d'un plan hyperbolique ressemble a priori à un cercle de rayon infini centré n'importe où. Si on compare avec la droite à l'infini d'un plan euclidien on a une différence de taille : une droite du plan euclidien n'a qu'un point à l'infini,

une droite du plan hyperbolique en a deux. Considérons une isométrie d'un plan euclidien, si nous savons comment elle opère sur les points à l'infini, nous ne la connaissons qu'à une translation près, car les translations fixent les points à l'infini. En géométrie hyperbolique au contraire, si nous savons comment une isométrie opère sur les points à l'infini, nous savons comment elle opère sur les droites. Et comme un point peut être vu comme l'intersection de deux droites, nous savons comment l'isométrie opère sur les points, c.-à-d. nous la connaissons sans aucune ambiguïté. Ainsi le groupe des isométries du plan hyperbolique peut être interprété comme un groupe de transformations du cercle à l'infini.

Par ailleurs un objet plan solide est toujours repéré par un drapeau : une droite orientée Δ , un point U sur cette droite et un demi-plan Π limité par cette droite.



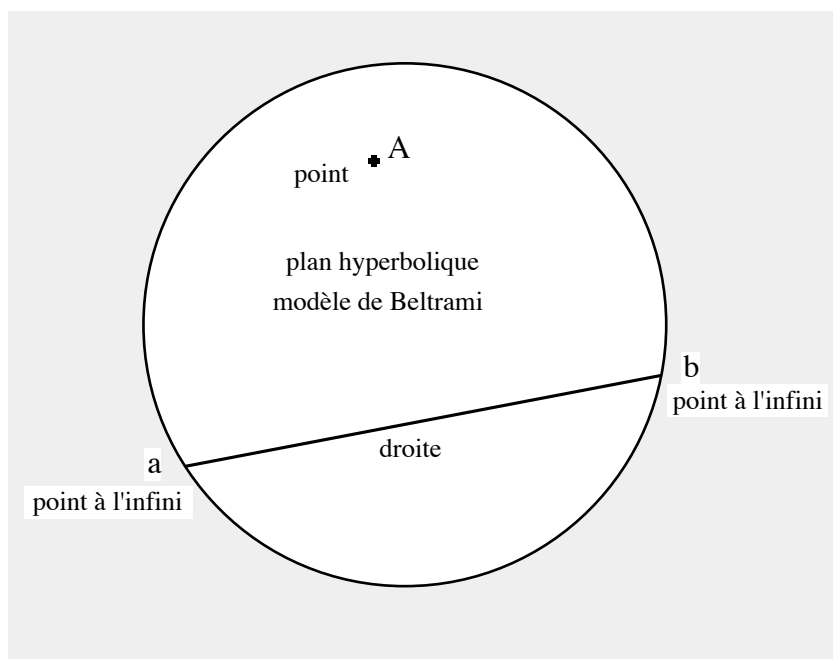
Et du point de vue du cercle à l'infini cela donne le dessin suivant.



Autrement dit un drapeau est repéré par trois points à l'infini : les points a et b définissent la droite orientée Δ , et le point c est le point à l'infini de la demi droite perpendiculaire à Δ en U située dans le demi plan Π . Le fait que les isométries opèrent simplement transitivement sur les drapeaux signifie que nous cherchons un groupe qui opère exactement trois fois simplement transitivement sur le cercle à l'infini.

Le modèle de Beltrami

Nous sommes désormais à peu près convaincus. Le cercle à l'infini d'un plan hyperbolique ne saurait être qu'une droite projective réelle, avec son groupe des homographies qui opère exactement trois fois transitivement.

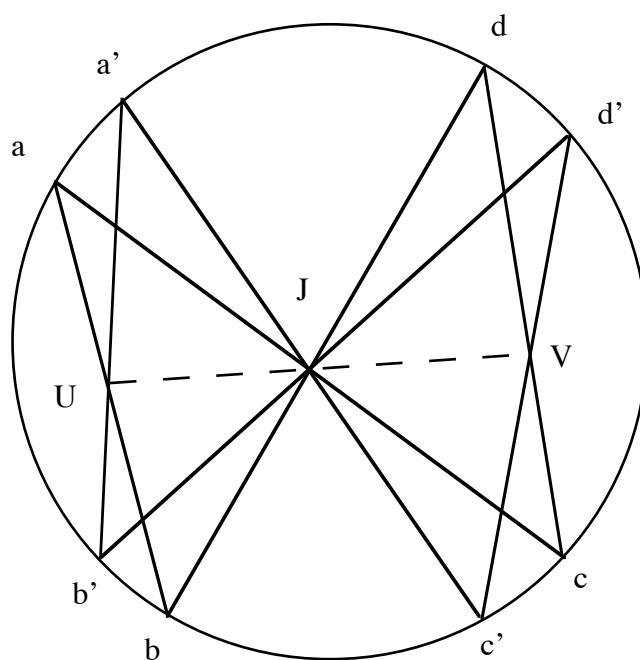


Ceci nous conduit naturellement au modèle de Beltrami. On considère un disque dans un plan euclidien ordinaire. Il est bordé par un cercle.

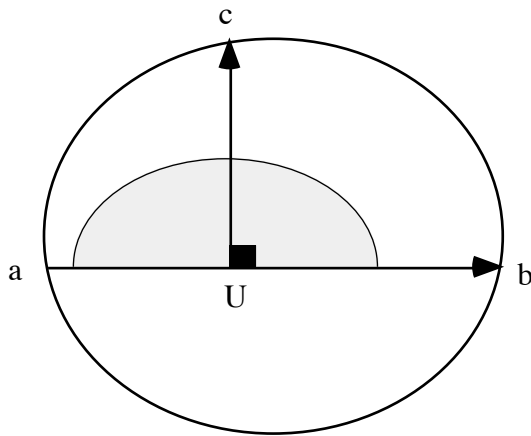
Les points du cercle représentent les points à l'infini du plan hyperbolique, les points à l'intérieur du disque représentent les points du plan. Quand à la droite du plan hyper-

bolique ayant a et b pour points à l'infini, elle sera représentée par le segment ouvert limité par a et b de la droite (ab) .

Peut-être péchons nous par excès d'optimisme ? Voyons que cette machinerie fonctionne bien pour les symétries-point. Nous cherchons à construire le symétrique V d'un point U par rapport à un point J . Nous considérons deux droites (ab) et $(a'b')$ passant par U . Le symétrique de a par rapport à J ne peut être que c : le point à l'infini aligné avec a et J . Donc la droite symétrique de (ab) doit être la droite (cd) et le symétrique du point U doit être le point V , intersection des droites (cd) et $(c'd')$. Est-ce que cela tient la route ?



Oui parce que le résultat de la construction ne dépend pas des droites (ab) et (cd) que nous avons choisies. En d'autres termes, lorsque (ab) tourne autour de U , (cd) tourne autour de V . Et les points J , U et V sont alignés. Ceci est un (très joli) résultat de géométrie du cercle dans le plan euclidien. Cela ressemble au théorème de Pascal, mais ce n'est pas lui. Vous pouvez essayer de le démontrer à la main, ou en utilisant les résultats du chapitre 7 concernant la structure de droite projective réelle que possède un cercle. Vous trouverez également une preuve au chapitre 9. Si vous disposez d'un logiciel de constructions géométriques, vous pouvez voir le petit miracle se produire sous vos yeux.



Passons aux translations. Les translations le long de la droite (ab) doivent correspondre à des homographies du cercle à l'infini qui fixent les points a et b et qui conservent l'arc (acb) sur le cercle à l'infini. Les translations le long de (ab) seront donc bien comprises à travers leur effet sur le cercle à l'infini. La bijection $c \mapsto U$ suggère alors que la structure d'une droite du plan hyperbolique sera mieux comprise en tant qu'arc de droite projective plutôt

qu'en tant que segment d'une droite euclidienne. D'ailleurs un segment d'une droite euclidienne peut être vu comme l'arc de la droite projective qu'on obtient en rajoutant un point à l'infini à cette droite euclidienne.

b) Droites euclidiennes, elliptiques et hyperboliques

Nous développons dans cette section la comparaison de trois types fondamentaux de «droites orientées avec unité de longueur» : les droites euclidiennes, les cercles euclidiens et les droites hyperboliques. Nous connaissons déjà bien les deux premières, la troisième nous a été suggérée par notre introduction informelle au plan hyperbolique.

Nous désignons par \mathbf{R} un corps euclidien, c.-à-d. un corps ordonné où tous les positifs sont des carrés. Le corps que nous avons en vue est le corps des nombres réels classique. Néanmoins, la différence entre droite euclidienne et droite hyperbolique est plus facile à saisir dans le cadre plus général d'une géométrie sur un corps euclidien.

La droite euclidienne réelle abstraite

Nous commençons avec le cas des nombres réels usuels. Qu'est-ce qu'une droite euclidienne réelle abstraite ? C'est ce qui reste d'une droite Δ dans un plan euclidien usuel quand on a perdu l'unité de longueur et quand on oublie le plan qui entoure la droite. La structure sur Δ peut être considérée comme définie par la donnée des segments $[AB]$ et par la donnée des rapports de longueur entre deux segments arbitraires.

Les rapports de longueur suffisent d'ailleurs à déterminer toute la structure car le point C est sur le segment $[AB]$ si et seulement si on a

$$CA/AB + CB/AB = 1$$

Cependant, la définition via les rapports de longueur n'est pas très géométrique. Que viennent donc faire les nombres réels ici ? Ils devraient arriver à la fin de l'histoire, et non pas au début. En fait, avec la définition précédente de droite euclidienne abstraite (sans unité de longueur) on a le résultat suivant.

Lemme 1 : Un ensemble Δ est muni d'une structure de droite euclidienne sans unité de longueur lorsqu'on a défini les segments de Δ (c.-à-d. encore la relation « A est entre B et C » sur Δ) et l'égalité des longueurs sur Δ et que cette structure est isomorphe à celle donnée par le modèle standard de droite euclidienne $(\mathbb{R}, \text{segments de } \mathbb{R}, \text{égalité des longueurs dans } \mathbb{R})$

C.-à-d. encore sous une forme un peu plus abstraite mais plus géométrique.

Lemme 2 : Un ensemble Δ est muni d'une structure de droite euclidienne sans unité de longueur lorsqu'on a défini les segments de Δ et un groupe de transformations opérant simplement transitivement sur Δ , et que cette structure est isomorphe à celle donnée par le modèle standard de droite euclidienne $(\mathbb{R}, \text{segments de } \mathbb{R}, \text{translations de } \mathbb{R})$

idée de la preuve > L'égalité des longueurs (lemme 1) ou les translations (lemme 2) permettent de définir l'égalité des vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un entier, puis par un rationnel. Il reste à définir le produit d'un vecteur par un réel arbitraire. On encadre le réel par des rationnels de plus en plus proches, et l'extrémité du vecteur (d'origine fixe) se trouve squeezée sur des segments de plus en plus petits. \square

Exercice 1 : Donner une preuve plus détaillée. Énoncer plusieurs définitions possibles pour la structure de droite réelle euclidienne abstraite (sans unité de longueur).

La droite euclidienne abstraite sur un corps euclidien \mathbf{R}

Nous considérons maintenant un corps euclidien arbitraire \mathbf{R} .

Une droite \mathbf{R} -euclidienne avec unité de longueur peut être donnée a priori comme une droite affine (sur le corps \mathbf{R}) avec un produit scalaire sur les vecteurs.

Si nous ne voulons pas préciser l'unité de longueur, nous pouvons dire qu'une droite \mathbf{R} -euclidienne n'est rien d'autre qu'une droite affine sur le corps \mathbf{R} . Le groupe affine de la droite est alors le groupe des similitudes, et les isométries sont les translations et les symétries-point.

En termes de droite \mathbf{R} -projective, nous pourrions définir alors une droite \mathbf{R} -euclidienne sans unité de longueur comme une droite \mathbf{R} -projective privée d'un point.

Si nous voulons préciser l'unité de longueur, comme il est d'usage dans la littérature mathématique moderne, il nous suffit de donner, outre la structure affine, la paire non ordonnée $\{\vec{U}, -\vec{U}\}$ des deux vecteurs de norme 1.

Si enfin, nous désirons une droite \mathbf{R} -euclidienne *orientée avec unité de longueur*, nous pouvons définir cette notion comme équivalente à celle de droite affine sur \mathbf{R} avec un vecteur \vec{U} non nul spécifié, qui donne à la fois l'unité de longueur et l'orientation.

La notion de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée avec unité de longueur est alors suffisamment rigide pour qu'on ait la propriété de simple transitivité du groupe des automorphismes de la

structure. Considérons en effet le modèle \mathbf{R} de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée, nous voyons alors que les automorphismes de cette structure sont exclusivement les translations

$$x \mapsto x + a.$$

puisque ce sont les seules transformations affines qui fixent un vecteur non nul donné. Et le groupe des translations opère bien simplement transitivement. En outre ces automorphismes de la structure forment un groupe naturellement isomorphe à $(\mathbf{R}, +)$.

On en déduit une nouvelle caractérisation de la structure de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée :

Théorème 1 : (*propriété caractéristique d'une droite euclidienne orientée*)

- 1) Soient Δ_i ($i = 1, 2$) deux droites \mathbf{R} -euclidiennes orientées (avec unité de longueur) et sur chacune d'elles un point A_i . Alors il existe exactement un isomorphisme de Δ_1 sur Δ_2 qui envoie A_1 sur A_2 .
- 2) En conséquence, sur un ensemble Δ il revient au même de se donner l'une des deux structurations suivantes
 - (i) une structure de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée (avec unité de longueur)
 - (ii) une opération simplement transitive du groupe $(\mathbf{R}, +)$ sur Δ

preuve> La partie (1) peut être formulée de manière équivalente sous la forme : le groupe des automorphismes d'une «droite \mathbf{R} -euclidienne orientée» (avec unité de longueur) opère simplement transitivement sur la droite. Ce que nous avons déjà remarqué.

La (2) est une conséquence formelle de la partie (1) sous la condition que le groupe des automorphismes de la structure est commutatif. Nous en écrivons la preuve de manière qu'elle soit entièrement recopiable dans des situations analogues (droite hyperbolique orientée, cercle euclidien orienté).

On note que \mathbf{R} est un modèle canonique de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée et que son groupe d'automorphismes est naturellement isomorphe à $(\mathbf{R}, +)$.

Soit Δ une droite \mathbf{R} -euclidienne orientée et soit $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ un isomorphisme de droites \mathbf{R} -euclidiennes orientées. Notons $T(a)$ la translation $x \mapsto x + a$. On constate que l'automorphisme de Δ égal à

$$\varphi^{-1} \circ T(a) \circ \varphi$$

ne dépend pas de φ , ceci parce que $(\mathbf{R}, +)$ est commutatif. En effet, un autre isomorphisme s'écrirait $T(b) \circ \varphi$ pour un certain b et on a immédiatement

$$(T(b) \circ \varphi)^{-1} \circ T(a) \circ (T(b) \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ T(a) \circ \varphi$$

Ceci définit donc sans ambiguïté l'opération de $(\mathbf{R}, +)$ sur Δ :

$$a \bullet M = (\varphi^{-1} \circ T(a) \circ \varphi)(M).$$

Cette opération est une copie conforme de l'opération de $(\mathbf{R}, +)$ sur \mathbf{R} et elle est donc simplement transitive².

² Dans le cas présent, on peut remarquer que $a \bullet M$ n'est autre que $M + a \vec{U}$ si \vec{U} est le vecteur unitaire positivement orienté de Δ .

Inversement, si on donne une opération simplement transitive de $(\mathbf{R}, +)$ sur un ensemble Δ , il y a une et une seule structure de «droite \mathbf{R} -euclidienne orientée avec unité de longueur» sur Δ pour laquelle la construction précédemment définie donne la même opération simplement transitive de $(\mathbf{R}, +)$ sur Δ : en effet, pour A fixé, la bijection $x \mapsto x \cdot A$ doit être un isomorphisme de \mathbf{R} sur Δ , ce qui donne l'unicité. L'existence s'obtient en transportant la structure de \mathbf{R} à Δ par la bijection $\psi : x \mapsto x \cdot A$ (où on a fixé A) et en vérifiant que $a \cdot M = (\psi \circ T(a) \circ \psi^{-1})(M)$. \square

Exercice 2 et commentaire :

- a) Si vous n'êtes pas entièrement convaincus : reprenez la preuve du théorème 1 de manière plus détaillée.
- b) Pour ceux qui aiment beaucoup l'algèbre : montrez, a contrario du théorème 1, qu'en général, une structure de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée sur un ensemble Δ *n'est pas* entièrement caractérisée par les données suivantes :
 - une relation d'ordre (correspondant à l'orientation)
 - le groupe des translations de Δ , supposé isomorphe à $(\mathbf{R}, +)$
 - une unité de longueur

En effet, il existe des corps euclidiens (mais non archimédiens) qui possèdent des automorphismes distincts de l'identité. A fortiori, en tant que groupe ordonné, $(\mathbf{R}, +)$ possède dans ce cas des automorphismes qui fixent 1 mais qui sont distincts de l'identité. La structuration conférée à Δ par les trois données ci-dessus ne permet pas alors de préciser entièrement l'isomorphisme entre le groupe des translations de Δ et $(\mathbf{R}, +)$. En conséquence, alors que certains segments auront leur «longueur» définie sans ambiguïté (par exemple les segments de longueur rationnelle), certains autres «hésiteront» entre plusieurs possibilités «isomorphes dans \mathbf{R} ». Dans le cas archimédien, ce phénomène irritant ne se produit pas, car deux éléments d'un corps ordonné archimédien \mathbf{R} sont toujours discernables en utilisant les rationnels et la relation d'ordre.

- c) Notez que les géomètres grecs raisonnaient dans un cadre conceptuel où les notions de comparaison des longueurs de segments étaient considérées comme non problématiques. D'une certaine manière, c'est un cadre conceptuel équivalent à celui décrit ci-dessus (relation d'ordre et translations), et ils arrivèrent à développer une théorie des proportions (qui correspond en langage moderne à la structure additive et multiplicative des scalaires positifs) en s'appuyant explicitement sur un axiome «archimédien».

Le cercle euclidien abstrait sur un corps euclidien \mathbf{R}

Les cercles d'un plan euclidien ont une certaine structure «ordonnée circulairement» qui est donnée par le fait qu'on peut parler de choses comme «l'arc d'extrémités A et B contenant le point C », et ils ont une certaine structure «géométrique» du fait qu'ils sont munis d'une structure de droite projective réelle et d'un groupe de transformations (les rotations, sous groupe du groupe des homographies) qui opère simplement transitivement sur les points. Enfin, ils ont également une structure métrique, donnée par la longueur des arcs.

Cela montre une analogie profonde entre droites euclidiennes et cercles euclidiens. Nous allons expliciter en détail cette analogie. Pour mieux mettre en évidence l'aspect purement algébrique de la question tant que n'intervient pas la métrique nous travaillons avec un corps euclidien arbitraire.

Ici, c'est le groupe $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ qui va intervenir au lieu de $(\mathbf{R}, +)$.

Si \mathbb{C} est un cercle dans un plan \mathbf{R} -euclidien, nous appelons **involution diamétrale** de \mathbb{C} l'homographie qui transforme un point en le point diamétralement opposé.

Nous établissons tout d'abord une proposition dont une interprétation possible est la suivante : elle dit ce qu'il faut rajouter de structure à une droite \mathbf{R} -projective pour en faire un cercle \mathbf{R} -euclidien.

Proposition 1 : Soit \mathbb{C} un cercle dans un plan \mathbf{R} -euclidien \mathcal{P} , avec sa structure de droite \mathbf{R} -projective. Une transformation de \mathbb{C} est la restriction à \mathbb{C} d'une isométrie de \mathcal{P} qui conserve \mathbb{C} si et seulement si c'est une homographie de \mathbb{C} qui commute avec l'involution diamétrale.

preuve > La condition est clairement nécessaire. Voyons qu'elle est suffisante.

Soit S un point de \mathbb{C} et O son centre. Considérons d'abord une homographie directe de \mathbb{C} , soit φ , et notons ψ l'homographie du faisceau $\langle S \rangle$ définie par :

$$(SM) \mapsto (S\varphi(M)) \text{ où } M \in \mathbb{C}.$$

On sait que ψ est induite par une transformation affine τ de \mathcal{P} . Par ailleurs, puisque φ commute avec l'involution diamétrale, ψ transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales et τ est donc une similitude de \mathcal{P} . Cela implique que ψ opère sur $\langle S \rangle$ comme une rotation de centre S , et donc que φ opère sur \mathbb{C} comme une rotation de centre O .

Dans le cas d'une homographie indirecte de \mathbb{C} on peut raisonner de la même manière, ou remarquer que les deux points fixes doivent être diamétralement opposés et que le carré de l'homographie est direct et admet deux points fixes, donc égal à l'identité d'après l'étude du cas direct. \square

En particulier le groupe des homographies directes commutant avec l'involution diamétrale est exactement le groupe des rotations qui conservent le cercle (restreintes au cercle) et il opère simplement transitivement sur \mathbb{C} .

Exercice 3 : Donnez une preuve purement calculatoire (et plus courte) basée sur le fait qu'une matrice 2×2 qui commute avec une matrice «quart de tour» est une matrice de similitude.

La proposition 1, jointe au fait que les involutions sans point double d'une droite \mathbf{R} -projective sont deux à deux conjuguées, justifie la définition suivante :

Définition 1 : Nous disons qu'un ensemble \mathbb{C} est muni d'une structure de **cercle \mathbf{R} -euclidien**, s'il est muni d'une structure de droite \mathbf{R} -projective et si on a spécifié une involution sans point double, qualifiée d'**involution diamétrale**.

D'après la proposition 1, les homographies de \mathbb{C} qui commutent avec l'involution diamétrale forment un groupe \mathfrak{G} isomorphe à $\mathbf{O}(2, \mathbf{R})$ sous-groupe correspondant à $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ opère simplement transitivement sur \mathbb{C} . Les autres éléments de $\mathbf{O}(2, \mathbf{R})$ ont deux points fixes. Notez que, de même qu'en géométrie sphérique une rotation admet deux centres diamétralement opposés, en géométrie du cercle pour lui-même, une symétrie-point admet deux points fixes diamétralement opposés.

Tout ceci justifie au moins en partie la terminologie suivante, qui est mise en place pour renforcer l'analogie entre droite euclidienne et cercle euclidien.

Définition 2 : Une **isométrie** entre deux cercles \mathbf{R} -euclidiens est par définition une homographie qui commute avec les involutions diamétrales. Une isométrie d'un cercle \mathbf{R} -euclidien qui fixe exactement deux points est appelée une **symétrie-point**, une isométrie qui ne fixe aucun point est appelée une **translation**.

Remarque Dans le cas où $\mathbf{R} = \mathbb{R}$ et où on considère des cercles concrets dans un plan euclidien, les «isométries» au sens de la définition précédente sont des similitudes entre cercles en tant qu'espaces métriques (la distance de deux points étant la longueur du plus court des deux arcs joignant les deux points). La terminologie «isométrie» est donc ambiguë. Il est en fait impossible de donner une définition en accord à la fois avec l'intuition des cercles de tailles différentes et avec la logique des structures, qui veut qu'un cercle «pour soi» possède une unité de longueur naturelle indépendante de son environnement. La longueur naturelle d'un arc doit être mesurée en radians, ou en tour, comme le font les astronomes pour les arcs tracés sur la sphère céleste. Le fait que cette longueur est bien un nombre réel tient à une particularité remarquable de \mathbb{R} , tout à fait exceptionnelle parmi les corps ordonnés : le groupe $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$ est isomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Les mêmes nombres peuvent donc servir à mesurer les longueurs et les angles. Réfléchissez par exemple à la question en tentant de remplacer \mathbb{R} par \mathbb{Q} !

Exercice 4 : Montrez que toute ellipse d'un plan *affine* sur \mathbf{R} est munie d'une structure naturelle de cercle \mathbf{R} -euclidien. Donnez un commentaire de ce résultat.

Exercice 5 : Montrez qu'un faisceau de droites concourantes dans un plan euclidien est muni d'une structure naturelle de cercle \mathbf{R} -euclidien, en considérant l'orthogonalité comme une involution. Que pensez-vous d'un faisceau de droites dans le cas du plan sphérique ?

Nous avons signalé au chapitre 7 comment il est possible de définir la notion de «sens de parcours circulaire» (ou si l'on préfère, la notion de «structure d'ordre circulaire») sur un ensemble arbitraire Δ , par exemple en spécifiant (de manière cohérente) pour chaque triplet de points (a, b, c) de Δ l'un des deux cycles (abc) ou (acb) . Nous avons également indiqué que toute droite \mathbf{R} -projective pouvait être munie de deux sens de parcours circulaires naturels, opposés l'un à l'autre. Dans ce cadre purement algébrique, orienter une droite \mathbf{R} -projective Δ , c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours naturels, qu'on qualifie de positif.

