3) GEOMETRIE AFFINE DE DIMENSION n SUR UN CORPS COMMUTATIF

Introduction

Nous faisons dans ce chapitre une incursion dans les espaces de dimension quelconque, sur un corps commutatif quelconque.
En fait nous avons en vue essentiellement les espaces réels ou complexes.
Du point de vue des calculs, il n'y a pratiquement aucune différence entre un espace affine ou un espace vectoriel. Le passage du vectoriel à l'affine consiste essentiellement en un changement de «point de vue». Le point de vue des espaces affines est plus géométrique dans la mesure où aucun point d'un espace affine n'est a priori privilégié, alors que dans les espaces vectoriels, l'origine joue un rôle tout à fait à part.
Dans le plan affine réel, nous avons mis en valeur les implicites géométriques du calcul vectoriel.
Dans la dernière section de ce chapitre, nous établissons une sorte de réciproque : les implicites vectoriels des relations d'incidence dans un espace affine de dimension 3. En fait, à partir des seules relations d'incidence entres points, droites et plans d'un «espace» de dimension 3, à condition de supposer que quelques axiomes «évidents» sont vérifiés, il est possible de reconstruire un corps (non nécessairement commutatif), et de munir l'espace considéré d'une structure d'espace affine pour laquelle droites et plans sont exactement ceux du départ.

a) Généralités

Dans tout la section a) on notera **K** un corps commutatif fixé.

Définitions et premières propriétés

Espaces affines et applications affines

Définition 1 : (espaces affines) Un espace affine de dimension n sur le corps **K** est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure :

- l'ensemble des points de l'espace affine : $\mathcal{E}$
- un espace vectoriel réel de dimension n sur **K** : $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
- une loi externe $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}$, notée $+$

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier l'axiome suivant :
Avec cette loi externe le groupe additif $\vec{\mathcal{E}}$ opère simplement transitivement sur $\mathcal{E}$. Ce qui peut être explicité comme suit :

1) si $\vec{U}$, $\vec{V} \in \vec{\mathcal{E}}$, $M \in \mathcal{E}$: $M + (\vec{U} + \vec{V}) = (M + \vec{U}) + \vec{V}$
2) $M + \vec{\mathbf{0}} = M$ pour tout M de $\mathcal{E}$
3) si $A, B \in \mathcal{E}$, il existe exactement un $\vec{U} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que $A + \vec{U} = B$ (on le note $\overrightarrow{AB}$).

Un espace de dimension 0 est réduit à un point. Un espace affine de dimension 1 est appelé une droite affine, de dimension 2 un plan affine.
Dans la suite de la section a) on parlera d'espace affine pour «espace affine de dimension finie sur le corps **K** » et d'espace vectoriel pour «espace vectoriel de dimension finie sur le corps **K** ».

Définition 2 : *(applications affines)* Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines.
On dit qu'une application φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ **opère sur les vecteurs** si on a l'implication :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1} \text{ (où } A_1 = \varphi(A) \text{ etc...)}$$

On peut alors définir $\varphi(\vec{U})$ sans ambiguïté pour tout vecteur $\vec{U}$ et l'application obtenue est un homomorphisme pour l'addition des vecteurs.
Une **application affine** de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ est par définition une application qui opère sur les vecteurs et qui vérifie en outre la propriété de linéarité suivante :

$$\varphi(t.\vec{U}) = t.\varphi(\vec{U}) \text{ pour tout } t \in \mathbf{K}$$

Une **transformation affine** de $\mathcal{E}$ est une application affine bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$.

Exemples : définit comme dans un plan réel affine, la **translation** de vecteur $\vec{U}$, qu'on note $\tau_{\vec{U}}$, et l'**homothétie** de centre J et de rapport k, qu'on note $\boldsymbol{\eta}_{J,k}$.

Remarque Pour démontrer qu'une application donnée φ est affine, on peut donc calculer $\varphi(M+\vec{U})$ (pour M et $\vec{U}$ arbitraires) et montrer qu'il s'écrit sous la forme $\varphi(M) + \vec{V}$ avec $\vec{V}$ dépendant de $\vec{U}$ mais pas de M (ce qui prouve que φ opère sur les vecteurs), et terminer en vérifiant que si on remplace $\vec{U}$ par $\lambda\vec{U}$ alors $\vec{V}$ est remplacé par $\lambda\vec{V}$.