De même que \mathbf{R} est un modèle canonique de droite euclidienne orientée, le **cercle trigonométrique**, c.-à-d.

le cercle $x^2 + y^2 = 1$ de \mathbf{R}^2 orienté de manière que
(1,0), (0,1) et (-1,0) soient dans cet ordre circulaire

peut-être considéré comme le modèle canonique de cercle **R**-euclidien orienté.

Remarque Le groupe $\text{SO}(2, \mathbf{R})$ est lui-même un autre modèle canonique de cercle **R**-euclidien orienté. La structure de cercle **R**-euclidien orienté sur $\text{SO}(2, \mathbf{R})$ est obtenue en transportant celle du «cercle trigonométrique» $u^2 + v^2 = 1$ de \mathbf{R}^2 au moyen de la bijection :

$$(u, v) \mapsto U = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

D'après la proposition 1, les seuls automorphismes du cercle trigonométrique en tant que cercle **R**-euclidien orienté sont (induits par) les rotations. Ce groupe opère simplement transitivement sur les points du cercle, et il est naturellement isomorphe à $\text{SO}(2, \mathbf{R})$, qui est commutatif. L'analogie avec les droites euclidiennes orientées est donc parfaite.

Nous avons en particulier l'analogie du théorème 1.

Théorème 2 : (*propriété caractéristique d'un cercle euclidien orienté*)

- 1) Soient \mathcal{C}_i ($i = 1, 2$) deux cercles **R**-euclidiens orientés et sur chacun d'eux un point A_i . Alors il existe exactement un isomorphisme de Δ_1 sur Δ_2 qui envoie A_1 sur A_2 .
- 2) En conséquence, sur un ensemble \mathcal{C} il revient au même de se donner l'une des deux structurations suivantes
 - (i) une structure de cercle **R**-euclidien orienté
 - (ii) une opération simplement transitive du groupe $\text{SO}(2, \mathbf{R})$ sur \mathcal{C}

preuve> La partie (1) peut être formulée de manière équivalente sous la forme : le groupe des automorphismes d'un «cercle **R**-euclidien orienté» opère simplement transitivement sur le cercle. Ce que nous avons déjà remarqué.

(2) résulte formellement de (1) : comme dans le théorème 1. □

Exercice 6 :

- 1) Montrez qu'une droite en géométrie plane sphérique est muni d'une structure naturelle de cercle **R**-euclidien. Notez que les translations et symétries-point telles qu'elles ont été définies sur une sphère se restreignent (sur une droite fixe) en les translations et symétries-point telles qu'elles ont été définies à la définition 2 (ceci constitue une autre justification de la terminologie adoptée).
- 2) Dans le cas du corps des réels, on peut considérer une droite sur la sphère comme un espace métrique. Vérifier que les isométries définies à la définition 2 sont bien les transformations qui conservent les distances.

La droite hyperbolique abstraite sur un corps euclidien \mathbf{R}

Nous avons suggéré à la fin de la section (a) qu'une droite du plan hyperbolique serait bien comprise si on la considérait comme un arc d'une droite projective. Nous allons maintenant étudier cette structure.

Étant donné une droite \mathbf{R} -projective Δ et deux points u et v de cette droite, ils délimitent deux arcs ouverts, en relation avec la notion d'«ordre circulaire» qui peut être développée pour une droite projective sur un corps ordonné.

En termes de birapport, deux points x et y distincts de u et v sont sur le même arc ouvert d'extrémités u et v si et seulement si le birapport $[u,v,x,y]$ est positif.

Un tel arc Δ_1 , considéré pour lui-même, est muni d'une structure qui peut être définie par la donnée des birapports $[x,y,z,t] \in \mathbf{R}$, pour x, y, z, t sur Δ_1 . (nous donnons une définition plus formelle par la suite).

Deux arcs de droite projective, l'un d'extrémités u et v , l'autre d'extrémités u' et v' sont isomorphes pour cette structure donnée par les birapports. En effet, si c est un point du premier arc, et c' un point du second, il existe une homographie qui envoie u, v et c en u', v' et c' . Cette homographie conserve les birapports d'une part, et envoie l'arc (uv) contenant c sur l'arc $(u'v')$ contenant c' , d'autre part. Il existe donc une seule structure d'«arc ouvert de droite projective» (le corps \mathbf{R} étant fixé), elle est tout à fait indépendante des deux points extrêmes.

Si Δ est une droite affine et si v est le point à l'infini de la complétée projective de Δ , les deux arcs d'extrémités u et v sont les deux demi-droites affines ouvertes d'extrémité u . Si maintenant u et v sont deux points de Δ , l'intérieur du segment $[uv]$ est l'un des deux arcs limités par u et v sur la complétée projective.

Dans la définition suivante, nous remplaçons le vocable peu élégant

«arc ouvert de droite projective»

par le vocable plus agréable

«droite hyperbolique»

Définition 3 : On appelle **droite \mathbf{R} -hyperbolique** un ensemble Δ muni de birapports à valeur dans \mathbf{R} et, en tant que tel, isomorphe à un arc ouvert de droite \mathbf{R} -projective muni de ses birapports. Une bijection entre droites \mathbf{R} -hyperboliques qui conserve les birapports, est appelée une **bijection hyperbolique**, ou encore une **isométrie**.

Nous laissons au lecteur curieux le soin de donner une définition équivalente à la précédente après avoir résolu l'exercice qui suit.

Exercice 7 : Supposons qu'on s'est donné sur un ensemble Δ pour chaque quadruplet de points distincts x, y, z, t un birapport $[x,y,z,t] \in \mathbf{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Dans le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) si on échange les deux premiers ou les deux derniers, le birapport a est remplacé par $1/a$, si on échange les deux extrêmes ou les deux du milieu, a est remplacé par $1 - a$.
- 2) Si x_1, x_2, x_3, x, y sont distincts : $[x_1, x_2, y, x] = [x_1, x_2, x_3, x]/[x_1, x_2, x_3, y]$.
- 3) Si x_1, x_2, x_3 sont trois points distincts, l'application $x \mapsto [x_1, x_2, x_3, x]$ établit une bijection entre Δ et un arc ouvert de la droite projective $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ (il faut prendre ∞ , 0, 1 pour $x = x_1, x_2, x_3$).

Montrez qu'alors Δ est isomorphe à un arc ouvert de droite \mathbf{R} -projective (muni de ses birapports).

La définition précédente et celle qui suit sont en partie justifiées par la proposition 2 juste après.

Définition 4 : Sur un arc ouvert de droite projective, d'extrémités u et v

- on appelle **translation** une application de la forme $m \mapsto n$ où $[u, v, m, n] = \lambda$
- on appelle **symétrie par rapport au point c** une application de la forme $m \mapsto p$ où $[u, v, c, p] = [u, v, c, m]^{-1}$

Proposition 2 : Soient Δ et Δ' deux arcs ouverts de droites projectives.

- a) Les bijections hyperboliques de Δ sont exclusivement les translations et symétries-point.
- b) Une translation n'a aucun point fixe, et une symétrie-point un seul point fixe (son centre).
- c) Étant donnés deux points A et B de Δ , il y a exactement une translation et exactement une symétrie-point de Δ qui envoient A sur B .
- d) Si on a orienté Δ et Δ' une bijection hyperbolique de Δ sur Δ' est strictement monotone.
- e) Les notions de translation et symétrie-point sont bien définies pour toute droite hyperbolique, et les propriétés (a), (b), (c) restent valables.

preuve > (a) Soit Δ^\sim la droite projective dont Δ est un arc. Soient u et v les extrémités de cet arc. Les translations et symétries-point de Δ conservent les birapports puisqu'ils proviennent d'homographies de Δ^\sim . Inversement, considérons une transformation de Δ qui conserve les birapports. Elle est définie par les images de trois points A, B, C (parce qu'un point d'une droite projective est caractérisé par le birapport qu'il fait avec trois autres). En outre elle coïncide sur Δ avec l'homographie de Δ^\sim qui opère de la même manière sur ces trois points. Cela montre qu'une transformation de Δ qui conserve les birapports est induite par une unique homographie de Δ^\sim . Cette homographie fixe $\{u, v\}$ parce que l'arc ouvert Δ est fixe et parce que les homographies opèrent sur les arcs ouverts et leurs extrémités de manière cohérente.

Si u et v sont échangés, il s'agit d'une involution, et comme l'arc Δ est fixe, c'est une involution à deux points doubles dont l'un est sur Δ (ici intervient le fait que tout positif est un carré dans \mathbf{R}), qui induit donc sur Δ une symétrie-point.

Si u et v sont fixes, c'est une homographie $M \mapsto M'$ du type

$$[v, u, M, M'] = \lambda$$

Comme Δ est fixe, on a $\lambda > 0$, et c'est une translation de Δ .

Les points (b), (c), (d), (e) sont maintenant faciles, et laissés à la lectrice. \square

Exercice 8 : Montrez qu'une branche d'hyperbole dans un plan affine sur \mathbf{R} est munie d'une structure naturelle de droite \mathbf{R} -hyperbolique, invariante par les transformations affines qui conservent cette branche. (rappelez vous dans le chapitre 7 la section consacrée aux intersections des faisceaux de droites en homographie). De la même manière montrez qu'une parabole dans un plan affine sur \mathbf{R} est munie d'une structure naturelle de droite \mathbf{R} -euclidienne sans unité de longueur.

On constate que $\mathbf{R}^{>0}$ est une demi droite ouverte de la droite affine \mathbf{R} , et qu'elle est à ce titre une droite \mathbf{R} -hyperbolique. En outre elle admet une orientation (relation d'ordre) naturelle. Les translations de cette droite \mathbf{R} -hyperbolique sont les applications $x \mapsto \lambda \cdot x$ et les symétries-point sont les applications $x \mapsto a^2/x$.

Nous prendrons $\mathbf{R}^{>0}$ comme modèle canonique de droite hyperbolique orientée.

Le groupe des translations, qui est celui qui conserve la structure, opère simplement transitivement sur $\mathbf{R}^{>0}$, et il est naturellement isomorphe à $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$.

Tous les ingrédients nécessaires sont alors réunis, comme aux théorèmes 1 et 2, et nous obtenons.

Théorème 3 : (*propriété caractéristique d'une droite hyperbolique orientée*)

- 1) Soient Δ_i ($i = 1, 2$) deux droites \mathbf{R} -hyperboliques orientées et sur chacune d'elle un point A_i . Alors il existe exactement un isomorphisme de Δ_1 sur Δ_2 qui envoie A_1 sur A_2 .
- 2) En conséquence, sur un ensemble Δ il revient au même de se donner l'une des deux structurations suivantes
 - (i) une structure de droite \mathbf{R} -hyperbolique orientée
 - (ii) une opération simplement transitive du groupe $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$ sur Δ

preuve > (1) est à peu près la même chose que la proposition 2 (c).

(2) résulte formellement de (1) : comme dans le théorème 1. \square

Remarques Une signification intuitive de la proposition 2 est la suivante : bien que les deux points à l'infini u et v ne fassent pas partie de la droite \mathbf{R} -hyperbolique (uv) , le birapport $[v, u, M, M']$ est bien défini.

Dans le cas du corps des nombres réels, c'est clair par passage à la limite, parce que ce birapport est la limite du birapport $[A, B, M, M']$ lorsqu'on fait tendre A et B vers les extrémités droite et gauche (à l'infini) sur la droite hyperbolique orientée. Dans le cas plus général envisagé ici, nous avons dû remplacer cette preuve intuitive par une preuve purement algébrique, certainement plus déroutante.

Une autre manière d'exprimer cette idée est de dire que toute droite hyperbolique possède une «unité de longueur naturelle», qui peut être clairement identifiée à partir de sa seule

structure projective (laquelle ne fait intervenir que la connaissance des birapports). En effet sur la droite hyperbolique, les seules transformations conservant la structure projective sont les translations et symétries-point. Cela est lié au fait qu'on peut «mesurer» les translations sans ambiguïté. En effet la translation qui envoie M sur M' est identifiée par le birapport $[v,u,M,M'] = \lambda$, défini sans ambiguïté dès que Δ est orientée (et si on change l'orientation λ est remplacé par $1/\lambda$.)

Cette situation est radicalement différente de celle de la droite euclidienne, où, en l'absence d'unité de longueur, il est impossible de «mesurer» les translations. Sur la droite euclidienne, la structure projective (c.-à-d. les birapports) équivaut à la structure affine (c.-à-d. les rapports), elle-même invariante par les similitudes (c.-à-d. les transformations affines).

Exercice 9 : Considérer l'arc ouvert $] -1, +1 [$ avec sa structure de droite hyperbolique. Montrer que toute translation de cette droite hyperbolique est une transformation de la forme :

$$\tau_u : x \mapsto \frac{u + x}{1 + ux}$$

et on a $\tau_u \circ \tau_v = \tau_w$ avec $w = \frac{u + v}{1 + uv}$.

On reconnaît là la loi de composition des vitesses sur une droite en relativité restreinte, lorsque la vitesse de la lumière est prise comme unité de mesure. Comme aurait dit Einstein, Dieu ne pouvait pas passer à côté d'une idée aussi belle dans sa simplicité.

Les droites hyperboliques réelles ressemblent beaucoup à des droites euclidiennes réelles

Cette section est consacrée à un phénomène remarquable, mais exceptionnel, qui se produit pour le corps des nombres réels. Dans ce cas, la ressemblance entre droites euclidiennes et droites hyperboliques devient une ressemblance à peu près parfaite, du type «photocopie indiscernable de l'original».

Le corps ordonné \mathbb{R} vérifie en effet une propriété vraiment exceptionnelle : le groupe ordonné multiplicatif des réels positifs est isomorphe au groupe ordonné additif de tous les réels. L'isomorphisme est donné dans un sens par la fonction logarithme et dans l'autre par la fonction exponentielle. Il s'ensuit que le groupe des déplacements d'une droite euclidienne est isomorphe à celui d'une droite hyperbolique.

Dans le cas d'une droite euclidienne réelle, la structure peut être définie par des données purement géométriques : les segments de droite, d'une part, le groupe des translations d'autre part. Plus précisément, rappelons le lemme 1 suivant :

Lemme : Un ensemble Δ est muni d'une structure de droite euclidienne sans unité de longueur lorsqu'on a défini les segments de Δ (c.-à-d. encore la relation « A est entre B et C » sur Δ) et un groupe de transformations opérant simplement transitivement sur Δ , et que cette structure est

isomorphe à celle donnée par le modèle standard de droite euclidienne (\mathbb{R} , segments de \mathbb{R} , translations de \mathbb{R})

Or sur une droite hyperbolique réelle, les notions de segment de droite et de translation sont bien définies. Ce que nous disent le théorème 3 et la fonction logarithme, c'est alors :

Proposition 3 : La structuration géométrique de la droite hyperbolique réelle par ses segments et ses translations lui confère de manière naturelle une structure de droite euclidienne réelle (sans unité de longueur).

Nous avons déjà signalé la rigidité d'une droite hyperbolique sur un corps euclidien quelconque : les seules transformations qui conservent sa structure projective sont les translations et les symétries-point. Dans le cas d'une droite hyperbolique réelle, cela se traduit par l'existence d'une unité de longueur naturelle au sens de la structure d'espace métrique. En notant u et v les points à l'infini d'une droite hyperbolique Δ on prendra pour longueur naturelle du segment $[MM']$ le réel

$$|\log([v,u,M,M'])|$$

En effet le birapport $[v,u,M,M']$ est défini sans ambiguïté (au passage à l'inverse près) et la composition des translations, qui correspond au produit des birapports, doit se traduire en addition des longueurs.

Récapitulation, et vocabulaire

Rappelons tout d'abord les résultats obtenus au théorèmes 1, 2 et 3.

Sur un ensemble Δ il revient au même de se donner l'une des deux structurations suivantes

Cas 1 :

- (i) une structure de droite \mathbf{R} -euclidienne orientée (avec unité de longueur)
- (ii) une opération simplement transitive du groupe $(\mathbf{R}, +)$ sur Δ

Cas 2 :

- (i) une structure de cercle \mathbf{R} -euclidien orienté
- (ii) une opération simplement transitive du groupe $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ sur Δ

Cas 3 :

- (i) une structure de droite \mathbf{R} -hyperbolique orientée
- (ii) une opération simplement transitive du groupe $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$ sur Δ

Nous proposons ensuite un petit exercice.

Exercice 10 : Rappel : d'après le chapitre 7, le birapport de 4 points sur une conique d'un plan affine est bien défini. Cet exercice poursuit l'exercice 8.

- 1) Dans un plan affine, une parabole possède la structure d'une droite projective privée d'un point, donc d'une droite affine. Démontrez que les transformations affines d'un plan qui fixent une parabole induisent sur celle-ci les transformations affines (au sens de la structure de droite affine de la parabole).

- 2) Dans un plan affine, une branche d'hyperbole possède la structure d'une droite hyperbolique. Démontrez que les transformations affines d'un plan qui fixent une branche d'hyperbole induisent sur celle-ci les isométries (c.-à-d. des translations ou symétries-point au sens de la définition 4).
- 3) Dans un plan affine, une ellipse possède la structure d'une droite projective avec une involution diamétrale, donc d'un cercle euclidien. Démontrez que les transformations affines d'un plan qui fixent une ellipse induisent sur celle-ci les isométries (au sens de la définition 2).

Les trois types de «droites», sans orientation ni unité de longueur a priori, munies chacune d'un groupe de «déplacements» qui opère simplement transitivement, se retrouvent dans la terminologie suivante. On appelle :

- **droite parabolique** une droite euclidienne *sans unité de longueur* abstraite : sa structure est analogue à celle d'une parabole dans un plan affine.
- **droite hyperbolique** (c'est le terme déjà choisi) une droite hyperbolique abstraite : sa structure est analogue à celle d'une branche d'hyperbole dans un plan affine.
- **droite elliptique** un cercle euclidien abstrait : sa structure est analogue à celle d'une ellipse dans un plan affine, ou d'un cercle dans un plan euclidien.

Remarque La droite parabolique et la droite hyperbolique sont entièrement caractérisées par leur structure projective (ou si l'on préfère, par la connaissance des birapports). Pour la droite elliptique, il faut en outre préciser une involution sans point double en tant qu'involution diamétrale. Par ailleurs, dans le cas du corps \mathbb{R} , les trois droites peuvent être vues comme des espaces métriques, et les isométries définies de manière abstraite deviennent des isométries au sens de la métrique. La droite hyperbolique et la droite elliptique possèdent alors une unité de longueur naturelle, mais pas la droite parabolique.

9) LE PLAN HYPERBOLIQUE via le modèle de Beltrami

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le modèle de Beltrami du plan hyperbolique. Dans ce modèle les droites du plan hyperbolique sont représentés par les cordes d'un cercle fixé une fois pour toutes dans un plan euclidien ordinaire. Les points de ce cercle sont alors vus comme «points à l'infini» du plan, et leur structure est celle d'une droite projective réelle. Du point de vue technique, nous développons les propriétés du modèle de Beltrami en nous appuyant essentiellement sur les propriétés de la droite projective réelle, étudiées au chapitre 7. Le groupe des isométries d'un plan hyperbolique «modèle de Beltrami» est alors quasiment défini comme étant le groupe des homographies de la droite projective réelle constituée par ses points à l'infini.

Dans tout ce chapitre, nous désignons par \mathbf{R} un corps euclidien. Le lecteur ou la lectrice non assoiffés de généralités pourront faire comme s'il s'agit du corps des nombres réels classique.

Nous avons (entre)vu au chapitre 7 que la théorie de la droite projective réelle pouvait être développée dans le cadre d'une droite projective sur un tel corps, et nous utiliserons librement pour une droite projective sur \mathbf{R} les résultats obtenus au chapitre 7 dans le cas réel, quand ils ont été obtenus sans faire appel à d'autres propriétés de \mathbb{R} que celles supposées vraies dans \mathbf{R} .

Dans ce cadre plus général, la notion de plan \mathbf{R} -euclidien est claire : on considère un plan affine sur le corps \mathbf{R} , et on doit avoir en plus un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée) sur les vecteurs du plan. Voir chapitre 4 section (e) pour plus de précisions.

Ce n'est que dans la section consacrée au plan hyperbolique vu comme espace métrique que nous devrons nous limiter au cas où \mathbf{R} est \mathbb{R} .

a) Le modèle de Beltrami : déplacements et antidéplacements du plan hyperbolique

La paternité du modèle de Beltrami peut également être attribuée à Klein, et sans doute à quelques autres moins connus... Que tous ces glorieux ou moins glorieux anciens ne nous en veuillent pas trop.

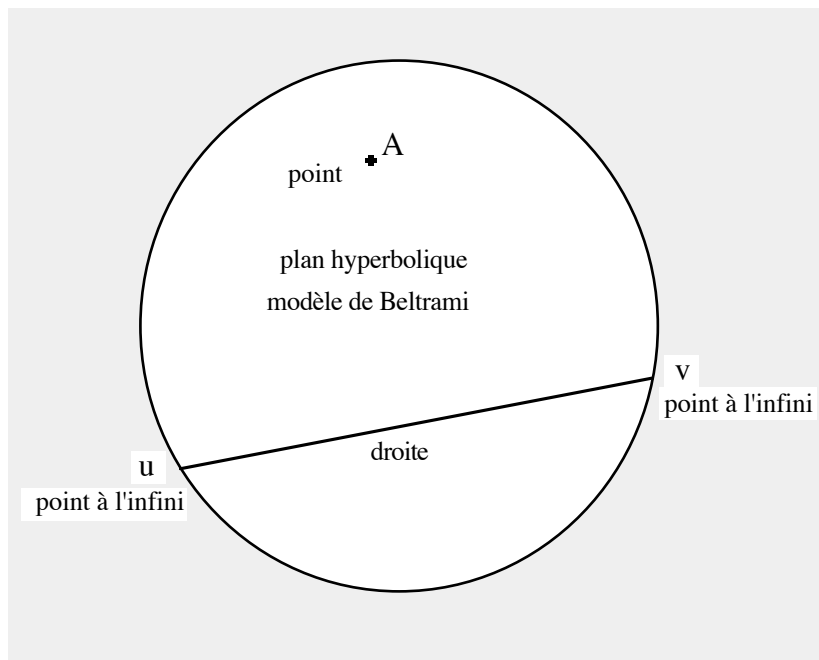
Principales définitions, étude des symétries

Les points, les droites et le groupe

On considère un cercle \mathcal{C} dans un plan euclidien \mathcal{P} et \mathcal{B} le disque ouvert limité par \mathcal{C} . Les points de \mathcal{B} sont les points du plan hyperbolique, modèle de Beltrami.

Nous notons $\text{PGL}(\mathcal{C})$ le groupe des homographies de \mathcal{C} .

Nous notons les points de \mathcal{C} par des minuscules u, v, w, \dots et les points de \mathcal{B} par des majuscules A, B, C, \dots



Nous appelons **droite de \mathcal{B}** l'intersection de \mathcal{B} avec une droite euclidienne Δ qui coupe \mathcal{C} en deux points u et v . Nous notons (uv) cette droite de \mathcal{B} . Nous notons \mathcal{B}^\bullet l'ensemble des droites de \mathcal{B} . Nous disons que u et v sont les **points à l'infini** de la droite (uv) .

Puisque les points de \mathcal{C} sont considérés comme des points à l'infini de \mathcal{B} on utilisera également la notation \mathcal{B}_∞ à la place de \mathcal{C} .

Par deux points A et B de \mathcal{B} il passe exactement une droite de \mathcal{B} . On la note (AB) . Par un point A de \mathcal{B} et un point w de \mathcal{B}_∞ il passe exactement une droite de \mathcal{B} . On la note (Aw) .

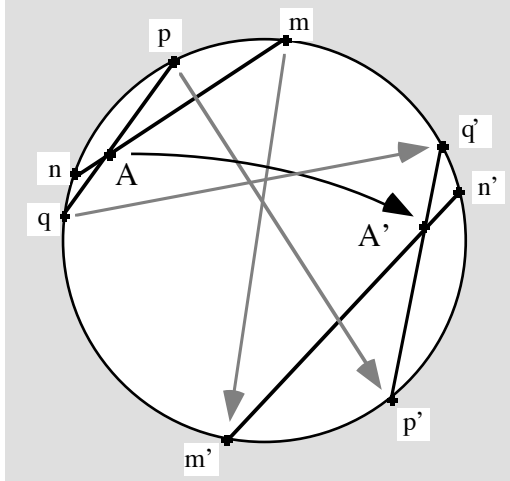
Nous avons vu au chapitre 7 que tout point A de \mathcal{B} définit une perspective $\Pi_{A, \mathcal{C}, \mathcal{C}}$ de \mathcal{C} sur \mathcal{C} qui est une involution sans point double de \mathcal{C} , et que toute involution sans point double de \mathcal{C} est de cette forme (chapitre 7 section (c) proposition 10). Autrement dit encore, l'application $A \mapsto \Pi_{A, \mathcal{C}, \mathcal{C}}$ établit une bijection entre les points de \mathcal{B} les involutions sans point double de \mathcal{C} .

Comme $\mathbf{PGL}(\mathbb{C})$ opère par automorphismes intérieurs sur la classe de conjugaison des involutions sans point double, il opère par la même occasion de manière naturelle sur \mathfrak{B} .