Proposition 1 :

a) Soit φ une application affine de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
Il existe une application linéaire unique ψ de $\vec{\mathcal{E}}$ vers $\vec{\mathcal{F}}$ avec, pour tout M de $\mathcal{E}$ et tout $\vec{U}$ de $\vec{\mathcal{E}}$: $\varphi(M+\vec{U}) = \varphi(M) + \psi(\vec{U})$
b) Réciproquement, si on se donne un point A de $\mathcal{E}$, un point B de $\mathcal{F}$, et une application linéaire ψ de $\vec{\mathcal{E}}$ vers $\vec{\mathcal{F}}$ il existe exactement une application affine φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ vérifiant :
$\varphi(A) = B$ et ψ est l'application linéaire induite par φ.

c) En outre, on a les équivalences :

$$\varphi \text{ est injective} \Leftrightarrow \psi \text{ est injective}$$
$$\varphi \text{ est surjective} \Leftrightarrow \psi \text{ est surjective}$$
$$\varphi \text{ est bijective} \Leftrightarrow \psi \text{ est bijective}$$

d) Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ on a aussi l'équivalence :

φ admet exactement un point fixe $\Leftrightarrow$ 1 n'est pas valeur propre de ψ

Exercice 1 : Démontrer la proposition précédente.

Sous espaces affines

Définition 3 : *(sous espace affine d'un espace affine)* Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est appelée un **sous espace affine** de $\mathcal{E}$ lorsque :

a) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ de $\mathcal{F}$ (c.-à-d. avec A et B dans $\mathcal{F}$) forment un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, noté $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, et :

b) pour $M \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{U} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$, on a $M + \overrightarrow{U} \in \mathcal{F}$.

Dans ce cas, l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est appelé **la direction de** $\mathcal{F}$.

Il est alors clair que $(\mathcal{F}, \overrightarrow{\mathcal{F}}, +)$ est un espace affine. Un sous espace affine de codimension 1 est appelé un **hyperplan affine**.

Exercice 2 : Montrer que, si $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$, alors pour tout point A de $\mathcal{F}$, l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ de $\mathcal{F}$. Inversement, si dans une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, il y a un point A tel que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ de $\mathcal{F}$ forme un sous espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, alors $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$.

Exercice 3 : *Droite passant par deux points.*

Si A et B sont deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$ l'ensemble (AB), défini comme :

l'ensemble des M qui s'écrivent $A + t.\overrightarrow{AB}$ (où t parcourt **K**),

est un sous espace affine de dimension 1 de $\mathcal{E}$. On dit que c'est une droite de $\mathcal{E}$ (plutôt qu'une sous droite de $\mathcal{E}$: écriture trop lourdingue).

Exercice 4 : On suppose que **K** admet au moins trois éléments. Montrer qu'une partie non vide $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous espace affine si et seulement si elle vérifie :

si A et B sont dans $\mathcal{F}$ alors toute la droite (AB) est dans $\mathcal{F}$.

Exercice 5 : Montrer qu'une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous espace affine si et seulement si elle peut être munie d'une structure affine telle que l'injection canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{E}$ soit une application affine.

Exercice 6 : *Espace affine quotient.* Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\equiv$ une relation d'équivalence définie sur $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble quotient de $\mathcal{E}$ par cette relation d'équivalence. On dira que $\mathcal{F}$ est un espace affine quotient de $\mathcal{E}$ s'il peut être muni d'une structure affine telle que la projection canonique de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ soit une application affine. Démontrez que c'est le cas si et seulement si il existe un sous espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{H}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ avec :

$$M \equiv N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$$

On peut alors définir la structure affine quotient sur $\mathfrak{F}$ au moyen de l'espace vectoriel quotient $\overrightarrow{\mathfrak{F}} := \overrightarrow{\mathfrak{E}} / \overrightarrow{\mathfrak{H}}$.

Exercice 7 : *Espace affine produit.*

a) Montrer qu'on obtient une structure d'espace affine sur le produit cartésien $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}$ en considérant l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathfrak{E}} \times \overrightarrow{\mathfrak{F}}$ et la loi externe :

$$(M,N) + (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) := (M + \overrightarrow{U}, N + \overrightarrow{V})$$

b) Montrer qu'une application de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{F}$ est affine si et seulement si son graphe est un sous espace affine de $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}$.

c) Montrer qu'une application d'un espace affine $\mathfrak{H}$ vers $\mathfrak{E} \times \mathfrak{F}$ est affine si et seulement si chacune de ses applications «coordonnées» (de $\mathfrak{H}$ vers $\mathfrak{E}$ et de $\mathfrak{H}$ vers $\mathfrak{F}$) est affine.

Exercice 8 : *Image et image réciproque d'un sous espace affine par une application affine.* Montrer que l'image et l'image réciproque d'un sous espace affine par une application affine sont des sous espaces affines (sauf dans le cas d'une image réciproque vide).

Proposition 2 : Soit $\mathfrak{F}$ une partie *non vide* d'un espace affine $\mathfrak{E}$. Soit A un point de $\mathfrak{F}$. Alors le plus petit sous espace affine de $\mathfrak{E}$ contenant $\mathfrak{F}$ existe. Il est égal à l'ensemble des points M qui s'écrivent sous la forme :

$$A + t_1 \overrightarrow{AK_1} + t_2 \overrightarrow{AK_2} + \dots + t_r \overrightarrow{AK_r}$$

avec $A, K_1, \dots, K_r$ dans $\mathfrak{F}$ et $t_1, \dots, t_r$ dans $\mathbf{K}$.

Exercice 9 : Démontrer la proposition précédente.

On parlera alors du sous-espace affine engendré par $\mathfrak{F}$.

On a *presque* une structure de treillis[1] sur les sous-espaces affines de $\mathfrak{E}$: borne inférieure de deux sous espaces affines $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ est leur intersection, qui n'est un sous espace affine que si elle est non vide, la borne supérieure est le sous espace engendré par leur réunion, on le note $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$.

La proposition qui suit résulte de la proposition classique sur les dimensions de sous espaces vectoriels. Dans le cas de deux sous espaces affine d'intersection vide, on doit rajouter une dimension correspondant à un vecteur qui joint un point du premier sous espace à un point du second. Nous laissons les détails de la preuve à la lectrice.

Proposition 3 : *(sous espaces et dimensions)* Soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathfrak{E}$. Si leur intersection est non vide, on a :

$$\dim(\mathfrak{F}_1) + \dim(\mathfrak{F}_2) = \dim(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) + \dim(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) \qquad (1)$$

Sinon on a

$$\dim(\mathfrak{F}_1) + \dim(\mathfrak{F}_2) + 1 = \dim(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2) + \dim(\overrightarrow{\mathfrak{F}_1} \cap \overrightarrow{\mathfrak{F}_2}) \qquad (2)$$

Exercice 10 : Démontrer la proposition précédente.

---

[1] Rappelons qu'un treillis est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments admettent toujours une borne supérieure et une borne inférieure. Par exemple $\mathbb{N}$ est un treillis pour la relation de divisibilité.

Remarque On peut rajouter conventionnellement l'ensemble vide dans l'ensemble des sous espaces affines de $\mathfrak{E}$, de manière à obtenir vraiment un treillis, mais sa dimension doit normalement être prise égale à -1, et la formule (2) n'est de toute manière pas la simple extension de la formule (1) via cette convention.

Définition 4 : *(parallélisme)* Soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathfrak{E}$.
On dira qu'ils sont parallèles si on a une des deux inclusions :

$$\overrightarrow{\mathfrak{F}_1} \subset \overrightarrow{\mathfrak{F}_2} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{\mathfrak{F}_2} \subset \overrightarrow{\mathfrak{F}_1}$$

Lorsque les sous espaces ont même dimension, cela signifie qu'ils ont la même direction.

Sur l'ensemble des sous espaces de $\mathfrak{E}$ ayant une dimension fixée, le parallélisme est une relation d'équivalence.