Cette opération $(\varphi, A) \mapsto \varphi * A$ est donc caractérisée par :

$$\varphi \circ \Pi_{A, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}} \circ \varphi^{-1} = \Pi_{\varphi * A, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}} \quad (*)$$

Définition 1 : Si φ est une homographie de \mathfrak{C} , nous dirons que la transformation de \mathfrak{B} définie ci-dessus par la formule (*) est l'**extension à \mathfrak{B}** de φ . Et nous la noterons encore φ , autrement dit nous écrivons $\varphi(A)$ pour $\varphi * A$.



Interprétons tout d'abord de manière géométrique cette opération de $\mathbf{PGL}(\mathbb{C})$ sur \mathfrak{B} .

Si une droite passant par A a pour points à l'infini m et n , alors $\Pi_{A, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}}$ échange m et n , donc $\varphi \circ \Pi_{A, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}} \circ \varphi^{-1}$ échange $\varphi(m)$ et $\varphi(n)$.

On obtient donc le dessin ci-contre qui visualise comment φ opère sur \mathfrak{B} comme extension de la manière dont il opère sur \mathfrak{C} .

Ceci peut être reformulé comme suit :

Faisons opérer $\mathbf{PGL}(\mathbb{C})$ sur \mathfrak{B}^\bullet (l'ensemble des droites de \mathfrak{B}) comme suit :

$$\varphi * (mn) \stackrel{\text{df}}{=} (m'n') \quad \text{où } n' = \varphi(n) \text{ et } m' = \varphi(m).$$

Alors le groupe $\mathbf{PGL}(\mathbb{C})$ opère sur \mathfrak{B} et sur \mathfrak{B}^\bullet de manière compatible avec l'incidence.

Nous pouvons encore apporter la précision suivante. Si φ est une homographie de \mathfrak{C} et si ψ désigne (exceptionnellement, pour les quelques lignes qui suivent) l'extension de φ à \mathfrak{B} l'image par ψ de la droite (uv) de \mathfrak{B} (avec u et v des points à l'infini) est la droite $(u'v')$ où $u' = \varphi(u)$ et $v' = \varphi(v)$. En effet, tous les points de (uv) ont pour image par ψ des points de $(u'v')$ et tous les points de $(u'v')$ ont pour image par ψ^{-1} des points de (uv) .

Notons également que le passage de φ à ψ est injectif : l'image d'un point u à l'infini par φ est obtenue à partir des images par ψ de deux droites distinctes de \mathfrak{B} ayant ce point à l'infini.

On considère maintenant le groupe des transformations de \mathfrak{B} obtenues comme extensions à \mathfrak{B} d'homographies de \mathfrak{B}_∞ .

Nous allons voir que ce groupe de transformations de \mathfrak{B} présente toutes les caractéristiques d'un groupe de déplacements et antidéplacements pour une géométrie plane. Ceci justifie la terminologie suivante.

Définition 2 : Nous appellerons

- **déplacement de \mathfrak{B}** l'extension à \mathfrak{B} d'une homographie directe de \mathfrak{C} ,
- **antidépacement de \mathfrak{B}** l'extension à \mathfrak{B} d'une homographie indirecte de \mathfrak{C} ,
- **placement de \mathfrak{B}** un déplacement ou un antidépacement de \mathfrak{B} .

Nous noterons respectivement $\mathbf{PI}(\mathfrak{B})$ et $\mathbf{Dep}(\mathfrak{B})$ pour le groupe des placements et celui des déplacements de \mathfrak{B} .

Vu ce qui a déjà été dit, le groupe $\mathbf{PI}(\mathfrak{B})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{PGL}(\mathfrak{B}_\infty)$, c'est seulement le point de vue qui diffère, selon qu'on regarde le groupe opérer sur \mathfrak{B} ou sur \mathfrak{B}_∞ .

Vues les précisions apportées après la définition 1 et vu le théorème 3 du chapitre 7 section (c) concernant les classes de conjugaisons des involutions d'une droite projective réelle, on a d'ores et déjà les résultats suivants :

Proposition 1 : L'image d'une droite de \mathfrak{B} par un placement est une droite. Le groupe des placements opère transitivement sur les droites et sur les points.

Nous pouvons dès maintenant donner une définition de la structure de plan hyperbolique en général, par copie conforme du modèle de Beltrami muni de son groupe de placements. Nous proposerons plus loin d'autres définitions équivalentes et tout aussi raisonnables pour cette structure de plan hyperbolique.

Définition 3 : (*structure de plan hyperbolique, première définition*)

Notons \mathfrak{B} le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine dans \mathbf{R}^2 . Un plan hyperbolique \mathfrak{D} est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure

- l'ensemble des points : \mathfrak{D}
- un ensemble non vide $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ de bijections de \mathfrak{D} vers \mathfrak{B} (appelées bijections hyperboliques).

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier les axiomes :

- 1) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$, alors $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathbf{PI}(\mathfrak{B})$
- 2) si $\varphi_1 \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$, $\psi \in \mathbf{PI}(\mathfrak{B})$, alors $\psi \circ \varphi_1 \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$

D'après la proposition 1, la notion de droite est clairement définie dans toute copie conforme du modèle de Beltrami.

Exercice 1 :

- a) Démontrez que la notion de placement d'un plan hyperbolique est légitime (c.-à-d. est définie sans ambiguïté dans tout plan hyperbolique), et que la distinction entre déplacements et antidépacements est elle aussi légitime.
- b) Démontrez que la notion de bijection hyperbolique entre plans hyperboliques est légitime.
- c) Démontrez que la notion de point à l'infini d'un plan hyperbolique est légitime. A toute droite sont associés deux points à l'infini du plan.

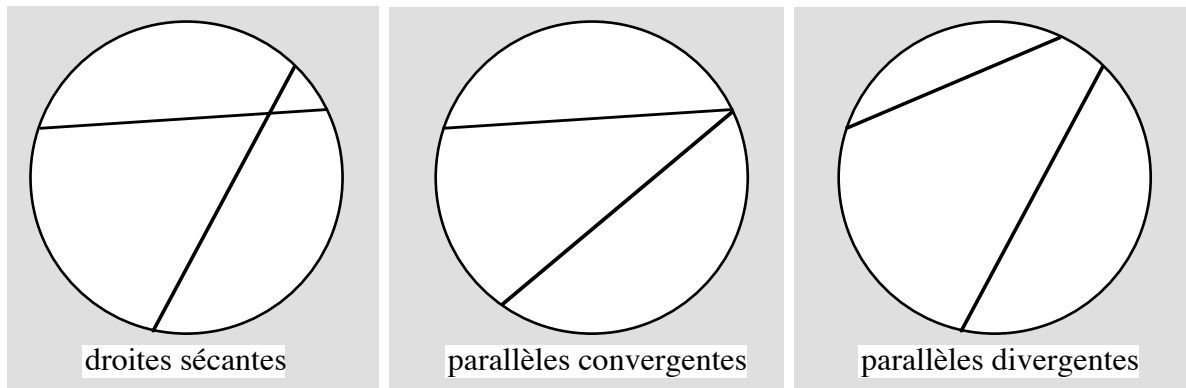
- d) Montrer que les points à l'infini d'un plan hyperbolique arbitraire sont munis d'une structure de droite projective réelle bien définie.

Nous ne répéterons pas pour chaque notion définie dans le modèle \mathfrak{B} et invariante par les placements, la remarque que cette notion est légitime dans tout plan hyperbolique.

De même, le fait que, une fois les notions légitimées pour tout plan hyperbolique, les énoncés des lemmes, propositions, théorèmes restent vrais dans tout plan hyperbolique est en général suffisamment clair pour que nous n'insistions pas systématiquement dessus.

Parallélisme

Deux droites de \mathfrak{B} qui ont un point en commun dans \mathfrak{B} sont dites **sécantes**. Dans le cas contraire, elles sont dites **parallèles**.



Deux droites parallèles de \mathfrak{B} qui ont un point à l'infini en commun sont dites **strictement parallèles**. On dit encore que ce sont des **droites (parallèles) convergentes**.

Dans le cas contraire on dit que ce sont des **droites (parallèles) divergentes** ou **écartées**.

Symétries par rapport à un point et une droite

Nous appelons **symétrie** un placement de \mathfrak{B} distinct de l'identité, mais dont le carré est égal à l'identité. Les symétries de \mathfrak{B} correspondent aux involutions de \mathfrak{B}_∞ .

Définition 4 : Si A est un point de \mathfrak{B} , nous appelons **symétrie par rapport au point A** et nous notons σ_A l'extension à \mathfrak{B} de l'involution $\Pi_{A,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$. Si Δ est une droite de \mathfrak{B} , avec u et v pour points à l'infini, nous appelons **symétrie par rapport à la droite Δ** et nous notons σ_Δ l'extension à \mathfrak{B} de l'involution $\sigma_{\{u,v\}}$.

Cette terminologie, analogue à celle du plan euclidien, est justifiée par les résultats qui suivent (lemmes 1 et 2). Le fait qu'elle est légitime dans tout plan hyperbolique résulte de la partie (a) de ces lemmes.

D'après ce que nous savons sur les involutions de $\mathbf{PGL}(\mathfrak{B}_\infty)$ toute symétrie directe de $\mathbf{PI}(\mathfrak{B})$ est du type σ_A pour un point $A \in \mathfrak{B}$ et toute symétrie indirecte du type σ_Δ pour une droite $\Delta \in \mathfrak{B}^\bullet$. En outre le théorème fondamental 2 du chapitre 7 section (c) se traduit comme suit :

Théorème 1 : *(déplacements et antidéplacements comme produits de symétries)*

- a) Tout déplacement de \mathfrak{B} peut s'écrire comme produit de deux symétries par rapport à des droites.
- b) Tout antidéplacement de \mathfrak{B} peut s'écrire comme produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une symétrie par rapport à une droite.

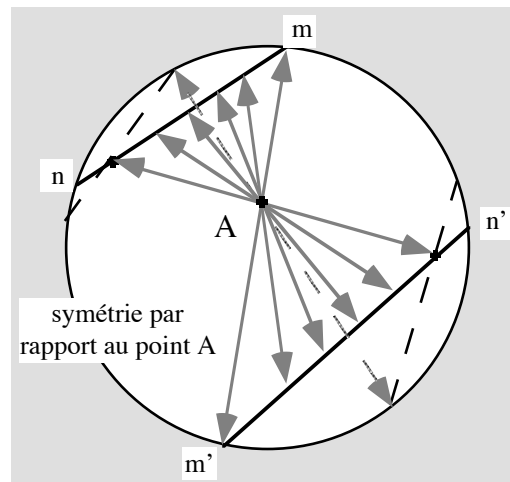
Remarque L'énoncé du théorème 1 est encore valable en géométrie plane euclidienne ou sphérique.

Dans les preuves qui suivent, nous utilisons souvent de manière implicite le résultat facile suivant : dans un groupe, le produit de deux symétries distinctes est une symétrie si et seulement si elles commutent, et dans ce cas, les trois symétries et l'élément neutre forment un groupe commutatif isomorphe à $\{ \pm 1 \} \times \{ \pm 1 \}$.

Lemme 1 : (*symétries-point*)

- a) Soit A un point de \mathfrak{B} . Pour tout placement φ de \mathfrak{B} , on a :

$$\varphi \circ \sigma_A \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\varphi(A)},$$
 en particulier φ et σ_A commutent si et seulement si $\varphi(A) = A$.
- b) La symétrie σ_A admet A comme unique point fixe.
- c) Une droite Δ de \mathfrak{B} est fixe par σ_A si et seulement si elle passe par A .
- d) Si δ est une droite ne passant pas par A , et δ' son image par σ_A , les droites δ et δ' sont divergentes et la restriction de σ_A à $\delta \cup \delta'$ est la perspective $\Pi_{A,\delta,\delta'}$.



preuve > (a) L'égalité est l'extension à \mathfrak{B} de l'égalité qui sert de définition pour $\varphi(A)$.

(b) D'après (a) le point A est fixe. Soit B un point distinct de A supposé fixe par σ_A . Alors σ_A et σ_B commutent, et $\varphi = \sigma_A \circ \sigma_B$ est une symétrie directe. L'involution de \mathfrak{B}_∞ correspondant à φ fixe les deux points à l'infini de la droite (AB) , donc elle est indirecte : contradiction.

(c) Une droite δ avec pour points à l'infini u et v est fixe par A si et seulement si $\Pi_{A,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}(\{u,v\}) = \{u,v\}$, c.-à-d. si et seulement si les points A, u, v sont alignés dans le plan euclidien, ou encore si et seulement si A est sur (uv) .

(d) Le fait que (mn) et $(m'n')$ ne se coupent pas dans \mathfrak{B} se voit sur la figure, et peut être rigoureusement démontré au moyen d'un calcul (de manière générale, si dans un plan euclidien, on a quatre points sur un cercle, parmi les trois paires de droites que définissent ces quatre points, une et une seule se coupe à l'intérieur du cercle). La dernière affirmation résulte de (b) et (c) \square

Exercice 2 : Vérifiez en détail l'affirmation qui prouve (a) dans la preuve ci-dessus. Démontrez que la notion de symétrie-point est bien définie dans tout plan hyperbolique et que les affirmations du lemme 1 restent vraies.

Exercice 3 : Démontrez, sans faire nécessairement appel au lemme 1, que le produit de trois involutions $\Pi_{C,\mathcal{C},\mathcal{C}} \circ \Pi_{B,\mathcal{C},\mathcal{C}} \circ \Pi_{A,\mathcal{C},\mathcal{C}}$ (où A, B, C sont distincts et dans \mathfrak{B}) est une involution si et seulement si les trois points sont alignés. Inspirez-vous de ceci pour donner une démonstration du théorème de Pascal pour un cercle lorsque deux des «points d'intersection croisés» sont intérieurs au cercle (le théorème de Pascal général est démontré chapitre 7 section (d)).

Exercice 4 : Comparer les résultats du lemme 1 avec les résultats analogues dans le plan euclidien et le plan sphérique.

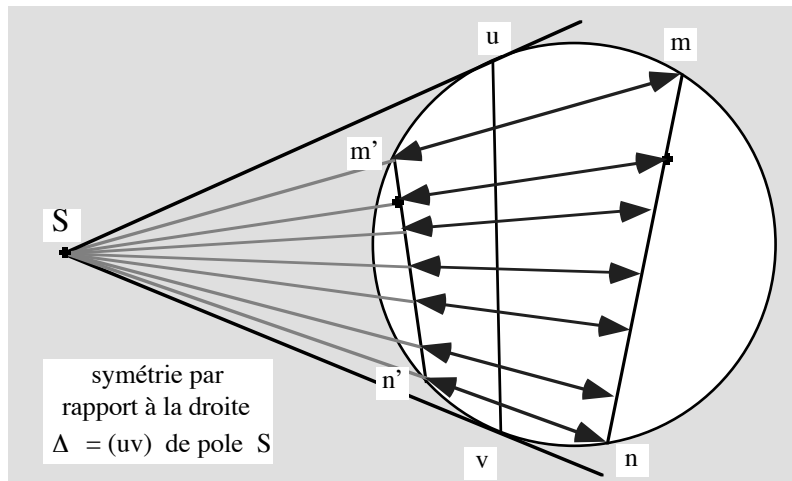
Dans le lemme suivant, nous parlons du **pole d'une droite Δ par rapport à un cercle \mathcal{C}** dans un plan euclidien \mathcal{P} . Lorsque la droite Δ coupe le cercle \mathcal{C} en a et b (ce qui est la cas dans ce lemme) le pole de Δ est l'intersection des tangentes en a et b au cercle \mathcal{C} . Pour que le pole existe il faut donc que la droite ne soit pas un diamètre du cercle.

Lemme 2 : (symétrie par rapport à une droite)

a) Pour tout placement φ de \mathfrak{B} , on a :

$$\varphi \circ \sigma_{\Delta} \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\varphi(\Delta)}$$

en particulier φ et σ_{Δ} commutent si et seulement si $\varphi(\Delta) = \Delta$.



b) Étant donné un point A et une droite Δ on a les équivalences,

$$\sigma_A \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta} \circ \sigma_A \Leftrightarrow \sigma_{\Delta}(A) = A \Leftrightarrow \sigma_A(\Delta) = \Delta \Leftrightarrow A \text{ est sur } \Delta$$

et dans ce cas $\sigma_A \circ \sigma_{\Delta} = \sigma_{\Delta'}$, où Δ' est une droite passant par A .

La droite Δ est l'ensemble des points fixes de la symétrie σ_{Δ} .

c) Une droite δ distincte de Δ est fixe par σ_{Δ} si et seulement si

- cas (1) : Δ est un diamètre euclidien de \mathfrak{B} , et δ est orthogonale à Δ ,
- cas (2) : Δ admet un pole S par rapport au cercle \mathfrak{B}_{∞} , et la droite δ prolongée dans \mathcal{P} passe par le pole S de Δ .

d) Si δ est une droite avec $\sigma_{\Delta}(\delta) = \delta' \neq \delta$, la restriction de σ_{Δ} à $\delta \cup \delta'$ est donnée par

- la symétrie euclidienne par rapport à Δ dans le cas (1),
- la perspective $\Pi_{S,\delta,\delta'}$ dans le cas (2).

preuve> (a) L'égalité est l'extension à \mathfrak{B} de l'égalité $\varphi \circ \sigma_{\{u,v\}} \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\{u',v'\}}$ dans $\mathbf{PGL}(\mathfrak{C})$.

(b) On a les équivalences :

$$\sigma_A \text{ et } \sigma_\Delta \text{ commutent} \Leftrightarrow \sigma_A(\Delta) = \Delta \quad (\text{par (a)})$$

$$\sigma_A(\Delta) = \Delta \Leftrightarrow A \text{ est sur } \Delta \quad (\text{lemme 1(c)})$$

$$\sigma_A \text{ et } \sigma_\Delta \text{ commutent} \Leftrightarrow \sigma_\Delta(A) = A \quad (\text{lemme 1(a)})$$

(c) Écrire l'image de $\delta = (pq)$ par σ_Δ et remarquer que σ_Δ est l'extension de $\sigma_{\{u,v\}}$ qui s'exprime sous forme $\Pi_{S,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$ ou symétrie orthogonale par rapport à Δ selon le cas (voir chapitre 7, section (c) proposition 10).

(d) Résulte facilement de (c). \square

Orthogonalité

Deux droites Δ et Δ' de \mathfrak{B} sont dites **orthogonales** (dans \mathfrak{B}) lorsqu'elles sont sécantes et que les symétries par rapport à Δ et Δ' commutent. Le produit de ces symétries est alors une symétrie directe, donc c'est la symétrie par rapport à leur point d'intersection.

Proposition 2 :

- Les placements de \mathfrak{B} conservent l'orthogonalité.
- Une droite Δ' distincte de Δ est orthogonale à une droite Δ si et seulement si $\sigma_\Delta(\Delta') = \Delta'$.
- Par un point M il passe exactement une droite orthogonale à une droite donnée Δ .
- Deux perpendiculaires distinctes à une même droite sont divergentes.

preuve> (a) Appliquer la définition et le lemme 2 (a).

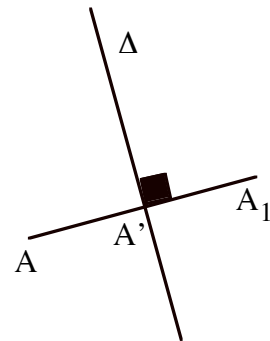
(b) Les symétries par rapport à Δ et Δ' commutent si et seulement si $\sigma_\Delta(\Delta') = \Delta'$ (lemme 2(a)). Si Δ' est distincte de Δ elle coupe alors Δ (lemme 2(c)).

(c) Si M est sur Δ la perpendiculaire est la droite Δ' définie par $\sigma_{\Delta'} = \sigma_M \circ \sigma_\Delta$. Si M est extérieur à Δ , on prend $M' = \sigma_\Delta(M)$ et la droite est (MM') . L'unicité est claire dans les deux cas.

(d) D'après le lemme 2(c). \square

Notons enfin qu'une symétrie par rapport à une droite admet la même description qu'en géométrie plane euclidienne ou en géométrie sphérique : le symétrique A_1 du point A par rapport à la droite Δ s'obtient en considérant la perpendiculaire à Δ passant par A , qui coupe Δ en A' . Le point A_1 est alors le symétrique de A par rapport à A' .

Cela justifie qu'on appelle la symétrie par rapport à une droite une **symétrie orthogonale**.



Symétries conservant deux points donnés ou deux droites données

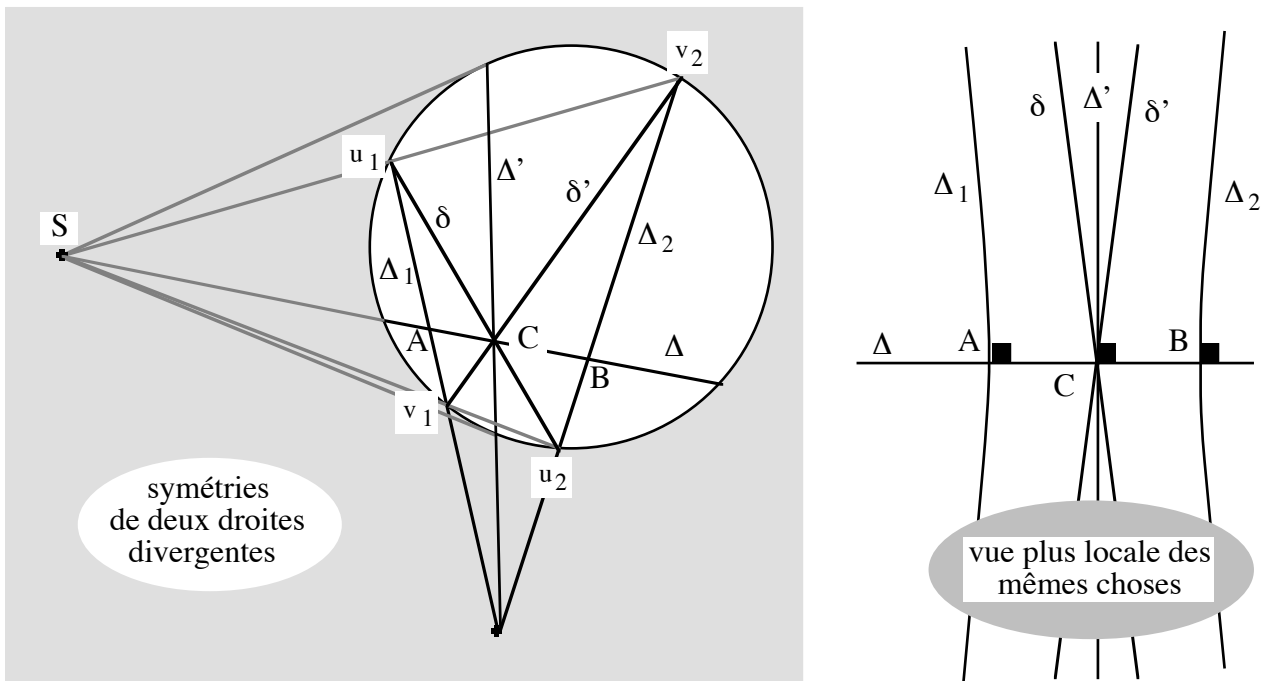
Proposition 3 : (symétries de deux parallèles divergentes)

Soient deux droites divergentes Δ_1 et Δ_2 . Les symétries qui conservent $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ sont, exclusivement :

- une symétrie par rapport à un point C , appelé **milieu des deux droites**.
- une symétrie par rapport à une droite Δ passant par C , unique **perpendiculaire commune** à Δ_1 et Δ_2 .
- une symétrie par rapport à la droite Δ' , perpendiculaire à Δ en C , appelée **médiatrice de Δ_1 et Δ_2** .

preuve> (figure ci-dessous)

Soient u_1 et v_1 les points à l'infini de Δ_1 , u_2 et v_2 les points à l'infini de Δ_2 nommés de manière que u_1, v_1, u_2 et v_2 soient dans cet ordre pour l'un des deux sens de parcours de \mathfrak{B}_∞ . Toute symétrie de la figure $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ est l'extension à \mathfrak{B} d'une involution de \mathfrak{B}_∞ qui conserve $\{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}\}$, et qui est donc, en restriction à $\{u_1, v_1, u_2, v_2\}$ ou bien le produit de deux transpositions disjointes, ou bien l'une des transpositions $u_1 \leftrightarrow v_1$ ou $u_2 \leftrightarrow v_2$. Le dernier cas est exclu parce que la symétrie par rapport à l'une des droites Δ_i ne fixe pas l'autre (les deux droites ne sont pas sécantes).



Les droites $(u_1 u_2)$ et $(v_1 v_2)$ se coupent en un point C , et la symétrie par rapport au point C échange les droites Δ_1 et Δ_2 , c'est l'extension à \mathfrak{B} de l'involution qui échange u_1 et u_2 d'une part, v_1 et v_2 d'autre part.

La perpendiculaire Δ à Δ_1 passant par C est, par la symétrie σ_C , également perpendiculaire à Δ_2 . Donc la symétrie σ_Δ conserve chacune des deux droites Δ_1 et Δ_2 , et c'est l'extension à \mathfrak{B} de l'involution qui échange u_1 et v_1 d'une part, u_2 et v_2 d'autre part.

Enfin la perpendiculaire Δ' à Δ en C fournit la dernière symétrie cherchée : $\sigma_{\Delta'}$.

Notez que les deux droites ont une unique perpendiculaire commune parce que toute perpendiculaire commune fournit une symétrie orthogonale qui fixe les deux droites. \square

Proposition 4 : (*symétries de deux points*)

Pour A, B dans \mathfrak{B} les symétries qui conservent $\{A, B\}$ sont, exclusivement :

- la symétrie par rapport à la droite (AB) .
- une symétrie par rapport à un point C situé sur (AB) , appelé **milieu des deux points**.
- la symétrie par rapport à la droite Δ' , perpendiculaire à (AB) en C , appelée **médiatrice des deux points**.

preuve> On considère les perpendiculaires Δ_1 et Δ_2 à (AB) en les points A et B . On est ramené à la proposition 3. Détails laissés au lecteur. \square

Exercice 5 : On considère \mathfrak{B} et \mathfrak{B}_∞ dans \mathcal{P} et on demande de construire, du point de vue de \mathcal{P} et avec les outils habituels dans \mathcal{P} , le milieu (hyperbolique) de deux points donnés dans \mathfrak{B} .

Proposition 5 : (*symétries de deux droites sécantes*)

Soient deux droites δ et δ' sécantes en un point C . Les symétries qui conservent $\{\delta, \delta'\}$ sont, exclusivement :

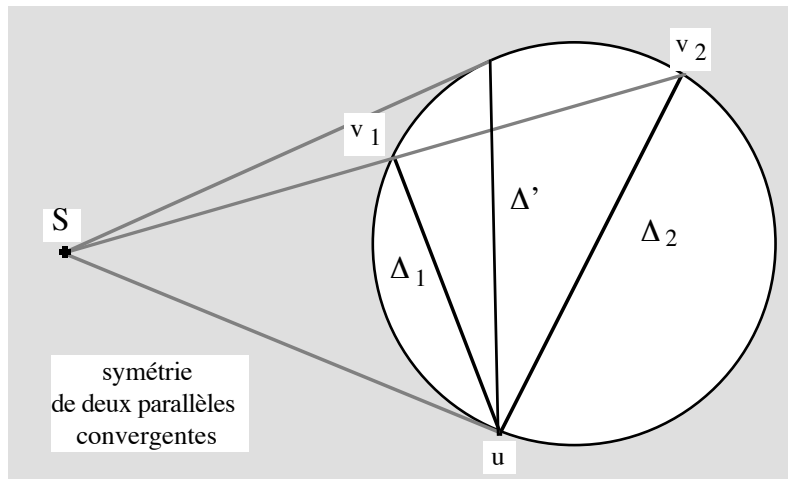
- la symétrie par rapport au point C .
- les symétries par rapport à deux droites orthogonales Δ et Δ' , sécantes en C , appelées **bissectrices de δ et δ'** .
- dans le cas où δ et δ' sont orthogonales, il y a également les symétries par rapport à δ et δ' .

preuve> On peut raisonner comme à la proposition 3. On retrouve la même figure. Détails laissés à la lectrice. Notez que l'absence de «symétrie» entre les rôles de Δ et Δ' sur la figure «locale» n'est qu'apparente. En effet, il faudrait, pour le cas présent, introduire de manière explicite (en noir et non en gris) dans la figure «globale» les droites (u_1v_2) et (v_1u_2) . \square

Remarque Dans le cas où δ et δ' sont orthogonales, le groupe des placements conservant $\{\delta, \delta'\}$ est le groupe du carré.

Proposition 6 : (*symétries de deux parallèles convergentes*)

Soient deux parallèles convergentes Δ_1 et Δ_2 , et u leur point commun à l'infini. Une seule symétrie conserve la figure $\{\Delta_1, \Delta_2\}$: une symétrie orthogonale par rapport à une droite appelée **bissectrice de Δ_1 et Δ_2** , ayant le point à l'infini u en commun avec Δ_1 et Δ_2 .



\mathfrak{B} en une symétrie orthogonale. \square

preuve> On raisonne comme à la proposition 3. Cette fois ci, on réclame une involution de \mathfrak{B}_∞ qui fixe le point à l'infini commun u et qui échange les points à l'infini distincts v_1 et v_2 . On sait qu'il n'y en a qu'une, et qu'elle s'étend à

Symétries et relation d'incidence entre points et droites

On peut distinguer les notions de parallèles convergentes ou divergentes sans faire appel aux points à l'infini : deux parallèles sont divergentes si et seulement si elles possèdent une perpendiculaire commune, ou, de manière équivalente, un centre de symétrie. Par ailleurs le centre de symétrie C de deux droites divergentes Δ_1 et Δ_2 peut être caractérisé par la propriété d'incidence suivante :

«une droite passant par C coupe Δ_1 si et seulement si elle coupe Δ_2 ».

Par conséquent on peut caractériser une symétrie-point par des relations d'incidence. Par ailleurs, tout déplacement est produit de symétries-point (cf. proposition 11). Le groupe des déplacements lui-même peut donc être caractérisé par des propriétés d'incidence. Nous développerons en détail cette problématique dans la section consacrée aux théorèmes structurels, qui termine ce chapitre.

Segments de droite, droites orientées, demi-plans

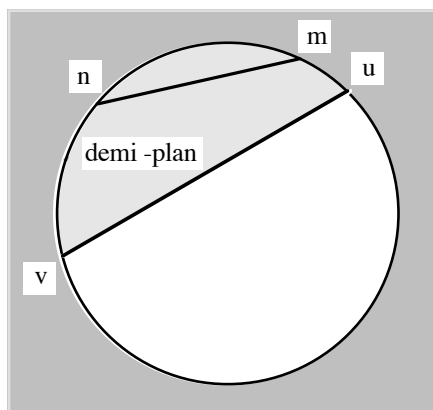
Étant donnés deux points A et B de \mathfrak{B} on note $[AB]$ le segment d'extrémités A et B dans le plan euclidien \mathcal{P} qui contient \mathfrak{B} . Pour que cette notion soit intéressante du point de vue du plan hyperbolique \mathfrak{B} il faut que soit vérifié le lemme suivant

Lemme 3 : (*segments de droite*)

Pour A, B dans \mathfrak{B} et pour tout placement φ de \mathfrak{B} on a $\varphi([AB]) = [A'B']$,
où $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$.

preuve> Comme un placement est composé de symétries par rapport à des droites, il suffit de le vérifier pour celles-ci. Et c'est presque clair d'après le lemme 2 (d). \square

Exercice 6 : Expliquez en quoi le raisonnement précédent n'est pas entièrement satisfaisant ! Un raisonnement purement calculatoire est possible : en démontrant que les birapports de points alignés (birapports vus dans \mathcal{P}) sont invariants par les placements (cf. dans le chapitre 8 section (b) l'étude consacrée à la droite hyperbolique vue comme arc ouvert de droite projective)



Avant de définir les segments de droite, on peut considérer que la notion la plus fondamentale est celle de **demi-plan**. Dans le modèle de Beltrami, nous appelons demi-plan limité par la droite (uv) l'ensemble des points situés sur les droites (mn) où m et n sont deux points d'un des deux arcs (fixé une fois pour toutes) d'extrémités u et v du cercle euclidien \mathcal{C} . Comme les homographies de \mathcal{C} transforment un arc en un arc (parce qu'elles conservent

ou inversent le sens de rotation sur le cercle), les placements de \mathfrak{B} transforment un demi-plan en un demi-plan, et c'est donc une notion légitime dans tout plan hyperbolique. Puisque la notion de demi-plan est légitime, on en déduit que celle de **demi-droite** et celle de segment sont également légitimes (détails laissés au lecteur épris de rigueur).

Notez que dans le modèle de Beltrami, la notion de demi-plan hyperbolique peut être réduite à la notion de demi-plan euclidien.

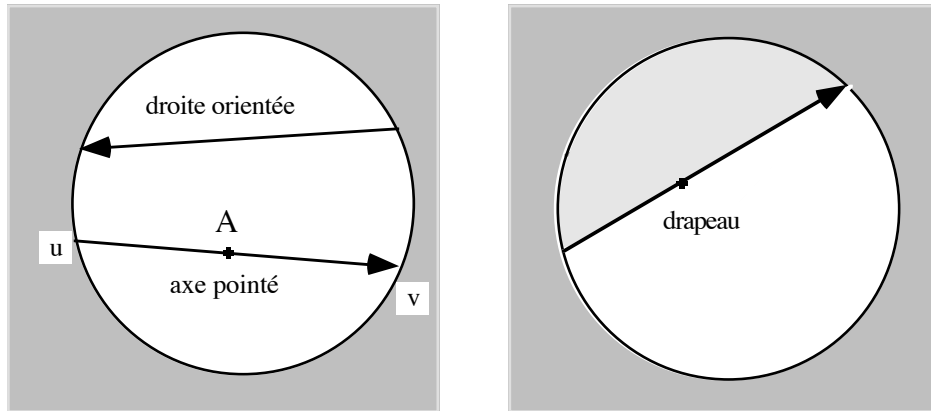
Notez aussi que le milieu de deux points A et B est sur le segment $[AB]$ (voir la figure des propositions 3 et 4)

Sur toute droite (uv) il y a exactement deux relations d'ordre total (opposées l'une de l'autre) dont les segments sont précisément les segments déjà définis. Chacune de ces relations d'ordre total se prolonge de manière naturelle aux deux points à l'infini de la droite. Privilégier une de ces deux relations d'ordre revient à **orienter la droite**. Puisque le groupe $\text{PI}(\mathfrak{B})$ opère sur les segments de droite, il opère aussi sur les droites orientées. Une **droite orientée** de \mathfrak{B} est encore appelée un **axe**. Elle est caractérisée par le couple de ses points à l'infini pris dans l'ordre du sens de parcours positif : changer l'ordre des points dans le couple revient à changer l'orientation de la droite.

Notez que la symétrie par rapport au point A change l'orientation de toute droite Δ passant par A , et que la symétrie par rapport à la droite Δ change l'orientation de toute droite orthogonale à Δ .

Deux théorèmes fondamentaux pour le groupe des placements

On définit à partir de la notion de droite orientée (ou axe), celles d'**axe pointé** et de **drapeau**.



Lemme 4 : Un déplacement qui fixe un axe pointé est égal à l'identité. Un antidéplacement qui fixe un axe pointé est la symétrie par rapport à cet axe. Un placement qui fixe un drapeau est égal à l'identité.

preuve> Considérons un axe pointé. Soient u et v les points à l'infini de l'axe, et A le point. Soient m et n les points à l'infini de la perpendiculaire en A à l'axe. Tout placement qui fixe l'axe pointé conserve aussi cette perpendiculaire. Il est donc induit par une homographie de \mathcal{B}_∞ qui fixe chaque point u et v et conserve le doublet $\{m,n\}$.

Si m et n sont fixes, l'homographie fixe 4 points, et c'est l'identité.

Dans l'autre cas, elle échange m et n , donc c'est une involution, et c'est $\sigma_{\{u,v\}}$. \square

La preuve du théorème fondamental qui suit est basée sur le lemme précédent et sur les résultats : médiatrice de deux points, existence des symétries orthogonales. Bien que l'énoncé du théorème fondamental 1 soit à peine plus fort que celui du théorème 1, nous avons tenu à donner pour insister sur les analogies avec les plans euclidiens et sphériques, y compris en ce qui concerne les preuves.

Théorème fondamental 1 : (*placements comme produits de symétries orthogonales*)

Soit τ un placement de \mathcal{B} .

- Si τ fixe trois points non alignés, c'est l'identité.
- Si $\tau \neq \text{Id}_{\mathcal{B}}$ fixe deux points A et B , c'est la symétrie orthogonale $\sigma_{(AB)}$.
- Si τ fixe un point A , c'est le produit d'une ou deux symétries orthogonales par rapport à des droites passant par A .
- Dans tous les cas τ est le produit de zéro, une, deux ou trois symétries orthogonales.

preuve> (a) et (b) : si τ fixe deux points, A et B , considérons la droite (AB) orientée de manière que A précède B , et appelons là Δ , alors τ fixe l'axe pointé (Δ, A) , et il suffit d'appliquer le lemme 4.

(c) et (d) se démontrent alors comme dans le cas du plan euclidien :

(c) Supposons que τ est distincte de l'identité. Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M , A est sur la médiatrice Δ de $[MN]$. Alors $\tau \circ \sigma_{\Delta}$ possède les deux points fixes A, N . Donc d'après (b) c'est l'identité ou la symétrie orthogonale $\sigma_{(AN)}$.

(d) Supposons que τ est distincte de l'identité. Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M . On considère la médiatrice Δ de $[MN]$. Alors $\tau \circ \sigma_{\Delta}$ possède le point fixe N . Ce qui nous ramène à l'un des cas précédents. \square

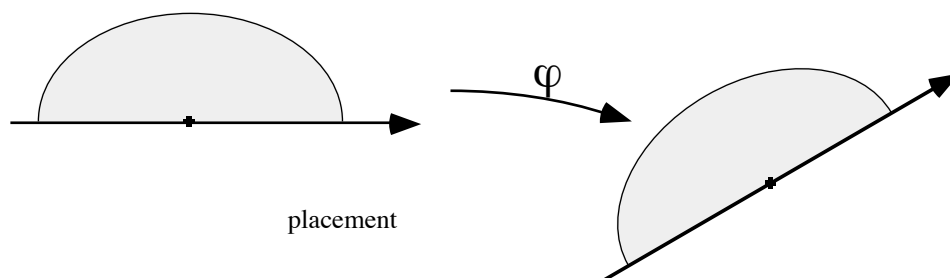
La proposition qui suit est un corollaire facile du résultat précédent.

Proposition 7 :

- a) Un antidéplacement qui fixe un point A est une symétrie par rapport à une droite Δ passant par A .
- b) Le seul placement qui admette un droite Δ comme ensemble de points fixes est la symétrie par rapport à Δ .
- c) Un déplacement qui fixe un point A est produit de deux symétries par rapport à des droites passant par A , la première (ou la seconde) pouvant être choisie arbitrairement. S'il est distinct de l'identité, son seul point fixe est A .
- d) Deux déplacements (resp. antidéplacements) qui coïncident en deux points sont égaux.

Théorème fondamental 2 : (*systèmes de repères naturels*)

- a) Le groupe des placements opère simplement transitivement sur les drapeaux.
- b) Le groupe des déplacements opère simplement transitivement sur les axes pointés, ou encore sur les demi-droites.



preuve> Vu le lemme 4, il suffit de montrer que les placements opèrent transitivement sur les axes pointés. Comme ils opèrent transitivement sur les points, il suffit de montrer que pour un point A particulier, les placements qui fixent A opèrent transitivement sur les axes passant par A . Or cela résulte par exemple de la proposition 5 (la symétrie par rapport à l'une des bissectrices des deux droites transforme le premier axe en le second). \square

Le groupe des placements qui fixent un point

La proposition 7 nous donne déjà beaucoup de renseignements sur le groupe des placements qui fixent un point J . Notamment le fait que les antidéplacements sont des symétries orthogonales, et que les déplacements sont produits de deux symétries orthogonales.

Rotations

Définition 5 : Tout déplacement d'un plan hyperbolique qui fixe un point J est appelé une **rotation autour de J** . On dira «rotation vraie» pour une rotation distincte de l'identité.

Notez que du point de vue de la définition d'une rotation par un drapeau et son image, la situation est identique à celles du plan sphérique et du plan euclidien.

Étudions maintenant plus en détail le groupe des placements d'un modèle de Beltrami \mathfrak{B} qui conservent le point K au centre euclidien du disque.

Manifestement toutes les (transformations induites par les) isométries de \mathcal{P} qui conservent K conviennent : ces placements de \mathfrak{B} sont d'une part les symétries par rapport aux droites Δ de \mathfrak{B} passant par K (qui proviennent de symétries orthogonales de \mathcal{P}), et d'autre part les transformations induites par les rotations de \mathcal{P} autour de K . Or ce sont des produits de deux symétries orthogonales. Et d'après la proposition 7, ce sont les seuls placements de \mathfrak{B} conservant K .

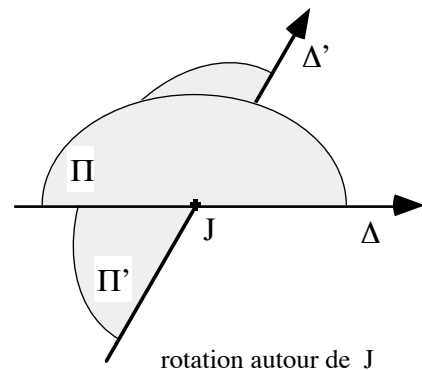
Voyons enfin le cas général. La situation en un point J de \mathfrak{B} arbitraire est, naturellement, toujours une copie conforme (puisque $\text{Pl}(\mathfrak{B})$ opère transitivement sur les points de \mathfrak{B}) de la situation au point K .

On obtient donc :

Théorème 2 : (*placements d'un plan hyperbolique qui fixent un point*)

- Les placements d'un plan hyperbolique qui fixent un point J forment un groupe isomorphe à celui des isométries fixant un point dans un plan euclidien, et donc à $\mathbf{O}(2, \mathbf{R})$ (groupe des matrices orthogonales 2×2).
- Une rotation vraie admet un seul point fixe (on peut donc parler sans ambiguïté du centre d'une rotation vraie). En outre, elle ne fixe aucun point à l'infini. Un antidéplacement qui fixe J est une symétrie orthogonale.
- Si ρ est une rotation de centre J et σ_Δ une symétrie orthogonale avec $J \in \Delta$ et si $\rho(\Delta) = \Delta'$ on a :

$$\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta = \rho^2 \quad (1), \quad \sigma_\Delta \circ \rho \circ \sigma_\Delta = \rho^{-1} \quad (2), \quad \rho \circ \sigma_\Delta \circ \rho^{-1} = \sigma_{\Delta'} \quad (3),$$



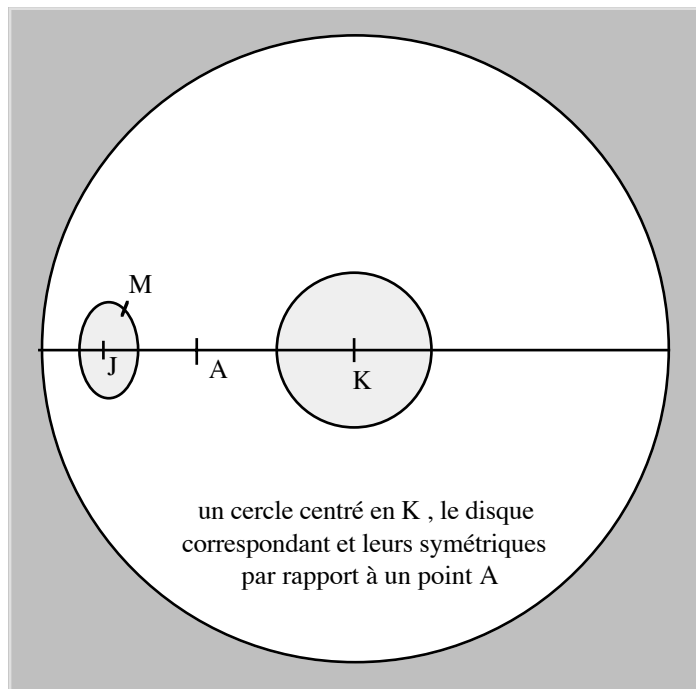
- d) Le groupe est produit semi direct interne du sous-groupe des rotations et d'un sous-groupe $\{\sigma_A, Id\}$. Si le corps de base est \mathbb{R} c'est donc un groupe isomorphe au produit semi-direct abstrait $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times_{\theta} \{\pm 1\}$ où $\theta(-1)(\alpha) = -\alpha$

Remarque Par construction, l'isomorphisme donné en (a) est défini «à un automorphisme intérieur près» du groupe image : en effet, si J est un point d'un plan hyperbolique arbitraire \mathfrak{D} , deux bijections hyperboliques de \mathfrak{D} vers \mathfrak{B} qui envoient J sur le centre euclidien K de \mathfrak{B} diffèrent entre elles d'un placement de \mathfrak{B} qui fixe K et les deux isomorphismes de groupes induits par ces deux bijections hyperboliques diffèrent entre eux par l'automorphisme intérieur correspondant à ce placement de \mathfrak{B} .

En particulier l'isomorphisme qui en résulte entre le groupe des placements fixant J et le groupe $SO(2, \mathbb{R})$ est unique «à l'orientation près», c.-à-d. à l'automorphisme $S \mapsto S^{-1}$ près. Nous reviendrons sur ce point.

Exercice 7 : Soit G un groupe avec un sous-groupe G^+ d'indice 2 tel que tout élément de G non dans G^+ soit d'ordre 2. Soit ρ un élément de G^+ et σ un élément non dans G^+ . Montrez que $\sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho^{-1}$ que pour $\sigma' = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$, on a $\sigma' \circ \sigma = \rho^2$. Montrez que G^+ est un sous groupe commutatif distingué de G . Donnez des exemples variés de cette situation.

Cercles et disques



Nous définissons dans le plan hyperbolique \mathfrak{B} le **cercle** (hyperbolique) **de centre J passant par M** comme l'orbite de M sous l'action du groupe des rotations autour de J . Cette action est simplement transitive. Le cercle de centre J passant par M est également l'ensemble des symétriques de M par rapport aux droites passant par J .

Nous définissons le **disque de centre J** correspondant, comme la réunion des orbites des points du segment $[JM]$.

Vu dans \mathfrak{P} avec des lunettes euclidiennes, un cercle (hyperbolique) est une ellipse (nous le prouverons plus loin).

Dans le cas où J est le centre euclidien K de \mathfrak{B} les cercles hyperboliques de centre K sont aussi les cercles euclidiens de centre K contenus dans \mathfrak{B} .

Déplacements et antidéplacements du plan hyperbolique qui fixent une droite

Soit une droite Δ d'un plan hyperbolique \mathfrak{B} , avec u et v pour points à l'infini. Notons Δ_1 et Δ_2 les deux droites orientées qui lui correspondent, et E_1 et E_2 les deux demi-plans qu'elle définit. Soit enfin A un point de Δ et considérons le drapeau $D = (A, \Delta_1, E_1)$. On s'intéresse aux placements qui conservent Δ . Un tel placement est entièrement caractérisé par l'image qu'il donne de D , et cette image est un drapeau $D' = (B, \Delta_i, E_j)$ ($i, j = 1$ ou 2).

Placements qui conservent une droite en renversant son orientation

Si l'orientation de la droite est renversée, on a affaire à une symétrie, puisqu'à l'infini, les points u et v sont échangés. C'est la symétrie par rapport au milieu de $[AB]$ si les demi-plans sont échangés, et la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$ dans le cas contraire.

Théorème 3 : Un placement qui fixe une droite Δ en renversant son orientation est une symétrie par rapport à un point de Δ ou par rapport à une droite orthogonale à Δ .

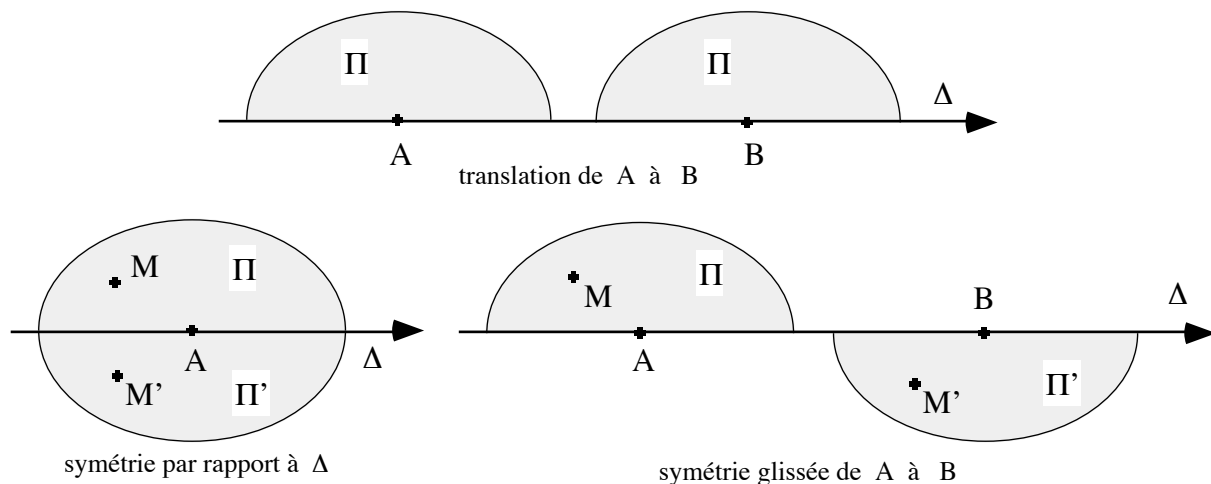
Notez que le résultat est le même avec les plans euclidien et sphérique.