Exercice 11 : Montrer que pour deux hyperplans d'un espace affine $\mathfrak{E}$ le parallélisme équivaut à : ils sont confondus ou d'intersection vide. Donner également une formulation (de ce même type) équivalente au parallélisme lorsqu'il s'agit d'un hyperplan et d'un sous espace affine de dimension arbitraire.

Indépendance affine, repères affines et cartésiens

Définitions 5 : *(indépendance affine, repère affine, repère cartésien)*
Des points $A_1,\dots, A_i$ d'un espace affine $\mathfrak{E}$ sont dits **affinement indépendants** s'ils engendrent un sous espace affine de dimension $i-1$.
Si $\mathfrak{E}$ est de dimension n un système de $n+1$ points affinement indépendants $(A_0,\dots, A_n)$ est appelé un **repère affine** de $\mathfrak{E}$; et un **repère cartésien** de $\mathfrak{E}$ est un système $(A_0, \overrightarrow{U_1},\dots, \overrightarrow{U_n})$ où les $\overrightarrow{U_i}$ sont linéairement indépendants.

Exercice 12 :
1) Démontrer qu'il revient au même d'affirmer que les points $A_1,\dots, A_i$ d'un espace affine sont affinement indépendants ou que les vecteurs
$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3},\dots, \overrightarrow{A_1A_i}$
sont linéairement indépendants, ou encore que: pour r de 2 à i, le point A_r est extérieur au sous espace affine engendré par les points $A_1,\dots, A_{r-1}$.
2) Établir une relation simple entre repères affines et repères cartésiens.

Théorème 1 : Pour définir une application affine de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{F}$ il suffit de donner l'image d'un repère affine de $\mathfrak{E}$, image qui peut être choisie arbitrairement.
L'application obtenue est injective lorsque l'image du repère est un système de points affinement indépendants, bijective lorsque l'image est un repère affine.
En particulier le groupe affine de $\mathfrak{E}$ opère simplement transitivement sur l'ensemble des repères affines de $\mathfrak{E}$.
De la même manière une application affine est caractérisée par l'image d'un repère cartésien, image qui est constituée d'un point et de n vecteurs, qu'on peut choisir arbitrairement.

preuve> On sait qu'une application affine est définie par l'image d'un point et l'application linéaire qu'elle induit. Par ailleurs, une application linéaire est définie par l'image d'une base, image qui est un système de vecteurs choisi arbitrairement. Enfin, se donner l'image d'un repère affine, revient à se donner l'image du premier point A_0 et des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_i}$ pour i = 1, 2,..., n. ❑

Structure affine d'un espace vectoriel

Tout espace vectoriel $\mathfrak{E}$ est de manière naturelle un espace affine, en prenant $\overrightarrow{\mathfrak{E}} := \mathfrak{E}$, et pour la loi «externe», l'addition de $\mathfrak{E}$ (preuve immédiate).
Les sous espaces affines de $\mathfrak{E}$ sont alors les translatés des sous espaces vectoriels, et les sous espaces vectoriels sont les sous espaces affines passant par l'origine (preuve immédiate).
Si $\mathfrak{F}$ est un sous espace affine de $\mathfrak{E}$ l'espace des vecteurs de $\mathfrak{F}$ est l'unique translaté de $\mathfrak{F}$ passant par l'origine.
Lorsqu'on rajoute l'origine à une base d'un espace vectoriel, on obtient un repère affine pour la structure affine.
On appelle **forme affine** d'un espace affine $\mathfrak{E}$ une application affine de $\mathfrak{E}$ vers **K**.

Proposition 4 : Soit $\mathfrak{E}$ un espace vectoriel considéré comme espace affine.

a) Les applications linéaires de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{E}$ sont exactement les applications affines qui conservent l'origine.
b) Une application affine de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{E}$ s'écrit de manière unique comme composée d'une application linéaire suivie d'une translation.
c) Une forme affine sur $\mathfrak{E}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une forme linéaire et d'une constante.

Preuve laissée en exercice : utiliser la proposition 1 b).
Une situation affine naturelle est celle d'un hyperplan affine ne passant pas par l'origine dans un espace vectoriel.

Proposition 5 : Soit dans un espace vectoriel $\mathfrak{E}$ un hyperplan affine $\mathfrak{F}$ ne passant pas par l'origine :

a) Un système d'éléments de $\mathfrak{F}$ est affinement indépendant si et seulement si il est vectoriellement indépendant dans $\mathfrak{E}$.
b) Toute application linéaire ψ de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{E}$, avec $\psi(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}$, induit une application affine φ de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{F}$. L'application $\psi \mapsto \varphi$ est un isomorphisme du sous groupe de $\mathbf{GL}(\mathfrak{E})$ stabilisateur de $\mathfrak{F}$ sur le groupe affine de $\mathfrak{F}$.
c) De même toute forme linéaire sur $\mathfrak{E}$ induit une forme affine sur $\mathfrak{F}$, et on obtient ainsi un isomorphisme entre le dual linéaire de $\mathfrak{E}$ et le dual affine de $\mathfrak{F}$.

Preuve laissée en exercice : utiliser la proposition 1 b) et le théorème 1.

Hyperplans, dualité

Rappelons qu'une forme affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ vers **K**. On note $\mathcal{E}^\bullet$ l'ensemble des formes affines de $\mathcal{E}$. On appelle **noyau** d'une forme affine l'ensemble des points qui ont pour image 0. (on notera qu'on ne peut parler de noyau d'une application affine que lorsque l'espace d'arrivée est un espace vectoriel)

Théorème 2 :

a) Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension n, alors $\mathcal{E}^\bullet$ est un espace vectoriel de dimension n+1.

b) Le noyau d'une forme affine non constante est un hyperplan, et réciproquement. En outre les vecteurs de l'hyperplan affine forment un hyperplan vectoriel qui est le noyau de la forme linéaire induite par la forme affine.

c) Deux formes affines non constantes ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.

preuve> (a) Il est facile de voir que les formes affines constituent un espace vectoriel. La dimension résulte du fait que la forme est caractérisée par l'image d'un repère affine, image qui est un système de n+1 scalaires arbitraires.

(b) L'image d'une forme affine φ est un sous-espace affine de **K** donc un point (cas des formes constantes) ou **K** tout entier (formes non constantes). Dans ce cas, soit A un point du noyau, et ψ l'application linéaire induite par φ. Il est immédiat que :

$$\varphi(M) = 0 \Leftrightarrow \psi(\overrightarrow{AM}) = 0$$

Soit par ailleurs un hyperplan affine $\mathcal{F}$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ l'hyperplan vectoriel associé. On sait que $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est le noyau d'une forme linéaire ψ. Si A est un point de $\mathcal{F}$ on définit la forme affine φ sur $\mathcal{E}$ par $\varphi(M) = \psi(\overrightarrow{AM})$ et il est immédiat que son noyau est $\mathcal{F}$.

(c) Le *si* est évident. Pour le *seulement si*, considérer un repère affine de $\mathcal{F}$ et le compléter en un repère affine de $\mathcal{E}$. ❑

Proposition 6 : *(plongement canonique d'un espace affine dans son bidual).*

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $\mathcal{E}^\bullet$ son dual affine et $\mathcal{E}^{\bullet *}$ le dual vectoriel de $\mathcal{E}^\bullet$.

Pour M dans $\mathcal{E}$ considérons l'application θ_M de $\mathcal{E}^\bullet$ vers **K** définie par :

$$\theta_M(\varphi) = \varphi(M)$$

L'application $\theta : M \mapsto \theta(M) = \theta_M$ est une application affine injective de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}^{\bullet *}$ dont l'image est un hyperplan affine ne passant pas par l'origine.

preuve> On montre d'abord que, pour M fixé, l'application τ_M est linéaire: cela résulte de la définition de la structure vectorielle (addition et loi externe) sur $\mathcal{E}^\bullet$. Ensuite, on vérifie que l'application $M \mapsto \theta_M$ est affine: il est par exemple facile de voir qu'elle conserve les barycentres (et appliquer la proposition 2 de la section b)). On peut aussi donner une preuve directe :

$$\theta_{M+\vec{U}}(\varphi) = \varphi(M+\overrightarrow{U}) = \varphi(M) + \varphi(\overrightarrow{U}) = \theta_M(\varphi) + \varphi(\overrightarrow{U})$$

c.-à-d. $$\theta_{M+\vec{U}} = \theta_M + (\text{ la forme linéaire } \varphi \mapsto \varphi(\overrightarrow{U}))$$

le deuxième terme de la somme ne dépend pas de M (donc θ opère sur les vecteurs), et

$$\theta(\overrightarrow{U})(\varphi) = \varphi(\overrightarrow{U}),$$

ce qui montre que $\theta(\lambda \overrightarrow{U}) = \lambda\, \theta(\overrightarrow{U})$.