Placements qui conservent une droite orientée

Le deuxième théorème fondamental et l'analogie avec les plans euclidien et sphérique justifient les définitions suivantes.

Définition 6 : On appelle **translation le long d'une droite Δ** un déplacement de \mathfrak{B} qui fixe Δ sans changer son orientation. On appelle **symétrie glissée d'axe Δ** le produit (commutatif) d'une symétrie par rapport à Δ et d'une translation le long de Δ distincte de l'identité.

Notez que la définition 6 correspond à la description des translations et symétries glissées en termes de «un drapeau et son image» (figures ci-dessous).



Exercice 8 : Démontrer que le produit d'une symétrie par rapport à Δ et d'une translation le long de Δ est commutatif (raisonner avec des drapeaux ou bien considérer la restriction à Δ et appliquer la proposition 7)

Remarques

- 1) Les translations le long de Δ forment un groupe. Une translation le long de Δ distincte de l'identité sera appelée une translation vraie. On convient par ailleurs que la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ est un cas particulier (dégénéré) de symétrie glissée d'axe Δ , la translation correspondante étant réduite à l'identité.
- 2) Dans le cas euclidien les translations forment un sous groupe strict (avec deux degrés de liberté) du groupe des déplacements. Dans le cas sphérique, tout déplacement est une translation (il y a donc trois degrés de liberté). Dans le cas hyperbolique, les translations ne forment pas un groupe. Elles ont trois degrés de liberté (dont deux pour la position de la droite).

Théorème 4 : (*structure du groupe des translations le long d'une droite fixée*)

- a) Les translations le long d'une droite Δ de \mathfrak{B} sont induites par les homographies directes de \mathfrak{B}_∞ qui fixent u et v (points à l'infini de Δ). Elles forment un groupe qui opère simplement transitivement sur les points de Δ , et qui est isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^{>0}, \times)$.
- b) Les déplacements qui fixent une droite orientée sont les translations le long de la droite et les antidéplacements sont les symétries glissées par rapport à la droite. Le groupe de ces placements est isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times) .

preuve > (a) La première affirmation est évidente. La seconde résulte du deuxième théorème fondamental. La troisième découle de la première par le fait qu'une homographie de \mathfrak{B}_∞ qui fixe u et v est du type

$$h_\lambda : m \mapsto m' \text{ où } [u, v, m, m'] = \lambda$$

En outre, l'homographie est directe si et seulement si λ est > 0 , et on a $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.

(b) Laissez à la lectrice. \square

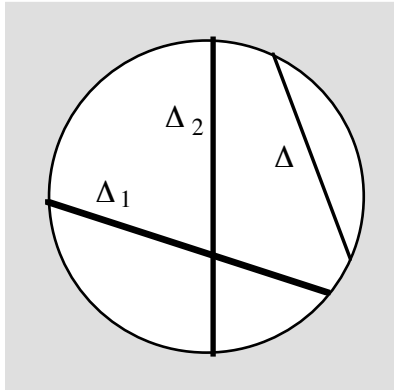
Exercice 9 : Démontrer qu'une translation vraie possède une seule droite fixe, et aucun point fixe, par exemple en raisonnant sur les points à l'infini. En déduire que deux translations le long de deux droites distinctes, non réduites à l'identité, sont distinctes.

Exercice 10 :

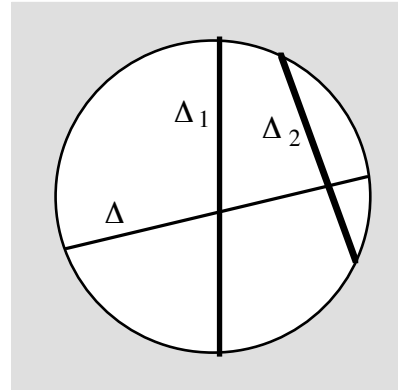
- a) Le produit de deux symétries par rapport à deux points distincts A et B est le carré de la translation le long de (AB) qui envoie A en B . Réciproquement, toute translation le long d'une droite Δ est produit de deux symétries par rapport à des points sur la droite, le premier (ou le second) pouvant être choisi arbitrairement.
- b) Le produit de deux symétries par rapport à deux droites divergentes Δ et Δ' est une translation le long de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Réciproque comme en a).

Exercice 11 :

- Démontrer que tout déplacement est le produit d'une translation et d'une rotation de centre fixé. Autres décompositions du même genre ?
- Démontrer que toute rotation peut s'écrire comme produit de deux translations, et que toute translation peut s'écrire comme produit de deux rotations. On décomposera la transformation en produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites Δ_1 et Δ_2 et on intercalera le carré d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ (figures ci-dessous).



rotation comme produit de translations

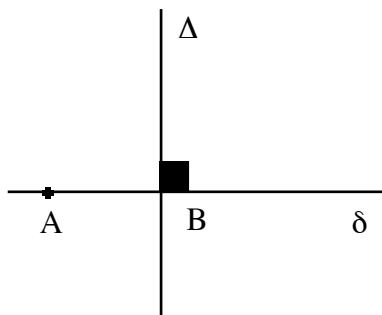


translation comme produit de rotations

Remarque Nous pouvons récapituler comme suit les déplacements et antidéplacements qui fixent une droite Δ d'un plan hyperbolique \mathfrak{B} .

- Les déplacements de \mathfrak{B} qui fixent Δ sont les translations le long de Δ et les symétries par rapport aux points de Δ
- Les antidéplacements de \mathfrak{B} qui fixent Δ sont les symétries glissées d'axe Δ et les symétries par rapport aux droites orthogonales à Δ

Classification des antidéplacements



D'après le théorème 1, tout antidéplacement ψ est produit d'une symétrie-point σ_A d'une symétrie orthogonale σ_Δ . Soit δ la perpendiculaire à Δ passant par A, et B l'intersection de Δ et δ . On a alors :

$$\psi = \sigma_\Delta \circ \sigma_A = \sigma_\delta \circ \sigma_B \circ \sigma_\Delta = \sigma_\delta \circ \tau$$

où τ est le carré de la translation le long de δ qui envoie A en B.

En résumé, si le point A est sur la droite Δ , on retrouve une symétrie orthogonale, sinon, c'est une symétrie glissée.

Nous laissons au lecteur la preuve des détails manquants dans le théorème suivant.

Théorème 5 : (*forme géométrique des antidéplacements*) Un antidéplacement ψ du plan hyperbolique est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. L'axe de la symétrie est l'ensemble des milieux des segments $[M\psi(M)]$.

L'écriture d'un antidéplacement comme produit commutatif d'une symétrie orthogonale et d'une translation est unique.

Le groupe des placements qui fixent un point à l'infini

Déplacements parallèles

Soit u un point à l'infini de \mathfrak{B} . Les placements qui fixent u sont les extensions à \mathfrak{B} des homographies de \mathfrak{B}_∞ qui fixent u . Si on considère $\mathfrak{B}_\infty - \{u\}$ comme une droite affine D_u , on trouve que le groupe des placements qui fixent u est canoniquement isomorphe au groupe affine de D_u . On sait par ailleurs qu'une transformation affine de D_u est une homothétie ou une translation.

Parmi ces transformations, les symétries sont les symétries-point de D_u . Si v est le centre d'une telle symétrie-point, celle-ci n'est autre que la (restriction à D_u de la) symétrie $\sigma_{\{u,v\}}$ de \mathfrak{B}_∞ qui a pour extension à \mathfrak{B} la symétrie par rapport à la droite (uv) .

Les transformations affines directes de D_u correspondent à des homographies directes de \mathfrak{B}_∞ et donc à des déplacements de \mathfrak{B} .

Considérons tout d'abord le cas des homothéties directes de D_u . Elles admettent un second point fixe sur \mathfrak{B}_∞ (le centre de l'homothétie). Nous avons déjà étudié les déplacements de \mathfrak{B} induits par les homographies directes à deux points fixes de \mathfrak{B}_∞ . Ce sont des translations de \mathfrak{B} , le long de la droite joignant les deux points à l'infini fixes.

Le cas des déplacements induits par les translations de D_u n'a pas encore été examiné. Comme une translation de D_u est le produit de deux symétries-point de D_u , le déplacement correspondant est le produit de deux symétries par rapport à des droites passant par u .

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 7 : Soit u un point à l'infini de \mathfrak{B} . Le produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites passant par u est appelé un **déplacement parallèle de centre u** , ou une **rotation autour du point à l'infini u** .

Lorsque le déplacement parallèle est distinct de l'identité, on parle de déplacement parallèle vrai.

Proposition 8 : (*déplacements parallèles*) Un déplacement parallèle vrai ne fixe aucun point de \mathfrak{B} et aucune droite. Il fixe exactement un point à l'infini. Ce n'est ni une rotation, ni une translation.

preuve> Les résultats sont clairs d'après l'étude précédente des déplacements qui fixent un point ou une droite. Notez que rotations vraies, translations vraies et déplacements parallèles vrais se distinguent par le nombre de points à l'infini qu'ils fixent. \square

Exercice 12 : Considérez deux points A et B fixés, et un point variable M sur la médiatrice de $[AB]$. En un sens que vous préciserez, montrez que lorsqu'on fait tendre M vers un point à l'infini u , la rotation de centre M qui envoie A en B «tend vers» le

déplacement parallèle de centre u qui envoie A en B . Vous pourrez décomposer la rotation en un produit de deux symétries orthogonales convenablement choisies.

Théorème 6 : (*placements conservant un point à l'infini fixé*)

- a) Les déplacements fixant un point à l'infini u sont exclusivement :
 - l'identité,
 - les translations le long de droites passant par u ,
 - les déplacements parallèles de centre u .
- b) Les antidéplacements fixant un point à l'infini u sont exclusivement :
 - les symétries orthogonales par rapport aux droites passant par u ,
 - les symétries glissées dont l'axe passe par u .
- c) Le groupe des déplacements qui fixent u est naturellement isomorphe au groupe affine direct de la droite affine $\mathfrak{B}_\infty - \{u\}$. Il opère simplement transitivement sur \mathfrak{B} .

preuve> Le (a) et la première affirmation du (c) ont déjà été montrés en introduction. Le (b) se montre par la même méthode. Reste la dernière affirmation du (c). L'opération du groupe sur \mathfrak{B} est simple parce qu'aucun élément du groupe, hormis l'identité, ne fixe un point de \mathfrak{B} . Elle est transitive : pour envoyer A en B , envoyer d'abord la droite (Au) sur la droite (Bu) par un déplacement parallèle (composer la symétrie par rapport à la médiatrice de (Au) et (Bu) avec la symétrie par rapport à (Bu)) puis A' (image de A par le déplacement parallèle) sur B par translation le long de (Bu) . \square

Nous donnons maintenant une brève étude du sous-groupe engendré par les symétries orthogonales qui fixent un point à l'infini fixé u .

Théorème 7 : (*déplacements parallèles de centre fixé*)

- a) Les déplacements parallèles de centre u forment un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$ (ne pas oublier l'identité, comme d'habitude).
- b) Les symétries par rapport aux droites passant par le point à l'infini u et les déplacements parallèles de centre u forment un groupe canoniquement isomorphe au groupe des isométries de $\mathfrak{B}_\infty - \{u\}$, considérée comme droite euclidienne sans unité de longueur.
- c) Le produit de trois symétries par rapport à des droites passant par un point à l'infini u fixé est une symétrie orthogonale de même nature.

preuve> La droite affine $D_u = \mathfrak{B}_\infty - \{u\}$ peut également être considérée comme une droite euclidienne sans unité de longueur. L'isomorphisme entre le groupe affine de D_u et le groupe des déplacements qui fixent u est clair. Il se restreint en un isomorphisme entre le groupe des isométries de D_u (engendré par les symétries-point) et le groupe des déplacements engendré par les symétries par rapport aux droites passant par u , etc. ... (détails laissés à la lectrice). \square

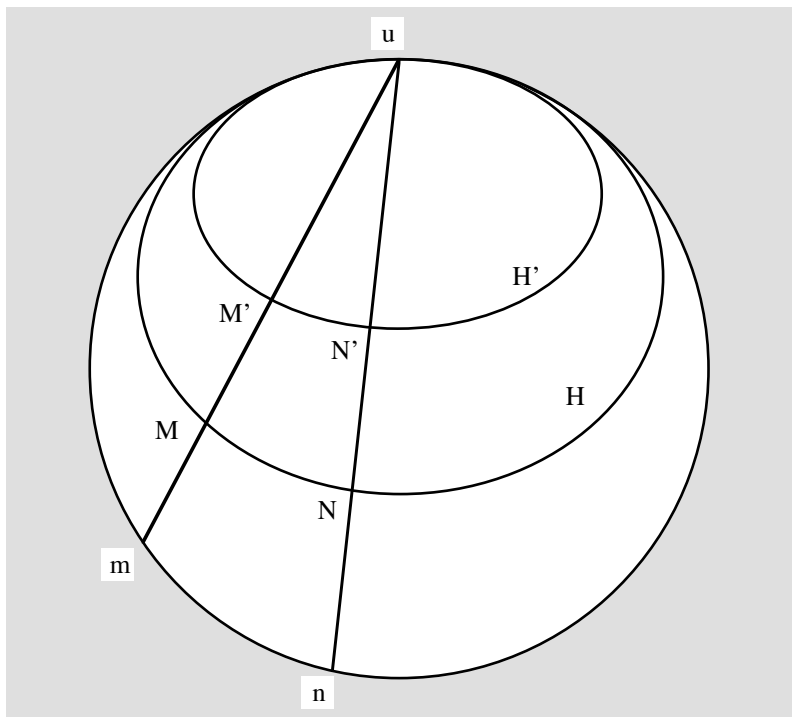
Exercice 13 : Montrer que l'isomorphisme donné dans la preuve du (a) du théorème est défini modulo un isomorphisme $x \mapsto \lambda x$ de $(\mathbf{R}, +)$.

Proposition 9 : Deux déplacements parallèles vrais sont conjugués dans le groupe des placements. Dans le groupe des déplacements, il y a deux classes de conjugaison pour les déplacements parallèles vrais.

Exercice 14 : Démontrer la proposition précédente. Pour le deuxième cas, orientez circulairement la droite à l'infini \mathfrak{B}_∞ et distinguez les déplacements parallèles qui induisent une transformation croissante de $\mathfrak{B}_\infty - \{u\}$ de ceux qui induisent une transformation décroissante.

Horocycles

Définition 8 : Soit M un point de \mathfrak{B} et u un point de \mathfrak{B}_∞ . L'ensemble des symétriques de M par rapport aux droites passant par u est appelé un **horocycle de centre u** .



D'après le théorème 7, l'horocycle de centre u passant par M est également l'orbite de M sous l'action du groupe des déplacements parallèles de centre u , et cette action est simplement transitive. Les horocycles de centre u forment donc une partition de \mathfrak{B} .

Du point de vue de \mathcal{P} , un horocycle de centre u est une ellipse qui a un contact d'ordre 4 avec \mathfrak{B}_∞ (nous le démontrons plus loin).

rons plus loin).

Proposition 10 : (*horocycles et déplacements*)

- Deux horocycles sont des figures directement égales (on passe de l'une à l'autre par un déplacement).
- Tout horocycle H de centre u est en bijection canonique avec la droite affine $\mathfrak{B}_\infty - \{u\}$. (au point à l'infini m on fait correspondre l'intersection M de (um) avec l'horocycle). Il est donc muni d'une structure naturelle de droite affine sur \mathbf{R} .

- c) Les «translations» de l'horocycle H sont alors les déplacements parallèles de centre u restreints à H .
- d) Les placements de \mathfrak{B} qui conservent H sont les déplacements parallèles de centre u et les symétries σ_Δ par rapport aux droites Δ ayant u pour un de leurs points à l'infini.

Exercice 15 :

- a) Démontrer la proposition 10. Sur la figure précédente, on montrera que la translation de M à M' le long de $(um) = (MM')$ transforme H en H' .
- b) Montrer que si on compose la translation de M à M' le long de (MM') et la translation de N' à N le long de (NN') on obtient un déplacement parallèle vrai.

Réflexion D'après le point (b) de la proposition 10 un horocycle est muni d'une structure naturelle de droite affine sur \mathbf{R} . Il peut donc aussi être considéré comme une droite euclidienne sans unité de longueur. Un placement qui conserve un horocycle laisse inchangée cette structure euclidienne sur cet horocycle. Il est donc possible de définir une structure de droite euclidienne commune à tous les horocycles d'un plan hyperbolique. La bijection $M \mapsto M'$ de l'horocycle H sur l'horocycle H' dans la figure précédente ne provient pas d'un placement de \mathfrak{B} , ce n'est pas une isométrie entre droites euclidiennes, mais seulement une bijection affine.

Exercice 16 :

- a) Montrer que par deux points A et B il passe exactement deux horocycles, et que les symétries de la figure formée par ces deux horocycles sont les mêmes que celles de la figure $\{A,B\}$.
- b) De manière générale, étudiez quelle peut être la position respective de deux horocycles de centres distincts, et quel est le groupe des placements qui fixent la figure qu'ils forment.

Classification des déplacements

D'après le théorème 1, tout déplacement distinct de l'identité est produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites distinctes.

Selon que les deux droites sont sécantes, strictement parallèles ou divergentes, on obtient donc une rotation (autour du point commun aux deux droites), un déplacement parallèle (rotation autour du point à l'infini commun aux deux droites) ou une translation le long d'une droite (la perpendiculaire commune aux deux droites).

Ces trois types de déplacements sont parfois qualifiés d'**elliptique**, **parabolique** et **hyperbolique**. On a donc établi le théorème suivant.

Théorème 8 : Un déplacement distinct de l'identité est une rotation, un déplacement parallèle ou une translation.

Proposition 11 : Tout déplacement peut être écrit comme produit d'une ou deux rotations, d'une ou deux translations, d'un ou deux déplacements parallèles, et d'au plus quatre symétries-point.

Exercice 17 : Démontrez la proposition précédente en raisonnant comme à l'exercice 11 (remarquez aussi qu'une translation est produit de deux symétries-point). Constatez les contrastes et les ressemblances avec le cas du plan sphérique et celui du plan euclidien.

Tableau récapitulatif des placements et de leurs invariants

Résumons dans un tableau la manière dont se différencient les différents déplacements et antidéplacements en termes d'éléments fixes.

	type du placement	homographie de \mathfrak{B}_∞	éléments fixes			
			points	droites	axes	pts à l' ∞
DI REC TS	identité	identité	tous	toutes	tous	tous
	demi-tour (symétrie-point)	$\Pi_{A,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$	le centre A	toutes celles passant par A	aucun	aucun
	rotation \neq demi-tour	homographie sans point double	le centre A	aucune	aucun	aucun
	translation le long de $\Delta = (uv)$	homographie directe à deux pts doubles	aucun	la droite Δ	les deux axes Δ	u et v
	déplacement parallèle de centre u	homographie à un seul point fixe u	aucun	aucune	aucun	u
IN DI	symétrie orthogonale d'axe $\Delta = (uv)$	$\sigma_{\{u,v\}}$	ceux de Δ	Δ et les droites orthogonales	les deux axes Δ	u et v
REC TS	symétrie glissée d'axe Δ	homographie indirecte à deux pts doubles	aucun	la droite Δ	les deux axes Δ	u et v

Questions d'angles

Nous reprenons ici la remarque qui suit le théorème 2 concernant le groupe des rotations autour d'un point.

Groupe des angles

Notons \mathbf{Rot}_J le groupe des rotations de centre J . A l'intérieur du groupe des déplacements de \mathfrak{B} , la conjugaison $\rho \mapsto \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$ induit un isomorphisme de \mathbf{Rot}_J vers \mathbf{Rot}_K avec $K = \varphi(J)$. Cet isomorphisme ne dépend pas du choix de φ (parce que le groupe des rotations de centre fixé est commutatif). Il existe donc un groupe «abstrait» de tous les \mathbf{Rot}_J , attaché uniquement au plan \mathfrak{B} . Nous noterons ce groupe $\mathbf{Rot}_{\mathfrak{B}}$. C'est par définition le **groupe des angles (de rotation) dans le plan \mathfrak{B}** . Deux rotations ont même angle si et seulement si elles sont conjuguées dans le groupe des déplacements. Deux angles θ_1 et θ_2 s'ajoutent en composant deux rotations *de même centre* et d'angles θ_1 et θ_2 . On définit alors l'angle (d'un couple) de deux demi-droites de même sommet, ou de deux droites orientées sécantes, comme un élément de $\mathbf{Rot}_{\mathfrak{B}}$. Ce groupe est isomorphe au groupe des

angles d'un plan \mathbf{R} -euclidien, ou encore à $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ par un isomorphisme naturel défini «à l'orientation près», c.-à-d. à l'isomorphisme $S \mapsto S^{-1}$ près.

En ce qui concerne l'angle d'un couple de deux droites sécantes, il est défini modulo un demi-tour, ou, en langage plus savant, c'est un élément du quotient de $\mathbf{Rot}_{\mathfrak{g}}$ par le sous groupe d'ordre 2 engendré par le demi-tour.

Attention ! lorsqu'on compose de rotations qui n'ont pas même centre, les angles ne s'additionnent pas (on n'est même pas sûr d'obtenir une rotation, à vrai dire, et par ailleurs toute rotation est produit de quatre demi-tours).

Exercice 18 : Si φ est un antidéplacement, ρ et $\varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$ sont des rotations d'angles opposés.

Orientation d'un plan hyperbolique et mesure des angles de rotations

On dit qu'on a orienté un plan hyperbolique lorsqu'on a orienté (circulairement) sa droite à l'infini. Il revient au même de choisir l'un des deux isomorphismes naturel de $\mathbf{Rot}_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$. On peut aussi dire qu'il faut choisir, pour chaque point J , un des deux isomorphismes naturels du groupe \mathbf{Rot}_J des rotations de centre J sur le groupe $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$, ceci de manière cohérente avec la conjugaison au sein du groupe des déplacements.

On peut aussi orienter un plan hyperbolique en orientant de manière cohérente tous les horocycles du plan (qui ont une structure naturelle de droite \mathbf{R} -affine, invariante par les déplacements). Cela revient aussi à spécifier, parmi les déplacements parallèles, ceux que l'on considère comme croissants (ceux qui respectent l'orientation de la droite à l'infini), qui constituent l'une des deux classes de conjugaison de déplacements parallèles vrais dans le groupe des déplacements.

Lorsque le corps de base est \mathbb{R} , avoir orienté le plan hyperbolique permet de définir sans ambiguïté une **mesure pour l'angle d'une rotation**, sous forme d'un réel défini modulo 2π (en supposant pour unité d'angle le radian), ceci grâce à l'isomorphisme classique :

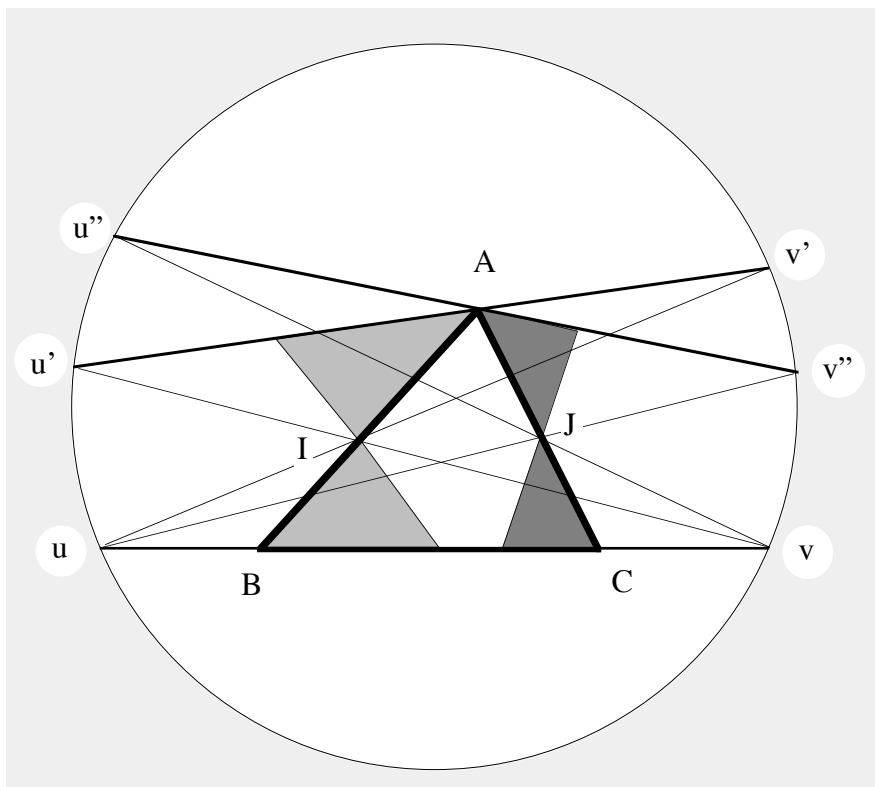
$$\mathbf{SO}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Somme des angles d'un triangle

La question de la *somme des angles d'un triangle hyperbolique* ABC ne peut pas être posée correctement en considérant seulement une somme d'angles dans le groupe des angles du plan, car ce groupe est muni d'une relation d'ordre circulaire et non d'une relation d'ordre ordinaire. Le plus simple est en fait «d'additionner» les secteurs angulaires des trois sommets et de regarder ce qu'on obtient.