Elle est injective : si on a deux points distincts M et N, on peut construire un hyperplan qui passe par le premier et pas par le second, donc une forme affine qui s'annule sur le premier et pas sur le second, donc $\theta(M) \neq \theta(N)$. L'image de l'application $M \mapsto \theta_M$ est donc un sous espace affine de dimension n, donc un hyperplan affine de $\mathcal{E}^{\bullet *}$, et il est immédiat qu'il ne contient pas l'origine. ❑

Exercice 13 : *Somme directe de deux espaces affines*

Commentaire préalable : soient deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de dimensions n et m, si on cherche à construire la situation «la plus générale» dans laquelle ils sont sous-espaces d'un même espace affine, on sent qu'il ne faut leur supposer aucun point en commun, ce qui conduit à un espace engendré de dimension n+m+1.

a) Soit $\mathcal{H}$ le dual vectoriel du produit $\mathcal{E}^\bullet \times \mathcal{F}^\bullet$. Prouver les affirmations suivantes :
   Pour $M \in \mathcal{E}$ l'application $\theta_{1,M}$ de $\mathcal{E}^\bullet \times \mathcal{F}^\bullet$ vers $\mathbf{K}$ définie par $\theta_{1,M}(\varphi,\psi) = \varphi(M)$ est un élément de $\mathcal{H}$.
   L'application $\theta_1 : M \mapsto \theta_{1,M}$ est une application affine injective de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{H}$.
   On peut définir de la même manière une application affine injective θ_2 de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{H}$.
   Les sous-espaces $\theta_1(\mathcal{E})$ et $\theta_2(\mathcal{F})$ engendrent un sous-espace affine de $\mathcal{H}$, de dimension n+m+1. On le notera $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$.
b) En identifiant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ à des sous-espaces de $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ montrer qu'une application affine de $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ vers un espace affine arbitraire $\mathcal{K}$ est caractérisée par ses restrictions à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, lesquelles peuvent être choisies arbitrairement en tant qu'applications affines. Faites le lien avec la notion de repère affine.

b) Calculs dans les espaces affines

Quelques exemples et quelques modèles

Il y a au moins trois modèles naturels pour un espace affine de dimension n :
- l'espace $\mathcal{E}_n := \mathbf{K}^n$ muni de la structure affine déduite de la structure vectorielle produit.
- l'hyperplan affine $\mathcal{F}_n$ de $\mathbf{K}^{n+1}$ d'équation $x_{n+1} = 1$.
- l'hyperplan affine $\mathcal{H}_n$ de $\mathbf{K}^{n+1}$ d'équation $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1$.

Il est difficile de qualifier l'un de ces trois modèles de «standard». On passe du premier au second en rajoutant une coordonnée égale à 1, et vice versa. Dans le premier on a un repère cartésien canonique: l'origine, suivie de la base canonique. Dans le troisième on a un repère affine canonique : les points dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf une, égale à 1.

Le calcul sur les coordonnées

Préciser un repère cartésien $\mathfrak{R}$ dans un espace affine $\mathfrak{E}$ de dimension n revient à donner la bijection affine $\varphi_{\mathfrak{R}}$ qui envoie $\mathfrak{R}$ sur le repère canonique de $\mathfrak{E}_n$. Les coordonnées $(x_1, x_2,..., x_n)$ de M dans le repère $\mathfrak{R}$ ne sont rien d'autre que $\varphi_{\mathfrak{R}}(M)$. On écrit ceci sous la forme abrégée suivante :

$$M =_{\mathfrak{R}} (x_1, x_2,..., x_n)$$

Calculer sur les coordonnées revient donc à se placer dans le modèle $\mathfrak{E}_n$ d'espace affine de dimension n. En outre, pour résoudre certains problèmes, le choix judicieux du repère peut grandement faciliter les calculs. Il est enfin remarquable que beaucoup de calculs prennent une forme beaucoup plus agréable dans le modèle $\mathfrak{F}_n$ que dans le modèle $\mathfrak{E}_n$.