Plus précisément, notons A_1 le secteur angulaire défini par le triangle en son sommet A , et B_2 et C_2 les secteurs angulaires opposés aux secteurs B_1 et C_1 (définis de manière analogue à A_1). Translatons B_2 le long de (AB) de manière que B vienne en A , et faisons de même avec C_2 . Les trois secteurs de sommet A ainsi obtenus se joignent en un seul secteur. Avec cette compréhension des choses, nous pouvons maintenant énoncer le théorème fameux.

Théorème 9 : La somme des angles d'un triangle est strictement contenue dans un secteur angulaire demi-plan. (en langage plus fleuri : elle est strictement plus petite que deux droits)



preuve> Soient I et J les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Les secteurs angulaires transportés en A et provenant de B_1 et C_1 peuvent être obtenus directement sous forme $\sigma_I(B_1)$ et $\sigma_J(C_1)$. D'où la figure. Si on fait confiance à la figure, la propriété à démontrer est alors évidente puisque le secteur angulaire $u'Av''$ est

strictement plus petit que le secteur plat $u'Av'$ situé du côté de C . Le problème qui se pose est de savoir si la figure est «générale» ou si elle correspond à une seule classe de cas (donnant le même type de figures) parmi plusieurs.

Dans le cas général, la figure peut être entièrement reconstruite à partir de trois droites : la droite $(BC) = (uv)$ et des symétriques $(u'v')$ et $(u''v'')$ de cette droite par rapport aux points I et J . Comme I et J doivent être du même côté de la droite (BC) , les droites $(u'v')$ et $(u''v'')$ sont soumises aux deux conditions suivantes : être d'un même côté de la droite (uv) et être sécantes (en un point A). Le point I est alors le milieu des droites (uv) et $(u'v')$, le point J le milieu des droites (uv) et $(u''v'')$, B le symétrique de A par rapport à I et C le symétrique de A par rapport à J . A l'échange près des noms de B et C , nous pouvons supposer que les points à l'infini u, u', u'', v', v'', v sont dans cet ordre circulaire. Les secteurs angulaires en A sont alors conformes à la figure, et il manque le secteur $v'Av''$ pour faire un demi plan. Notre figure est donc générale et le théorème est démontré. On peut même faire un calcul sans figure qui reproduit, sans le dire et sans le montrer, ce qu'on voit sur la figure. \square

Théorème 10 : (cas du corps des nombres réels \mathbb{R}) L'aire d'un triangle est proportionnelle à l'écart entre la somme de ses angles (mesurés en radians) et π .

preuve> Ce théorème peut sembler prématuré dans la mesure où aucune notion d'aire n'a encore été définie (cela semble difficile avant d'avoir défini la métrique). Cependant toute notion d'aire convenable, lorsqu'on la restreint aux aires des polygones, doit vérifier les deux propriétés essentielles suivantes : invariance par déplacement et additivité (lorsqu'on recolle des polygones le long d'arêtes communes et que leurs intersections deux à deux sont vides, ou réunions d'arêtes communes). Nous renvoyons donc à la discussion donnée au chapitre 8, section (a) dans le paragraphe «l'angle de parallélisme et la formule liant l'aire et les angles d'un triangle».



Notre preuve du théorème 10 manque certainement de rigueur. En géométrie sphérique au contraire, nous avons pu faire un calcul élémentaire rigoureux, basé sur des arguments du type géométrie des puzzles, qui liait de manière exacte l'aire d'un triangle à l'excès de la somme des angles par rapport à π . Nous ne connaissons pas de preuve du même style pour la géométrie hyperbolique. Il semble qu'il soit nécessaire de développer un peu de théorie de l'intégration pour montrer qu'une fonction définie sur l'ensemble des triangles et qui vérifie les deux propriétés «invariance par déplacement et additivité» est bien définie à une constante multiplicative près (donc nécessairement proportionnelle à l'aire, pour toute définition raisonnable). Il s'agit pourtant qu'une propriété qui s'énonce sans aucun recours à des intégrales. Cela est à rapprocher de la théorie des volumes des polyèdres en géométrie euclidienne dans l'espace : il n'est pas en général possible de constater de manière exacte l'égalité des volumes de deux polyèdres par de purs arguments de découpage (puzzles en dimension 3), contrairement au cas de la géométrie plane.

b) Structure projective du plan hyperbolique

Nous développons dans cette section quelques propriétés projectives du plan hyperbolique, c.-à-d. des propriétés centrées sur des questions de birapports, de faisceaux de droites, de droites projectives, de coniques. Nous savons déjà que les points à l'infini du plan hyperbolique forment un ensemble muni d'une structure naturelle de droite projective réelle.

Nous sommes en premier lieu intéressés par le fait de savoir si un faisceau de droites concourantes dans le plan hyperbolique a bien une structure de droite projective réelle, c.-à-d. si les birapports sont définis sans ambiguïté, de manière naturelle. Et si, de ce point de vue, un faisceau de droites concourantes ne fait aucune différence entre plan hyperbolique et plan euclidien. Nous étudions ensuite la structure projective des droites du plan hyperbolique. Nous faisons enfin le tout début d'une étude sur les coniques, définies comme intersections de faisceaux de droites en homographie.

Birapport de quatre points alignés ou de quatre droites concourantes dans un plan hyperbolique

Nous commençons par étudier la question sur le modèle de Beltrami. Nous étendons ensuite les résultats à un plan hyperbolique arbitraire.

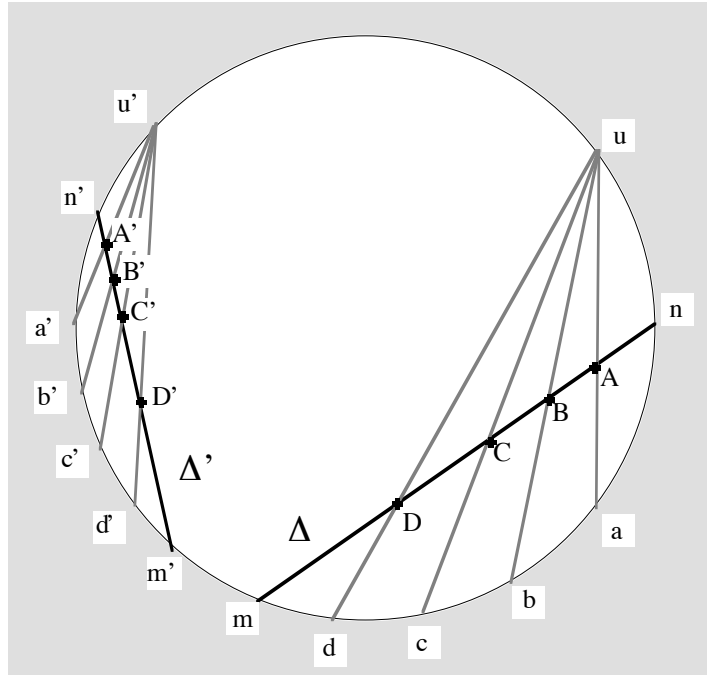
Proposition 1 : Soit φ un placement du modèle de Beltrami \mathfrak{B} .

a) Soient Δ une droite de \mathfrak{B} , A, B, C, D quatre points de Δ et soient Δ', A', B', C', D' leurs images par φ . Alors les birapports $[A, B, C, D]$ et $[A', B', C', D']$ (birapports qui ont un sens dans \mathcal{P}) sont égaux.

b) Soient S un point de \mathfrak{B} ,

$\alpha, \beta, \chi, \delta$ quatre droites passant par S et soient $S', \alpha', \beta', \chi', \delta'$ leurs images par φ . Alors les birapports $[\alpha, \beta, \chi, \delta]$ et $[\alpha', \beta', \chi', \delta']$ (birapports qui ont un sens dans \mathcal{P}) sont égaux.

c) Soient Δ une droite orientée de \mathfrak{B} , m et n ses deux points à l'infini (dans l'ordre), A, B, C trois points de Δ et soient $\Delta', m', n', A', B', C'$ leurs images par φ . Alors les birapports (qui ont un sens dans \mathcal{P}) $[m, n, A, B]$ et $[m', n', A', B']$ (resp. $[m, A, B, C]$ et $[m', A', B', C']$) sont égaux.



preuve > (a) Soit u un point de \mathfrak{B}_∞ ne soit pas un point à l'infini de Δ , et a, b, c, d les deuxièmes points à l'infini des droites $(uA), (uB), (uC), (uD)$. Alors, par les propriétés connues des birapports :

$$[A, B, C, D] = [(uA), (uB), (uC), (uD)] = [a, b, c, d] \quad (*)$$

Notons ψ l'homographie de \mathfrak{B}_∞ induite par φ . Soient u', a', b', c', d' les images de u, a, b, c, d par ψ . Puisque ψ est une homographie, les birapports $[a, b, c, d]$ et $[a', b', c', d']$ sont égaux. Et, par ailleurs, l'égalité $(*)$ reste vraie avec un $'$ sur chacune des lettres.

Le (b) résulte du (a) en coupant les quatre droites $\alpha, \beta, \chi, \delta$ par une droite Δ et en considérant les intersections A, B, C, D puisque dans \mathcal{P} : $[A, B, C, D] = [\alpha, \beta, \chi, \delta]$.

Le (c) se montre comme le (a). \square

Un corollaire de la proposition 1 est le théorème suivant.

Théorème 1 (birapports de points alignés ou de droites concourantes dans un plan hyperbolique)

a) Dans tout plan hyperbolique \mathfrak{D} , on peut définir sans ambiguïté le birapport de quatre points alignés, de quatre droites concourantes, ou les birapports $[m, n, A, B]$ et $[m, A, B, C]$ lorsque m et n sont les deux points à l'infini d'une droite passant par A, B et C .

- b) La proposition 1 est alors valable en supprimant l'hypothèse que \mathfrak{B} est le modèle de Beltrami (et en supprimant les parenthèses qui font référence à \mathfrak{P}).
- c) Si quatre droites concourantes coupent une droite Δ ou bien si deux d'entre elles coupent Δ et les deux autres sont strictement parallèles à Δ (une de chaque côté), alors le birapport des quatre droites et celui des quatre points d'intersection (dont deux éventuellement à l'infini) sont égaux.
- d) Le birapport de quatre droites concourantes est relié aux angles qu'elles forment de la même façon que pour quatre droites concourantes du plan euclidien.

preuve> Les points (a) et (b) résultent facilement de la proposition 1. La propriété (c) est transférable de \mathfrak{P} (où elle est évidente) à \mathfrak{B} et donc à tout plan hyperbolique.

Le point (d) a la signification précise suivante. Considérons un point S de \mathfrak{D} et le faisceau $\langle S \rangle$ des droites passant par S . Si on oriente le plan, on a une opération naturelle simplement transitive du groupe $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ sur les droites du faisceau $\langle S \rangle$. Si on choisit une origine Δ_0 dans $\langle S \rangle$ chaque élément Δ de $\langle S \rangle$ est repéré par l'angle (Δ_0, Δ) , qui est lui-même «mesuré» par l'élément de $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ qui envoie Δ_0 sur Δ , bien défini à un demi-tour près. Si la matrice correspondante est

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

la droite Δ est repérée par «la tangente de l'angle (Δ_0, Δ) », $t = s/c$ qui est un élément bien défini de $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Alors, en géométrie hyperbolique comme en géométrie euclidienne, pour quatre droites concourantes Δ_i repérées par les paramètres t_i on a l'égalité des birapports

$$[\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4] = [t_1, t_2, t_3, t_4].$$

Ce point est plus difficile à énoncer de manière précise qu'à démontrer. En géométrie euclidienne c'est à peu près immédiat, et en géométrie hyperbolique, on se ramène au cas euclidien en se situant dans le modèle de Beltrami et en emmenant par un déplacement le point S au centre de \mathfrak{B}_∞ dans \mathfrak{P} . \square

Les points (a) de la proposition 1 et du théorème 1 ont pour corollaire.

Proposition 2 : (*structure de droite hyperbolique sur une droite d'un plan hyperbolique*) Les birapports, définis pour 4 points arbitraires d'une droite Δ dans un plan hyperbolique, donnent à cette droite une structure de droite \mathbf{R} -hyperbolique (au sens de la définition 3 dans la section (b) du chapitre 8.)

De même on a un corollaire concernant la structure projective d'un faisceau de droites concourantes.

Proposition 3 : (*structure de cercle euclidien sur un faisceau de droites concourantes d'un plan hyperbolique*) Les birapports, définis pour 4 éléments arbitraires d'un faisceau $\langle S \rangle$ de droites concourantes dans un plan \mathbf{R} -hyperbolique, donnent à

ce faisceau une structure de droite \mathbf{R} -projective. En outre l'orthogonalité définit une involution sans point fixe de cette droite projective et lui donne donc la structure d'un cercle \mathbf{R} -euclidien. Cette structure est invariante par les déplacements.

preuve> Le résultat est transféré de la géométrie euclidienne à la géométrie hyperbolique en considérant le modèle de Beltrami \mathfrak{B} et en prenant S au centre euclidien de \mathfrak{B}_∞ . \square

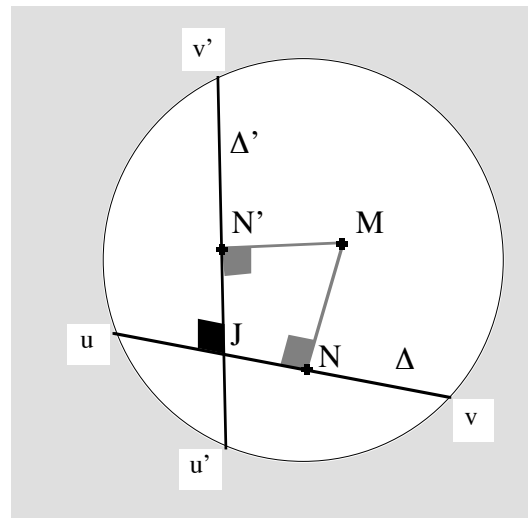
On prendra garde cependant à ne pas tomber dans le piège suivant (qui est identique en géométrie hyperbolique et géométrie euclidienne) : l'action naturelle de $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$ sur le faisceau $\langle S \rangle$ (une fois qu'on a orienté $\langle S \rangle$) n'est pas simplement transitive, et n'est pas l'action qui correspond à la structure de cercle \mathbf{R} -euclidien orienté de $\langle S \rangle$ (théorème 2 dans la section (b) du chapitre 8). Pour obtenir l'action simplement transitive voulue il faut faire agir la rotation ρ sur la droite Δ par $\rho \bullet \Delta = \rho^{1/2}(\Delta)$. C'est l'éternelle histoire du théorème des angles inscrits : un angle de droites est la moitié d'un angle de rotations.

Placements et birapports

Nous montrons maintenant que les placements peuvent être définis comme les transformations qui opèrent sur les droites et conservent l'orthogonalité et les birapports.

Proposition 4 : Soient \mathfrak{D} et \mathfrak{D}_1 deux plans hyperboliques

- Si une transformation de \mathfrak{D} transforme toute droite en une autre droite, et conserve l'orthogonalité et les birapports de droites concourantes, c'est un placement de \mathfrak{D}
- Si une bijection de \mathfrak{D} vers \mathfrak{D}_1 transforme toute droite de \mathfrak{D} en une droite de \mathfrak{D}_1 , et conserve l'orthogonalité et les birapports de droites concourantes, c'est une bijection hyperbolique.



preuve> Montrons par exemple le (b). La bijection conserve aussi les birapports de points alignés (les deux premiers éventuellement à l'infini). Il suffit de montrer qu'il y a au plus une telle bijection qui envoie un drapeau D de \mathfrak{D} sur un drapeau D_1 de \mathfrak{D}_1 .

À un drapeau de \mathfrak{D} est associé un système de repérage des points de \mathfrak{D} , analogue aux coordonnées cartésiennes dans le plan euclidien, que nous explicitons maintenant. Soient Δ l'axe du drapeau, J le point donné sur Δ , Δ' la droite orthogonale à Δ en J orientée de manière qu'elle se termine dans le demi-plan du drapeau. Soient u, v, u', v' les points à l'infini de Δ et Δ' . Un point M arbitraire de \mathfrak{D} se projette en N sur Δ et N' sur Δ' .

La donnée des deux birapports $[u,v,J,N]$ et $[u',v',J,N']$ (qui ne peuvent d'ailleurs pas être deux réels positifs arbitraires !) caractérise les points N et N' et donc le point M . Ceci montre que l'image de M par la bijection est la même que celle de M par la bijection hyperbolique qui transforme le drapeau D de \mathfrak{D} en le drapeau D_1 de \mathfrak{D}_1 . \square

Notons que la proposition 4 sera surpassée par la proposition 3 de la section (c) et le théorème 1 de la section (d).

Thème de réflexion : L'analogue de la proposition 4 est-elle valable dans le cas d'un plan \mathbf{R} -euclidien et dans celui d'un plan sphérique ?

La proposition 4 montre que la définition ci-dessous est équivalente à la définition 3 donnée à la section (a).

Définition 1 : (*structure de plan hyperbolique, deuxième version*)

Un plan hyperbolique \mathfrak{D} est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure :

- l'ensemble des points \mathfrak{D} ,
- un ensemble \mathfrak{D}^\bullet dont les éléments sont appelés les droites de \mathfrak{D} ,
- une relation d'incidence entre points et droites de \mathfrak{D} (relation qu'on lit : le point est sur la droite, ou encore, la droite passe par le point)
- une relation d'orthogonalité entre les droites de \mathfrak{D} ,
- les birapports de droites concourantes : il s'agit d'une application qui associe un scalaire (un élément de \mathbf{R}) à un système de quatre droites concourantes).

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier l'axiome suivant :

Il y a au moins un isomorphisme entre la structure $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\bullet, \text{incidence, orthogonalité, birapports})$ et la structure analogue d'un plan de Beltrami \mathfrak{B} .

NB : Dans cette définition, une droite de \mathfrak{D} n'est pas nécessairement l'ensemble des points situés sur la droite. Cela rétablit une certaine symétrie entre points et droites. En fait, il n'y a pas plus de raison de définir une droite comme étant l'ensemble des points sur la droite, que de définir un point comme étant l'ensemble des droites qui passent par le point. Seule l'invasion incontrôlée des mathématiques par le langage de la théorie des ensembles a donné une plausibilité à la définition, usuelle aujourd'hui, d'une droite comme ensemble de points.

Notons que si le corps \mathbf{R} possède un automorphisme croissant θ distinct de l'identité, on peut construire une bijection de \mathfrak{P} (du type : point de coordonnées $(x,y) \mapsto$ point de coordonnées $(\theta x, \theta y)$) qui conserve les droites et segments de \mathfrak{P} et le disque \mathfrak{B} . Du point de vue de \mathfrak{B} une telle bijection conserve l'alignement, les segments, l'orthogonalité et l'«équidistance», mais pas les birapports, qui sont transformés par $x \mapsto \theta x$, et n'est donc pas un placement.

Les droites du plan hyperbolique comme droites hyperboliques

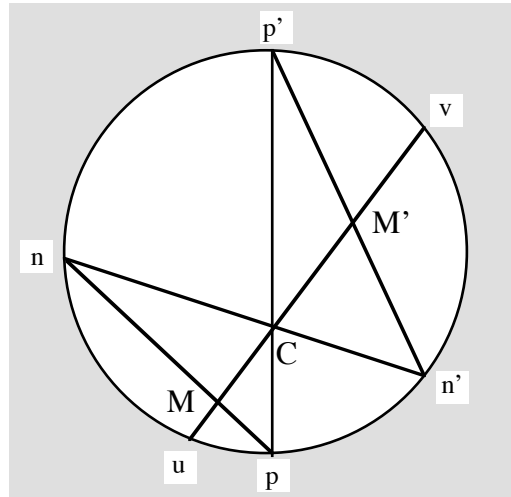
Nous avons vu à la proposition 2 qu'une droite d'un plan hyperbolique est munie d'une structure naturelle de droite hyperbolique. Nous analysons maintenant en termes de birapports une transformation d'une droite d'un plan hyperbolique induite par un déplacement du plan hyperbolique qui la conserve. Deux cas se présentent, les symétries-point et les translations.

Proposition 5 : (*symétrie-point et birapports*) Soit C un point sur une droite Δ d'un plan hyperbolique, ayant pour points à l'infini u et v . La symétrie σ par rapport au point C , vue comme transformation de Δ est caractérisée par :
 $[u,v,C,\sigma(M)] = [u,v,C,M]^{-1}$.
 Ainsi la symétrie par rapport à C du plan hyperbolique induit sur la droite fixe Δ la «symétrie par rapport à C » au sens de sa structure naturelle de droite hyperbolique.

preuve> On se situe dans un modèle de Beltrami. Soit (np) une droite passant par M , $(n'p')$ son image par σ_C et M' l'image de M . On a alors dans \mathcal{P} :

$$[u,v,C,M] = [(nu),(nv),(nC),(nM)] = [u,v,n',p] = [(p'u),(p'v),(p'n'),(p'p)] = [u,v,M',C] \quad \square$$

Notez que si on se place dans le modèle de Beltrami et si on note Δ^\sim la droite projective obtenue en rajoutant un point à l'infini à la droite qui prolonge Δ dans \mathcal{P} , la symétrie σ_C coïncide donc avec la restriction à Δ de l'involution de Δ^\sim qui fixe C et qui échange les points u et v .



Passons au cas des translations. La proposition suivante signifie que les translations d'une droite du plan hyperbolique sont exactement les translations pour sa structure naturelle de droite hyperbolique. Néanmoins, nous avons droit à une petite surprise concernant les birapports des translations.

Proposition 6 : (*translations et birapports*)

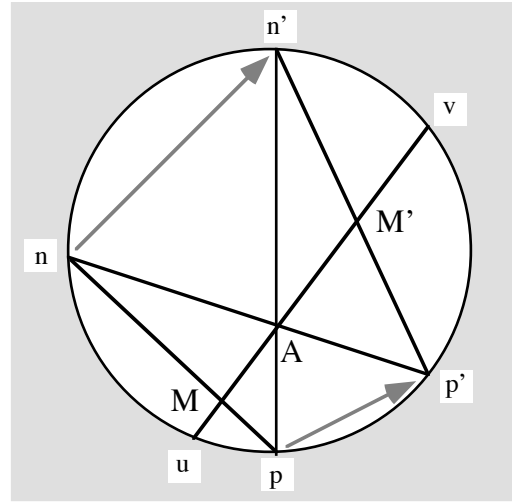
Soit τ une translation le long d'une droite Δ d'un plan hyperbolique, ayant pour points à l'infini u et v . Sur la droite à l'infini du plan, cette transformation τ est décrite en termes de birapports par une constante $\lambda > 0$ et par la condition :
 $[u,v,m,\tau(m)] = \lambda$

Alors on a pour tout point M de Δ :

$$[u,v,M,\tau(M)] = \lambda^2$$

preuve> On se place dans le modèle de Beltrami \mathcal{B} . Soit n sur \mathcal{B}_∞ . La droite (Mn) admet p comme deuxième point à l'infini. Soient n', p', M' les transformés de n, p, M par τ . Soit enfin A le point de (uv) vérifiant $[u, v, M, A] = \lambda$. Comme on a les birapports égaux $[u, v, M, A] = [u, v, p, p']$ les points n, A, p' sont alignés (considérer dans \mathcal{P} les droites du faisceau $\langle n \rangle$ passant par u, v, p, p'). De même en considérant dans \mathcal{P} le faisceau $\langle p \rangle$ les droites passant par u, v, n, n' on obtient que les points n', A, p sont alignés. En considérant enfin dans le faisceau $\langle n' \rangle$ les droites passant par u, v, p, p' on en déduit $[u, v, A, M'] = [u, v, p, p'] = \lambda$. On conclut par :

$$[u, v, M, M'] = [u, v, M, A] \cdot [u, v, A, M']. \quad \square$$



Les propositions 5 et 6 admettent une réciproque.

Proposition 7 : Soit Δ une droite d'un plan hyperbolique. Les transformations de Δ qui conservent les birapports sont exclusivement les translations et symétries-point.

preuve> C'est la proposition 2 du chapitre 8 section (b). \square

Rappelons par ailleurs la proposition 3 de la section (b) du chapitre 8.

Proposition 8 : (cas du corps \mathbb{R}) La structuration géométrique de la droite hyperbolique réelle par ses segments et ses translations en fait de manière naturelle une droite euclidienne réelle (sans unité de longueur).

Thème de réflexion Malgré cette confusion inévitable, on peut noter qu'une droite du plan hyperbolique est beaucoup plus une droite hyperbolique qu'une droite euclidienne. En effet, les birapports naturels sur une droite hyperbolique réelle ne sont pas conformes à ceux donnés par sa structure de droite euclidienne. Les birapports sont avant tout des birapports de droites concourantes (voir le théorème 1 (d)), et sont transférés aux points des droites par intersection. Par exemple, deux droites sécantes et leurs bissectrices ont un birapport égal à -1 . Si ces 4 droites coupent une autre droite Δ en 4 points A, B, C, D on obtient une division harmonique au sens de la structure de droite hyperbolique sur Δ mais pas au sens de sa structure de droite euclidienne.

Coniques du plan hyperbolique

Considérons tout d'abord le cas du modèle de Beltrami $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$. Si une conique non décomposée \mathcal{C} de \mathcal{P} coupe \mathcal{B} et si A et B sont deux points de \mathcal{C} on obtient une homographie du faisceau $\langle A \rangle$ vers le faisceau $\langle B \rangle$ sous la forme $\varphi : (AM) \mapsto (BM)$ lorsque M parcourt \mathcal{C} . Or $\langle A \rangle$ (resp. $\langle B \rangle$) a la même structure de droite projective,

qu'on le voie dans \mathfrak{B} ou dans \mathfrak{P} . On a donc immédiatement la possibilité de transférer définitions et résultats sur les coniques non décomposées de \mathfrak{P} à \mathfrak{B} . Ceci donne en particulier les résultats suivants.

Théorème et définition 2 : On appelle conique non décomposée d'un plan hyperbolique une courbe \mathfrak{C} qui est obtenue comme intersection de deux faisceaux de droites concourantes $\langle A \rangle$ et $\langle B \rangle$ en homographie (l'homographie ne doit pas faire correspondre à la droite (AB) de $\langle A \rangle$ la droite (BA) de $\langle B \rangle$). Cette définition ne dépend pas des points A et B pris sur \mathfrak{C} .

Notez que, en s'appuyant sur le modèle de Beltrami, on voit immédiatement que si une homographie φ de $\langle A \rangle$ vers $\langle B \rangle$ fait correspondre (AB) à elle-même, l'intersection de Δ et $\varphi(\Delta)$ décrit une droite ou reste vide (sauf pour la position $\Delta = (AB)$).

Proposition 9 : Tout conique non décomposée \mathfrak{C} d'un plan hyperbolique, est munie d'une structure projective donnée par les birapports $[M, N, P, Q]$ de quatre points arbitraires de \mathfrak{C} .

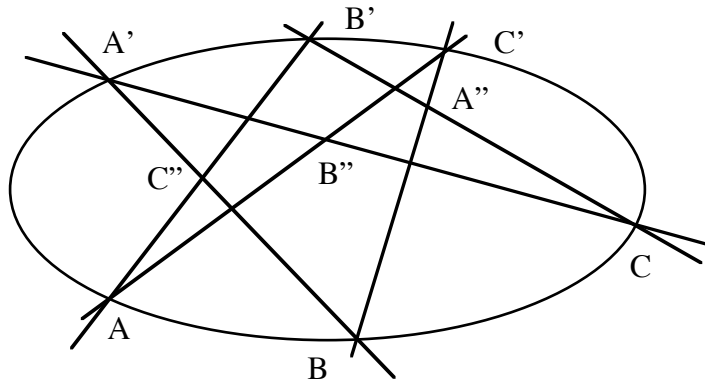
Le birapport $[M, N, P, Q]$ est égal au birapport $[(AM), (AN), (AP), (AQ)]$ où A est un point arbitraire de \mathfrak{C} distinct de M, N, P, Q .

Proposition 10 : Par cinq points d'un plan hyperbolique, non trois alignés, il passe exactement une conique non décomposée \mathfrak{C} .

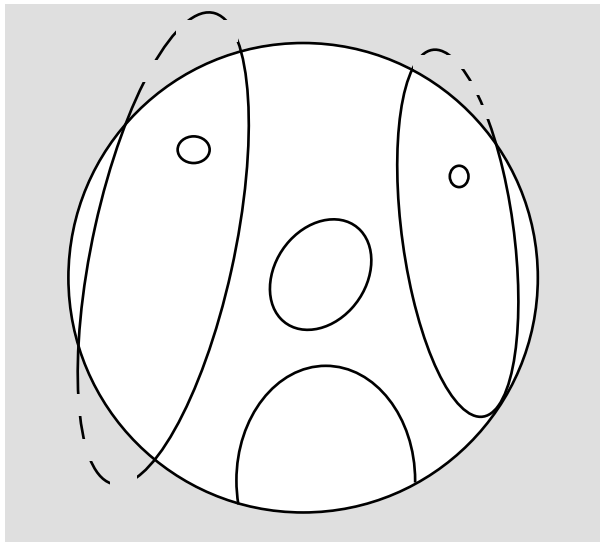
Théorème de Pascal

Soient six points A, B, C, A', B', C' sur une conique non décomposée dans un plan hyperbolique, on suppose que les points
 $A'' = (BC') \cap (B'C)$,
 $B'' = (CA') \cap (C'A)$ et
 $C'' = (AB') \cap (A'B)$

existent. Alors A'', B'', C'' sont alignés.



Notez aussi qu'il résulte immédiatement de la définition qu'une conique d'un plan hyperbolique est transformée par un placement en une autre conique qui présente la même structure projective de birapports.



six coniques dans le modèle de Beltrami

La classification complète des coniques dans un plan hyperbolique, au moins en ce qui concerne leur structure projective, est nettement plus compliquée que dans un plan euclidien, où on a seulement les ellipses, paraboles et hyperboles. Dans le modèle de Beltrami, on voit sur quelques exemples qu'une conique \mathcal{C} de \mathcal{P} peut être entièrement contenue dans \mathcal{B} ou intersecter \mathcal{B} selon le complémentaire d'un point, ou selon le complémentaire de deux points, ou selon un arc ouvert, ou selon deux arcs ouverts, qui peuvent être

éventuellement contigus en une extrémité.

Les cercles du plan hyperbolique comme coniques et comme cercles euclidiens

Nous montrons maintenant qu'une structure naturelle de cercle euclidien (cf. chapitre 8 section (b)) existe également pour les cercles d'un plan hyperbolique, de manière isomorphe à la structure analogue sur les cercles du plan euclidien.

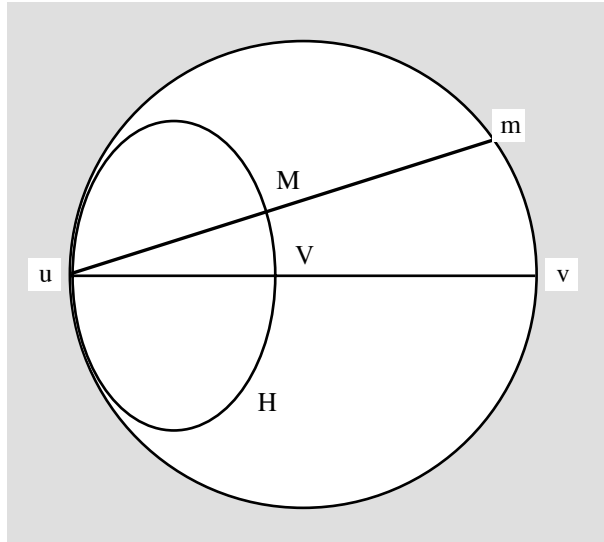
Proposition 11 : Un cercle \mathcal{C} d'un plan hyperbolique est une conique non décomposée. Sa structure projective est celle d'une droite projective. En outre le passage d'un point du cercle au point diamétralement opposé est une involution sans point fixe. Ceci fait de \mathcal{C} un cercle euclidien (cf. chapitre 8 section (b)). Si on oriente \mathcal{C} , cette structure est la même que celle que lui confère l'action naturelle simplement transitive de $\mathbf{SO}(2, \mathbf{R})$.

preuve> Le résultat est clair lorsqu'on se place dans le modèle de Beltrami et que le centre de \mathcal{C} est mis au centre euclidien de \mathcal{B}_∞ . Mais l'énoncé est intrinsèque et ne dépend donc pas de ce choix qui nous facilite la vie. \square

Les horocycles comme coniques et comme vraies droites euclidiennes du plan hyperbolique

Proposition 12 : Un horocycle est une conique non décomposée. Sa structure projective est celle d'une droite projective privée d'un point. Cela fait donc d'un horocycle une droite affine ou encore une droite euclidienne sans unité de longueur. Cette structure est la même que celle décrite à la proposition 10 de la section (a).

preuve> On se reporte à la proposition 10 de la section (a). Il suffit de vérifier que H est bien une conique non décomposée et qu'il ne lui manque qu'un point pour en faire une droite projective. On peut le faire en se plaçant dans le modèle de Beltrami et en montrant que H est une ellipse tangente à \mathfrak{B}_∞ . Pour cela il semble nécessaire de calculer l'expression analytique dans \mathcal{P} des déplacements de \mathfrak{B} . Nous faisons ce calcul dans la proposition 13. Nous nous basons maintenant sur la formule donnée à



la proposition 13. Les déplacements parallèles qui fixent le point u (le point S dans la figure de la proposition 13) s'expriment sous la forme $t \mapsto t+b$. Nous obtenons donc une paramétrisation de l'horocycle en le considérant comme l'orbite de $V = (x_0, 0) = (X, Y)$ et en prenant b comme paramètre. Cela donne

$$x(b) = \frac{(2-b^2)x_0 - b^2}{b^2x_0 + (2+b^2)} = \frac{2x_0 - b^2(1+x_0)}{2 + b^2(1+x_0)}, \quad x_0 = x(0) \quad \text{et}$$

$$y(b) = 2 \frac{b(x_0+1)}{b^2x_0 + (2+b^2)} = \frac{2b(x_0+1)}{2 + b^2(1+x_0)}, \quad y_0 = y(0)$$

En posant $\alpha = (1+x_0)/2$ (donc $\alpha \in]0,1[$) on obtient

$$1 + x(b) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha b^2} \quad \text{et} \quad y(b) = \frac{2\alpha b}{1 + \alpha b^2} \quad \text{donc} \quad b = \frac{y(b)}{1 + x(b)}$$

D'où on tire l'équation de la conique paramétrée par b

$$(1+x)^2 + \alpha y^2 - 2\alpha(1+x) = 0 \quad \text{ou encore} \quad (1-\alpha)(1+x)^2 + \alpha(x^2+y^2-1) = 0$$

Dans \mathcal{P} il s'agit d'une ellipse \mathfrak{E} tangente en u à \mathfrak{B}_∞ . Au voisinage du point de contact, on peut considérer l'infiniment petit y et faire le développement limité de $z = 1+x$ en fonction de y :

$$z \left(1 - \frac{z}{2\alpha}\right) = \alpha y^2 \quad \text{d'où} \quad z = \frac{y^2}{2} \left(1 + \frac{y^2}{4\alpha} + \varepsilon(y) y^2\right) = \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8\alpha} + \varepsilon(y) y^4$$

Le cercle \mathfrak{B}_∞ correspond à $\alpha = 1$ ce qui donne

$$z' = \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{8} + \varepsilon(y) y^4$$

Le cercle \mathfrak{B}_∞ et l'ellipse \mathfrak{E} ont donc un contact d'ordre 4 au point u . \square

Proposition 13 : (*expression analytique dans \mathcal{P} des déplacements de \mathcal{B}*)

Considérons le modèle de Beltrami \mathcal{B} avec un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 dans \mathbf{R}^2 . Un point $M = (\cos \theta, \sin \theta)$ de \mathcal{B}_∞ est paramétré par $t \in \mathbf{R}$ avec

$$x(t) = (1-t^2)/(1+t^2), \quad y(t) = 2t/(1+t^2).$$

Une homographie φ de \mathcal{B}_∞ s'écrit dans ce paramétrage sous la forme $\varphi(t) = (at+b)/(ct+d)$, avec $ad-bc \neq 0$.

Cette homographie induit dans \mathcal{B} un

placement ψ qui au point $P = (X,Y)$ de \mathcal{B} fait correspondre le point

$$\psi(X,Y) = (X',Y') \text{ avec } X' = \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)X + 2(cd-ab)Y + (c^2+d^2-a^2-b^2)}{(b^2+d^2-a^2-c^2)X + 2(ab+cd)Y + (a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

$$\text{et } Y' = 2 \frac{(bd-ac)X + (ad+bc)Y + (ac+bd)}{(b^2+d^2-a^2-c^2)X + 2(ab+cd)Y + (a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

preuve> Voyons d'abord que les formules données pour X' et Y' conviennent pour un point M de \mathcal{B}_∞ , en tenant compte du fait qu'on a $t^2 = (1-X)/(1+X)$ et $t = Y/(1+X)$. En effet si $X = x(t)$ et $Y = y(t)$, on a

$$\begin{aligned} X' = x(\varphi(t)) &= \frac{(ct+d)^2 - (at+b)^2}{(ct+d)^2 + (at+b)^2} = \frac{(c^2-a^2)t^2 + 2(cd-ab)t + (d^2-b^2)}{(c^2+a^2)t^2 + 2(cd+ab)t + (d^2+b^2)} = \\ &= \frac{(c^2-a^2)(1-X) + 2(cd-ab)Y + (d^2-b^2)(1+X)}{(c^2+a^2)(1-X) + 2(cd+ab)Y + (d^2+b^2)(1+X)} \\ Y' = y(\varphi(t)) &= \frac{2(ct+d)(at+b)}{(ct+d)^2 + (at+b)^2} = 2 \frac{ac t^2 + (cb+ad)t + bd}{(c^2+a^2)t^2 + 2(cd+ab)t + (d^2+b^2)} = \\ &= 2 \frac{ac(1-X) + (cb+ad)Y + bd(1+X)}{(c^2+a^2)(1-X) + 2(cd+ab)Y + (d^2+b^2)(1+X)} \end{aligned}$$

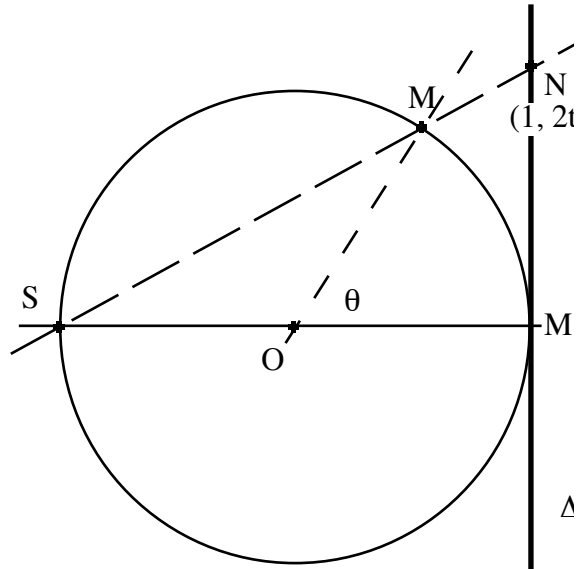
Pour voir que les formules données s'étendent à \mathcal{B} tout entier, il suffit alors de démontrer le lemme suivant. \square

Lemme : Dans le plan affine \mathbf{R}^2 toute application (partiellement définie) de la forme

$$(X,Y) \mapsto \left(\frac{f_1(X,Y)}{f_0(X,Y)}, \frac{f_2(X,Y)}{f_0(X,Y)} \right)$$

où les f_i sont des formes affines non identiquement nulles, conserve l'alignement des points

preuve> On note que ψ est partout définie sauf sur la droite $f_0(X,Y) = 0$. La conservation de l'alignement résulte du fait que les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont alignés si et seulement si on a



$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pour les points images on doit considérer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1(x_0, y_0)}{f_0(x_0, y_0)} & \frac{f_1(x_1, y_1)}{f_0(x_1, y_1)} & \frac{f_1(x_2, y_2)}{f_0(x_2, y_2)} \\ \frac{f_2(x_0, y_0)}{f_0(x_0, y_0)} & \frac{f_2(x_1, y_1)}{f_0(x_1, y_1)} & \frac{f_2(x_2, y_2)}{f_0(x_2, y_2)} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est égal à

$$\frac{1}{f_0(x_0, y_0) f_0(x_1, y_1) f_0(x_2, y_2)} \begin{vmatrix} f_1(x_0, y_0) & f_1(x_1, y_1) & f_1(x_2, y_2) \\ f_2(x_0, y_0) & f_2(x_1, y_1) & f_2(x_2, y_2) \\ f_0(x_0, y_0) & f_0(x_1, y_1) & f_0(x_2, y_2) \end{vmatrix}$$

Enfin chacune des lignes de la dernière matrice est combinaison linéaire des lignes de la première, puisque les f_i sont des formes affines. \square

Faisceaux de droites et cycles

Les trois types de faisceaux de droites dans un plan hyperbolique

Nous commençons par un théorème qui souligne certaines analogies profondes.

Théorème 3 : (*points alignés et droites «en faisceau» dans un plan hyperbolique*) On se situe dans un plan hyperbolique.

- a) Soient A_1 et A_2 deux points distincts sur une droite δ et A un point arbitraire du plan, soient σ_1 , σ_2 et σ les symétries par rapport à ces trois points, alors on a l'équivalence :

$$A \text{ est sur } \delta \Leftrightarrow (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma)^2 = \text{Id}$$

- b) Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes passant par un point A , et Δ une droite arbitraire, soient σ_1 , σ_2 et σ les symétries par rapport à ces trois droites, alors on a l'équivalence :

$$\Delta \text{ passe par } A \Leftrightarrow (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma)^2 = \text{Id}$$

- c) Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites divergentes de perpendiculaire commune δ , et Δ une droite arbitraire, soient σ_1 , σ_2 et σ les symétries par rapport à ces trois droites, alors on a l'équivalence :

$$\Delta \text{ est orthogonale à } \delta \Leftrightarrow (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma)^2 = \text{Id}$$

- d) Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites strictement parallèles distinctes, convergentes à l'infini en u , et Δ une droite arbitraire, soient σ_1 , σ_2 et σ les symétries par rapport à ces trois droites, alors on a l'équivalence :

$$\Delta \text{ passe par } u \Leftrightarrow (\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma)^2 = \text{Id}$$

preuve > (a) On a $\sigma = \sigma_A$. Le déplacement $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2$ est une translation le long de la droite $\delta = (A_1 A_2)$. Précisément c'est le carré de la translation τ_1 de A_2 à A_1 .

Si $\tau_1(A) = B$, et si A est sur la droite δ , alors B est aussi un point de la droite δ et $\tau_1 = \tau_{AB}$, donc $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_B \circ \sigma_A$, et $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma = \sigma_B$.

Supposons maintenant $(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma)^2 = \text{Id}$. Cela se réécrit : $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1}$. Comme $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ est une translation le long de $\sigma(\delta)$ et que δ est la seule droite fixée par τ^{-1} , on a $\sigma(\delta) = \delta$, et donc le point A est sur δ .

(b), (c) et (d) : raisonnements analogues laissés à la lectrice. \square

Exercice 1 : Donnez la preuve des équivalences (b), (c), (d) et examinez les théorèmes (ou non théorèmes) analogues pour les plans euclidien et sphérique.

Le théorème précédent légitime en partie la définition suivante :

Définition 2 : (*faisceaux de droites dans un plan hyperbolique*)

Dans un plan hyperbolique \mathfrak{D} on définit comme suit les faisceaux de droites.

Un **faisceau parabolique** est formé par les droites passant par un point à l'infini u . Un **faisceau elliptique** (de centre A) est formé par les droites passant par un point A de \mathfrak{D} . Un **faisceau hyperbolique** est formé par les droites orthogonales à une droite Δ .

Théorème et définition 4 : (déjà connu pour les faisceaux elliptiques)

Étant données quatre droites δ_i d'un même faisceau, et une droite arbitraire qui les coupe en quatre points A_i le birapport des points A_i ne dépend que des droites δ_i et est appelé le **birapport des quatre droites**. Enfin, toute bijection hyperbolique conserve le birapport pour 4 droites d'un même faisceau.

Proposition 14 :

- a) Étant donné un faisceau de droites, par tout point B du plan (distinct du centre du faisceau dans le cas elliptique), il passe une et une seule droite du faisceau. En outre, un faisceau elliptique est muni d'une involution naturelle sans point double, donnée par l'orthogonalité.
- b) Avec la définition du birapport donnée ci-dessus, et en tenant compte de l'involution sans point double dans le cas elliptique, un faisceau parabolique (resp. elliptique, hyperbolique) a bien la même structure projective qu'une droite parabolique (resp. elliptique, hyperbolique).
- c) Sur chacune de ces «droites», la symétrie par rapport au «point» δ est induite par la symétrie orthogonale par rapport à δ dans \mathfrak{D} .

Proposition 15 : Un déplacement d'un plan hyperbolique distinct de l'identité fixe un faisceau de droites et un seul. Ce faisceau est du même type (elliptique, parabolique ou hyperbolique) que le déplacement considéré.

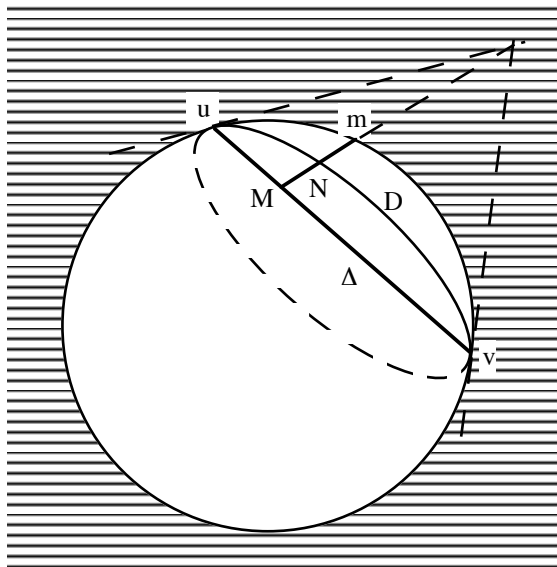
Exercice 2 : En considérant le cas du modèle de Beltrami, démontrer les affirmations du théorème 4 et des propositions 14 et 15.

Cycles associés à un faisceau de droites

Définition 3 : On appelle **cycle** associé à un faisceau l'ensemble des points symétriques d'un point donné B par rapport aux droites du faisceau.

Les cycles associés aux faisceaux elliptiques sont les cercles (sauf le cycle réduit au point source du faisceau). Ils ont la structure projective d'une droite elliptique.

Les cycles associés aux faisceaux paraboliques sont les horocycles. Ils ont la structure projective d'une droite parabolique.



Voyons le cas des cycles associés aux faisceaux hyperboliques. Le cycle est une orbite du groupe des translations le long de Δ , droite orthogonale à toutes les droites du faisceau. Lorsque M parcourt Δ un segment MN , orthogonal à Δ glisse le long de D et le point N parcourt une courbe D «équidistante» à Δ .

Définition 4 : Les cycles hyperboliques, associés au faisceau des droites orthogonales à une droite Δ , sont la droite Δ d'une part, et des courbes qui sont orbites (de points non sur Δ) du groupe des translations le long de Δ d'autre part. Ces courbes sont appelées des **équidistantes** à Δ .

Les équidistantes du plan hyperbolique comme coniques et comme droites hyperboliques (abstraites)

Le groupe des translations le long de Δ (isomorphe à $(\mathbf{R}^{>0}, \times)$) opère simplement transitivement sur chaque équidistante D à Δ . Cela confère à D une structure de droite hyperbolique selon le théorème 3 du chapitre 8 section (b). Comme dans le cas des cercles et des horocycles, on retrouve directement cette structure à partir de birapports définis de manière intrinsèque sur D .

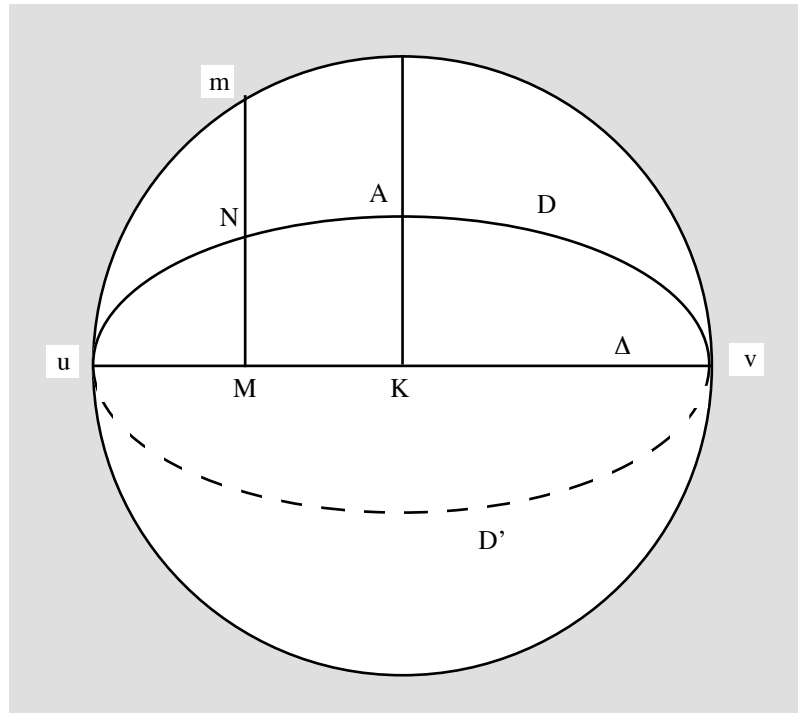
Proposition 16 : Une équidistante D à une droite Δ est la moitié d'une conique non décomposée, l'autre moitié étant sa symétrique D' par rapport à Δ . Sa structure projective est celle d'une droite hyperbolique.