Nous laissons les résultats en exercices au lecteur. Ils doivent être connus comme des théorèmes. Ils sont énoncés en dimension 3, mais la généralisation serait immédiate.

Expression analytique d'une application affine

Exercice 1 : Une application affine φ de $\mathfrak{E}_3$ vers $\mathfrak{E}_3$ est de la forme suivante (où $M = (x_1,x_2,x_3) \Rightarrow \varphi(M) = (y_1,y_2,y_3)$) :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Explicitez les coefficients dans l'expression ci-dessus en fonction de φ. En déduire les résultats analogues concernant l'expression analytique d'une application affine dans un repère cartésien.

Exercice 2 : Une application affine φ de $\mathfrak{F}_3$ vers $\mathfrak{F}_3$ est de la forme suivante (où on a écrit les éléments de $\mathfrak{F}_3$ en colonne) :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comparer avec la proposition 5 b) de la section a).

Exercice 3 : Une application affine φ de $\mathfrak{H}_3$ vers $\mathfrak{H}_3$ est de la forme suivante (on a écrit les éléments de $\mathfrak{H}_3$ en colonne) :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{où}$$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$, $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$, $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$.

Après avoir lu le théorème 1 sur le calcul barycentrique, déduire les résultats analogues concernant l'expression analytique d'une application affine dans un repère affine.

Dépendance et indépendance affine

Exercice 4 :
Trois points $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$, $C = (c_1,c_2,c_3)$, de $\mathcal{E}_3$ sont alignés si et seulement si la matrice ci-contre est de rang strictement inférieur à 3 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :
Quatre points $A = (a_1,a_2,a_3)$, $B = (b_1,b_2,b_3)$, $C = (c_1,c_2,c_3)$, $D = (d_1,d_2,d_3)$ de $\mathcal{E}_3$ sont coplanaires si et seulement si la matrice ci-contre est de déterminant nul.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En déduire l'équation du plan passant par trois points non alignés.

Exercice 6 :
Trois points $A = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $B = (b_1,b_2,b_3,b_4)$, $C = (c_1,c_2,c_3,c_4)$, de $\mathcal{H}_3$ sont alignés si et seulement si la matrice ci-contre est de rang < 3 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Faire à l'exercice 5 ce que l'exercice 6 a fait à l'exercice 4

Le calcul barycentrique

Le calcul barycentrique est une variante du calcul vectoriel, adaptée à certaines situations affines.

Dans un espace affine $\mathcal{E}$ on appelle **point pondéré** un couple (A,a) où A est un point et a un élément de $\mathbf{K}$. On dit que a est la masse affectée à A. Étant donné un **système de points pondérés** $S = ((A_1,a_1),..., (A_m,a_m))$, on définit la **masse totale du système** comme la somme des a_i et on considère la fonction ψ_S de $\mathcal{E}$ vers $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ définie par :

$$\psi_S(M) = a_1 \overrightarrow{MA_1} + \cdots + a_m \overrightarrow{MA_m}$$

On a alors par un calcul vectoriel facile le résultat suivant :

Proposition et définition 1 : Si la masse totale du système est nulle $\psi_S(M)$ est un vecteur constant, qu'on note $a_1A_1+ \cdots + a_mA_m$. Sinon, il existe un point G unique vérifiant : pour tout M, $\psi_S(M) = (a_1 + \cdots + a_m) \overrightarrow{MG}$. Ce point G est appelé le **barycentre du système** S.

Il est immédiat que le barycentre G est dans le sous espace affine engendré par les A_i et, en cas de masse totale nulle que le vecteur constant $\psi_S(M)$ est un vecteur de ce sous-espace.

En cas de masse totale non nulle le barycentre G peut être caractérisé par : $\psi_S(G) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Lorsqu'on multiplie tous les coefficients d'un système pondéré de masse totale non nulle par une constante, le barycentre est inchangé.

Les trois propositions et le théorème qui suivent résultent de calculs vectoriels très simples laissés à la lectrice.