Cette structure est la même que celle que lui confère l'action naturelle simplement transitive du groupe des translations le long de Δ .

La réunion d'une équidistante et de sa symétrique a la structure projective

d'une droite projective privée de deux points, c.-à-d. la même structure projective qu'une hyperbole dans un plan affine. Dans le modèle de Beltrami, si on note u et v les points à l'infini de Δ , $D \cup D' \cup \{u,v\}$ est une ellipse tangente à \mathfrak{B}_∞ en u et v .

preuve> Soit D' la symétrique de D par rapport à Δ . Il suffit de vérifier que $D \cup D'$ est bien une conique non décomposée et qu'il ne lui manque que deux points pour en faire une droite projective. On peut le faire en se plaçant dans le modèle de Beltrami et en montrant que $D \cup D' \cup \{u,v\}$ est une ellipse tangente à \mathfrak{B}_∞ en u et v .



Nous traitons d'abord le

cas où (uv) est l'axe des x dans le modèle de Beltrami standard, et nous reprenons les notations de la preuve de la proposition 12. On regarde l'équidistante comme l'orbite de point $A = (0, y_0)$. Les translations le long de Δ s'expriment sous la forme $t \mapsto at$ avec $a > 0$. L'équidistante est paramétrée par a , on obtient avec les formules de la proposition 13 en prenant $b = c = 0$, $d = 1$, les coordonnées suivantes pour le point paramétré par a sur l'équidistante

$$x(a) = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad \text{et} \quad y(a) = y_0 \frac{2a}{1 + a^2}$$

On reconnaît la paramétrisation du cercle \mathfrak{B}_∞ , à ceci près que la coordonnée y est multipliée par y_0 . Comme le paramètre a prend toutes les valeurs positives, on obtient bien la moitié (supérieure ou inférieure) d'une ellipse tangente à \mathfrak{B}_∞ en u et v : l'ellipse obtenue en faisant subir à \mathfrak{B}_∞ dans \mathcal{P} une affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport y_0 .

Dans le cas général, nous pouvons déduire du cas particulier étudié que $D \cup D' \cup \{u,v\}$ a la structure d'une droite projective, que c'est une conique \mathfrak{C} entièrement contenue dans $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}_\infty$ et vérifiant $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}_\infty = \{u,v\}$. Ceci implique bien que c'est une ellipse tangente à \mathfrak{B}_∞ en u et v . \square

Exercice 3 : Soit dans un plan hyperbolique une droite Δ et un point A fixe sur Δ . Soit u l'un des deux points à l'infini de Δ et considérons un point M variable sur la demi-droite $[A, u[$. Soit Δ_M la droite orthogonale à Δ en M . Soit D_M l'équidistante à Δ_M passant par A et \mathfrak{C}_M le cercle de centre M passant par A . Soit enfin H l'horocycle de centre u

passant par A . Montrer que lorsque M tend vers l'infini sur la demi-droite (dans $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}$, cela signifie que M tend vers u) le cercle \mathfrak{C}_M et l'équidistante D_M tendent toutes les deux vers l'horocycle H (en un sens convenable).

c) Le plan hyperbolique comme espace géométrique

Nous parlons tout d'abord des relations d'équidistance et de plus grande proximité, qui peuvent être définies, avant la distance, dans le cas d'un plan hyperbolique sur un corps euclidien \mathbf{R} arbitraire. Nous démontrons que les isométries (pour cette notion d'équidistance) sont bien les placements du plan hyperbolique. Ensuite, nous passons au cas du corps des réels et nous montrons que le plan hyperbolique est un espace géométrique, de manière naturelle et sans aucune ambiguïté possible sur la distance, au choix de l'unité de longueur près.

Équidistance et relation de plus grande proximité

Sans avoir encore défini la distance naturelle d sur \mathfrak{B} nous pouvons, à partir du groupe $\text{PI}(\mathfrak{B})$ donner une définition de l'équidistance.

Définition 1 : Dans un plan hyperbolique \mathfrak{D} on dira que le couple (A,B) est **équidistant** au couple (C,D) , et on notera $(A,B) \sim (C,D)$ pour signifier qu'il existe un placement de \mathfrak{D} qui envoie A et B en C et D . On obtient ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$. Un point M est dit **équidistant** de A et B si $(A,M) \sim (B,M)$.

En considérant la symétrie σ_Δ où Δ est la médiatrice de A et B distincts, on voit que $(A,B) \sim (B,A)$, et que pour tout M de Δ , $(A,M) \sim (B,M)$.

Inversement, si M est un point équidistant de A et B , considérons un placement de \mathfrak{B} , soit σ , qui fixe M et envoie A en B . On peut supposer que σ est indirecte (sinon la faire suivre par la symétrie par rapport à (MB)). Alors on sait que σ est une symétrie orthogonale (proposition 7(a) de la section (a)), donc c'est un élément d'ordre 2, et elle envoie B en A . Donc elle coïncide avec σ_Δ en A et B , donc c'est σ_Δ , donc M est sur Δ . Ainsi :

Proposition 1 : La médiatrice de A et B est l'ensemble des points équidistants de A et B .

Notation 2 : Pour A et B dans un plan hyperbolique \mathfrak{D} notons u et v les points à l'infini de la droite (AB) et définissons le scalaire $\rho_{\mathfrak{D}}(A,B)$ par :

$$\rho_{\mathfrak{D}}(A,B) = \sup([u,v,A,B], 1/[u,v,A,B]) \geq 1$$

Ce scalaire ne dépend ni de l'ordre choisi pour u et v ni de l'ordre choisi pour A et B . En outre $\rho_{\mathfrak{H}}(A,B)$ est invariant par les bijections hyperboliques (il mesure donc intuitivement la distance de A à B).

Proposition 2 : Pour quatre points arbitraires d'un plan hyperbolique on a $(A,B) \sim (C,D)$ si et seulement si $\rho_{\mathfrak{H}}(A,B) = \rho_{\mathfrak{H}}(C,D)$.

Exercice 1 : Démontrez la proposition 2.

La définition qui suit utilise un peu abusivement le mot «isométrie» en l'absence de distance,... mais comme on a défini l'équidistance, ce n'est pas très grave.

Définition 3 : On appelle **isométrie** d'un plan hyperbolique \mathfrak{D} une transformation τ de \mathfrak{D} vérifiant : pour tous points A, B de \mathfrak{D} on a l'équidistance de (A,B) et $(\tau(A),\tau(B))$. c.-à-d. encore $\rho_{\mathfrak{H}}(A,B) = \rho_{\mathfrak{H}}(\tau(A),\tau(B))$.

Proposition 3 : Toute isométrie τ d'un plan hyperbolique est un déplacement ou antidéplacement, et réciproquement.

La réciproque est triviale. La preuve de la partie directe, qui suit, reproduit à l'identique celle du théorème fondamental 1 en géométrie plane euclidienne (décomposition d'une isométrie en produit de symétries orthogonales). En l'état de nos connaissances, nous aurions pu donner une preuve plus courte, mais moins significative.

preuve> a) Soient A, B, C les trois points non alignés. Montrons que si τ fixe A, B et C , c'est l'identité. Si pour un point M on avait $N = \tau(M)$ distinct de M , on aurait $(M,A) \sim (N,A)$, $(M,B) \sim (N,B)$, $(M,C) \sim (N,C)$, puisque τ est une isométrie, et les trois points A, B, C seraient alignés sur la médiatrice de $[MN]$.

b) Montrons maintenant que si $\tau \neq \text{Id}$ fixe deux points A et B , c'est la symétrie par rapport à (AB) . Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M , on a comme en (a) A et B sur la médiatrice Δ de $[MN]$. Alors $\tau \circ \sigma_{\Delta}$ possède les trois points fixes non alignés A, B, N . Donc d'après (a), c'est l'identité. Donc $\tau = \sigma_{\Delta}$.

c) Montrons que si τ fixe exactement un point A , c'est le produit de deux symétries par rapport à des droites passant par A . Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M , A est sur la médiatrice Δ de $[MN]$. Alors $\tau \circ \sigma_{\Delta}$ possède les deux points fixes A, N . Donc d'après (b) c'est l'identité ou la symétrie orthogonale $\sigma_{(AN)}$. Le premier cas est exclu car sinon $\tau = \sigma_{\Delta}$.

d) On peut maintenant supposer que τ n'admet aucun point fixe. Soit un point M arbitraire avec $N = \tau(M)$ distinct de M . On considère la médiatrice Δ de $[MN]$. Alors $\tau \circ \sigma_{\Delta}$ possède le point fixe N . Ce qui nous ramène à l'un des cas précédents. \square

La même technique de preuve conduit au résultat suivant, comme dans le plan euclidien :

Proposition 4 : Si dans un plan hyperbolique deux triangles non aplatis ont leurs cotés égaux, il y a exactement une isométrie qui transforme le premier en le second.

Exercice 2 : Démontrer les deux autres «cas d'égalité des triangles», en tant que cas d'égalité directe (un coté égal compris entre deux angles orientés égaux, deux cotés égaux formant entre eux deux angles orientés égaux).

Exercice 3 : Donnez une nouvelle définition d'un plan \mathbf{R} -hyperbolique \mathfrak{D} comme ensemble de points muni d'une application $\rho_{\mathfrak{D}} : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathbf{R}$ soumise à une axiomatique convenable.

La distance dans un plan hyperbolique réel

A partir du moment où nous désirons parler de distance (et non plus seulement d'équidistance), nous nous limiterons au cas où le corps ordonné \mathbf{R} sur lequel est défini notre plan hyperbolique est en fait le corps des nombres réels \mathbb{R} . Nous faisons cette hypothèse dans toute la suite de la section (c).

Une seule définition possible, au choix de l'unité de longueur près

Si nous désirons faire de \mathfrak{B} un espace géométrique pour lequel les placements soient les isométries, nous pouvons essayer de munir \mathfrak{B} d'une distance invariante par déplacements et pour laquelle le plus court chemin d'un point à un autre soit le segment joignant les deux points. Alors nous n'avons guère le choix, parce que les longueurs de segments mis bout à bout doivent s'ajouter, et ceci implique³ que sur une droite (uv) la longueur du segment $[AB]$ soit de la forme

$$d(A,B) = k_{(uv)} | \log ([u,v,A,B]) |$$

En outre, comme les birapports sont conservés par déplacements, si nous voulons que la distance le soit aussi, le scalaire $k_{(uv)}$ ne doit pas dépendre de la droite (uv) .

Pour des raisons d'analogie entre la géométrie sphérique et la géométrie hyperbolique, nous posons :

$$d(A,B) \stackrel{\text{df}}{=} (R/2) | \log ([u,v,A,B]) | = (R/2) \log (\rho_{\mathfrak{D}}(A,B)),$$

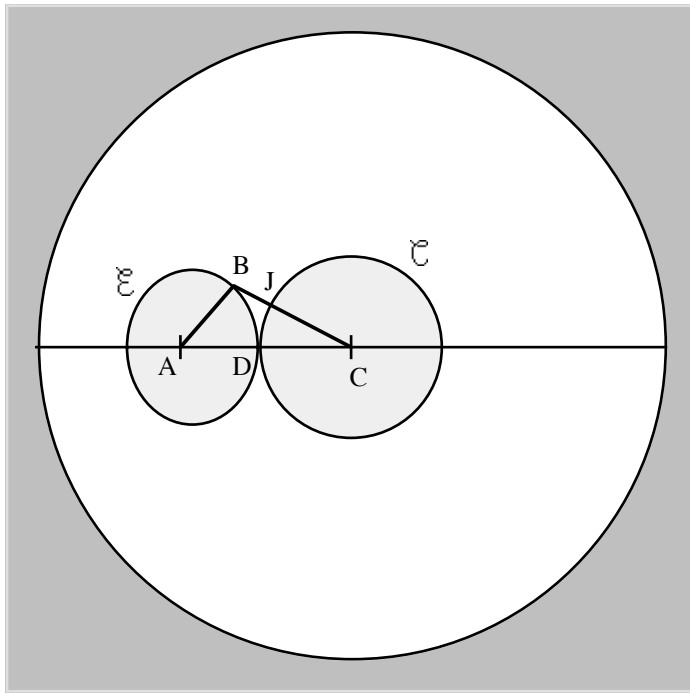
le pourquoi du coefficient $1/2$ apparaîtra dans des formules établies plus loin.

Le plan hyperbolique réel est un espace géométrique

Théorème 1 : La formule : $d(A,B) \stackrel{\text{df}}{=} (R/2) \log (\rho_{\mathfrak{D}}(A,B))$ définit une distance sur \mathfrak{B} . Le plan hyperbolique muni de cette distance est un espace géométrique dans lequel le plus court chemin de A à B est obtenu par paramétrage croissant du segment $[AB]$.

preuve> Montrons d'abord l'inégalité triangulaire. Elle résulte de la convexité des disques (nous reprenons en fait la preuve donnée pour la métrique de la sphère) :

³ cf. la proposition 8 de la section (b) et la discussion concernant la grande ressemblance entre une droite d'un plan hyperbolique (avec ses segments et ses translations) et une droite euclidienne, dans le chapitre 8 section (b).



Soit en effet ABC un triangle non aplati dont le plus grand coté est $b = AC$ (nous notons AC la longueur $d(A,C)$ du segment telle qu'elle vient d'être définie). Soit $c = AB$ et $a' = b - c$. Traçons le disque de centre A et de rayon c et le disque de centre C et de rayon a' . On peut prendre par exemple C au centre euclidien de \mathcal{B}_∞ en se situant dans le modèle de Beltrami. Le deuxième disque a pour bord un cercle \mathcal{C} de \mathcal{P} de centre C , le premier disque a pour bord une ellipse \mathcal{E} de \mathcal{P} , et

comme la figure est symétrique par rapport à la droite (AC) le cercle et l'ellipse sont tangents au point D qui est le seul point vérifiant $AD = c$ et $DC = a'$. Le point B est en dehors du disque de centre C puisqu'il se trouve sur l'ellipse \mathcal{E} et qu'il n'est pas en D . Le segment $[CB]$ coupe \mathcal{C} en un point J et on obtient : $BC > JC = CD = AC - AB$ donc $AC < AB + BC$.

Le fait que la métrique représente la longueur du plus court chemin et que celui-ci est obtenu en parcourant le segment résulte de l'inégalité triangulaire, qui est stricte lorsque les points ne sont pas alignés. C'est la même preuve que celle donnée pour le plan euclidien dans le théorème 1 du chapitre 6.

Il nous reste à voir que l'espace est complet. Considérons sans perte de généralité le modèle standard \mathcal{B} de rayon euclidien égal à 1 centré en un point K dans un plan euclidien \mathcal{P} , puis une suite de Cauchy A_n avec $d(A_n, A_{n+1}) \leq 1/2^n$. On calcule sans difficulté un $r < 1$ tel que tous les points de la suite sont dans le disque euclidien \mathcal{D} centré en K et de rayon r . Par un petit calcul on obtient ensuite deux réels > 0 , k et k' tels que : $k \delta(A,B) \leq d(A,B) \leq k' \delta(A,B)$, où δ représente la distance euclidienne. On conclut en notant que \mathcal{D} est complet pour δ donc aussi pour d . \square

Nous pouvons maintenant faire appel au théorème d'unicité démontré au chapitre 6, concernant la métrique d'un espace géométrique dès qu'est définie la relation de plus grande proximité.

Théorème 2 : Dans un plan hyperbolique réel \mathcal{H} , au choix de l'unité de longueur près, $\log(\rho_{\mathcal{H}}(A,B))$ est la seule distance possédant les trois propriétés suivantes :

- invariance par déplacement (d'où les cercles, identiques à ceux déjà définis)
- les disques pour la distance sont ceux déjà définis (comme réunion des segments ayant une extrémité au centre du cercle et une autre sur le cercle)

- la distance fait de \mathfrak{D} un espace géométrique

Nous sommes maintenant prêts pour une troisième définition de la notion de plan hyperbolique.

Définition 3 : (*structure de plan hyperbolique réel, troisième version*)

On appelle plan hyperbolique réel un espace métrique isométrique au modèle de Beltrami avec une de ses distances naturelles (lesquelles ne diffèrent que par le choix de l'unité de longueur)

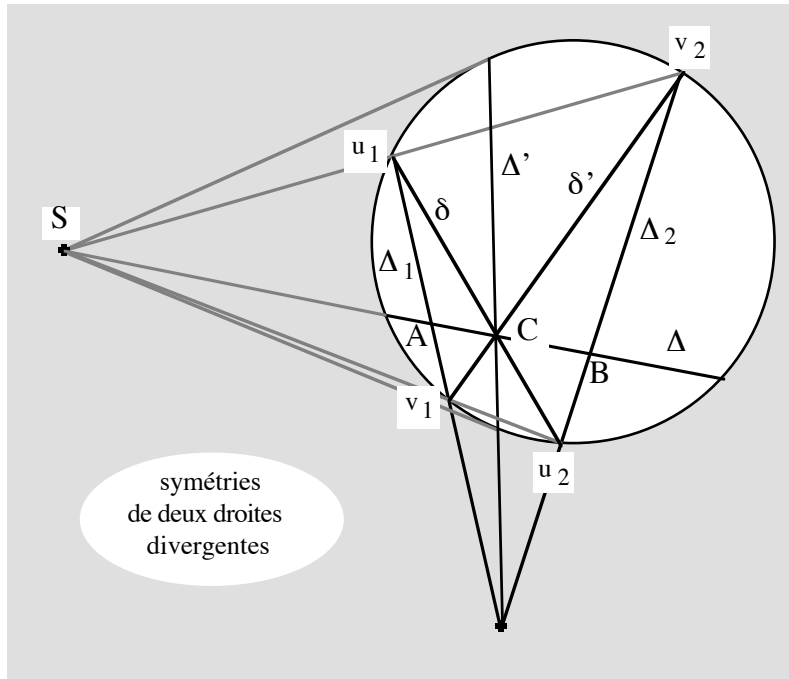
Exercice 4 : Faites le raccord avec les deux autres définitions déjà données.

d) Théorèmes structurels

Dans les propositions 1 et 2, nous montrons comment on peut caractériser uniquement en termes d'incidence les symétries-point, le milieu d'un segment, le milieu de deux droites divergentes, l'orthogonalité de deux droites. On en déduit le théorème 1 qui caractérise les bijections hyperboliques comme bijections conservant l'alignement et les birapports. Ces résultats sont valables avec un plan hyperbolique défini sur un corps euclidien arbitraire \mathbf{R} . Nous démontrons ensuite deux théorèmes plus forts, valables pour le plan hyperbolique réel usuel.

Proposition 1 : (*symétries et relation d'incidence*)

- Soit un point C et une droite Δ_1 ne passant pas par C dans le plan hyperbolique \mathfrak{B} . La droite Δ_2 symétrique de Δ_1 par rapport à C est la seule droite distincte de Δ_1 vérifiant la propriété d'incidence suivante :
une droite passant par C coupe Δ_1 si et seulement si elle coupe Δ_2 (*)
- Si on a deux droites divergentes Δ_1 et Δ_2 il existe un unique point C vérifiant la relation d'incidence (*), c'est le milieu des deux droites.
- Si on a deux parallèles convergentes Δ et Δ' il n'existe aucun point C vérifiant la relation d'incidence (*).
- Si une transformation de \mathfrak{B} transforme toute droite en une autre droite, alors
 - elle opère sur les points à l'infini (c.-à-d. elle transforme des droites ayant un point à l'infini en commun, en droites ayant un point à l'infini en commun),
 - elle transforme deux droites divergentes et leur milieu en deux droites écartées et leur milieu,
 - et le milieu de deux points en le milieu des deux points images.



preuve> Les propriétés (a) et (b) sont suffisamment claires sur la figure ci-contre, correspondant aux symétries de deux droites divergentes Δ_1 et Δ_2 .

Elles pourraient faire l'objet d'une preuve rigoureuse (par exemple avec un calcul dans \mathcal{P}).

De même la propriété (c) est claire sur une figure montrant deux parallèles convergentes.

Voyons le (d). La transformation considérée transforme deux sécantes en deux sécantes et deux non-sécantes en deux non-sécantes. D'après (b) et (c), deux droites divergentes et leur milieu doivent donc donner deux droites divergentes et leur milieu, et deux parallèles convergentes doivent donner deux parallèles convergentes. Le premier point du (d) est alors clair d'après le fait que quatre (ou plus) droites ont un point à l'infini en commun si et seulement si elles sont deux à deux des parallèles convergentes.

Pour le dernier point du (d), notons φ la transformation considérée. On remarque que (a) prouve que pour tout point A et toute droite Δ on a :

$$\varphi(\sigma_A(\Delta)) = \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(\Delta))$$

Mais alors si M est un point arbitraire, on le considère comme intersection de deux droites et on obtient :

$$\varphi(\sigma_A(M)) = \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(M))$$

autrement dit, si A est milieu de $[MM']$, $\varphi(A)$ est milieu de $[\varphi(M)\varphi(M')]$ \square

En combinant le résultat précédent avec les résultats sur la décomposition d'un déplacement en produit de symétries-point (section (a) proposition 11), nous obtenons :

Proposition 2 : Une transformation de \mathfrak{B} qui transforme toute droite en une droite transforme deux droites orthogonales en deux droites orthogonales.

preuve> Soit φ la transformation considérée. On a vu à la proposition 1 que φ transforme le milieu de deux points en le milieu des deux points images. Autrement dit, pour tout point J , on a $\varphi \circ \sigma_J \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\varphi(J)}$.

Considérons maintenant un déplacement ψ . Comme c'est un produit de symétries-point, on obtient : $\varphi * \psi = \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ est un produit de symétries-point, donc un déplacement.

Si ψ est une rotation d'un quart de tour autour d'un point J , alors $\varphi * \psi$ doit être un déplacement qui fixe $\varphi(J)$ et il doit être d'ordre 4 dans le groupe des déplacements. Donc c'est l'une des deux rotations d'un quart de tour autour de $\varphi(J)$. Ceci implique que deux

droites orthogonales passant par J ont pour images par φ deux droites orthogonales passant par $\varphi(J)$ \square

Le théorème suivant est un corollaire de la proposition précédente et de la proposition 4 de la section (b).

Théorème 1 : Une bijection entre deux plans hyperboliques qui conserve l'alignement et les birapports est une bijection hyperbolique.

Nous terminons avec deux théorèmes de structure qui réclament \mathbb{R} pour corps de base.

Théorème 2 : (*transformation du plan hyperbolique réel opérant sur les droites*) Une bijection d'un plan hyperbolique réel qui transforme toute droite en une droite est une isométrie.

preuve> Nous savons d'après la proposition 1 que la transformation φ considérée opère sur l'ensemble \mathcal{B}_∞ des points à l'infini du plan hyperbolique. D'après la proposition 2, cette opération sur \mathcal{B}_∞ conserve les divisions harmoniques. D'après un théorème structurel concernant la droite projective réelle, nous obtenons donc une homographie, et φ est la transformation induite sur \mathcal{B} par cette homographie \square

Remarque : On notera le contraste avec le résultat analogue dans le cas du plan euclidien, pour lequel on obtient toutes les transformations affines.

Théorème 3 : (*automorphismes du groupe des homographies d'une droite projective réelle*)

- a) Tout automorphisme du groupe des placements d'un plan hyperbolique réel est intérieur.
- b) Tout automorphisme du groupe des homographies d'une droite projective réelle est intérieur.

preuve> (a) et (b) signifient exactement la même chose. Démontrons (a). Les symétries (c.-à-d. les éléments d'ordre 2) de $\text{PI}(\mathcal{B})$ sont réparties en deux classes de conjugaison, les symétries-point et les symétries orthogonales. Une symétrie-point σ_A commute avec une symétrie orthogonale σ_Δ si et seulement si le point A est sur la droite Δ .

Le premier travail consiste à caractériser chacune de ces classes de conjugaison par une propriété uniquement liée au groupe. On peut faire comme ceci : quand une symétrie-point commute avec une symétrie orthogonale, leur produit reste une symétrie orthogonale (l'énoncé devient faux en échangeant les mots symétrie-point et symétrie orthogonale).

Donc un automorphisme du groupe transforme symétries-point (resp. symétries orthogonales) en symétries-point (resp. symétries orthogonales). Il induit donc une transformation sur les points de \mathcal{B} et une autre sur les droites. En outre la relation d'incidence entre points et droites est conservée, parce qu'elle se traduit en termes de groupe par la commutation des symétries correspondantes. D'après le théorème 2, la transformation induite sur les points est un placement. Il reste à voir que l'automorphisme considéré est bien égal à l'automorphisme intérieur associé à ce placement. Or ces deux automorphismes

coïncident déjà pour les symétries orthogonales, et ces dernières engendrent le groupe $\mathbf{PI}(\mathfrak{B})$. \square