Proposition 2 : *(théorème d'associativité du barycentre)*
Soit S un système de points pondérés, juxtaposition disjointe de sous systèmes $S_1, \ldots, S_k$. Soit s_i la masse totale, supposée non nulle, du sous système S_i, et G_i son barycentre. Alors G est le barycentre du système $((G_1,s_1), \ldots, (G_k,s_k))$.

Proposition 3 : Une application d'un espace affine $\mathfrak{E}$ vers un espace affine $\mathfrak{F}$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.

Exercice 8 : Si le corps **K** a au moins 3 éléments, une application qui conserve les barycentres de tous les systèmes de deux points pondérés de masse totale non nulle est nécessairement affine.

Théorème 1 : Soit $\mathfrak{R} = (A_1, \ldots, A_{n+1})$ est un repère affine de $\mathfrak{E}$.
Si φ est la bijection affine de $\mathfrak{E}$ vers $\mathfrak{H}_{n+1}$ qui envoie le repère $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ sur le repère canonique de $\mathfrak{H}_{n+1}$ et si $\varphi(M) = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ alors M est le barycentre du système $((A_1,a_1), \ldots, (A_{n+1},a_{n+1}))$.
Tout point M de $\mathfrak{E}$ est barycentre de manière unique d'un système pondéré $((A_1,a_1), \ldots, (A_{n+1},a_{n+1}))$: les scalaires $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ ((n+1)-uple déterminé à un facteur multiplicatif près) sont appelés des coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $\mathfrak{R}$.

Une manière agréable de comprendre le calcul barycentrique est lorsque l'espace affine considéré est un sous espace affine d'un espace vectoriel :

Proposition 4 : Soit $\overrightarrow{\mathfrak{E}}$ un espace vectoriel, et $\mathfrak{F}$ un sous espace affine ne contenant pas l'origine. Soit $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$ le sous espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathfrak{E}}$ associé à $\mathfrak{F}$.
Soit $S = ((A_1,a_1), \ldots, (A_m,a_m))$ un système de points pondérés de $\mathfrak{F}$ et soit

$$A = a_1 A_1 + \ldots + a_m A_m \quad (\text{calculé dans } \overrightarrow{\mathfrak{E}})$$

Si la masse totale est nulle alors $A \in \overrightarrow{\mathfrak{F}}$ et est égal à $\psi_S(M)$ (indépendant de M).
Si la masse totale est égale à 1 alors A est le barycentre du système S.
Dans les autres cas A n'est ni dans $\mathfrak{F}$ ni dans $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$ mais la droite vectorielle passant par A coupe $\mathfrak{F}$ en le barycentre du système.

Remarque importante On notera que dans un cadre comme celui de la proposition 4 on peut calculer avec les points de *l'espace affine* $\mathfrak{F}$ selon les règles du *calcul vectoriel* ordinaire. Certaines écritures $a_1 A_1 + \ldots + a_m A_m$ représentent des points de $\mathfrak{F}$, d'autres des vecteurs de $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$, et d'autres encore des objets ni dans $\mathfrak{F}$ ni dans $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$, mais qui peuvent être manipulés légitimement. Ils représentent des «intermédiaires de calcul» qui facilitent le travail. On pourra se convaincre par exemple que dans ce cadre, le théorème d'associativité des barycentres n'est rien d'autre que du calcul vectoriel ordinaire. Aussi la proposition 6 de la section a) est utile dans la mesure où elle donne une manière canonique de se ramener à une situation telle que celle de la proposition 4.

c) Le groupe affine

On a déjà vu (cf. exercices en dimension 3) que le groupe affine de $\mathcal{H}_n$ ou celui de $\mathcal{F}_n$ s'identifient à des sous-groupes du groupe des matrices **GL**(n+1,**K**).
Nous allons donner maintenant quelques exemples d'applications affines et établir deux théorèmes structurels.
Dans cette section, $\mathcal{E}$ est toujours un espace affine de dimension n sur le corps **K**.

Proposition 1 : Si une transformation φ de $\mathcal{E}$ vérifie :

pour toute droite Δ l'image $\varphi(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ

alors φ est une homothétie-translation

preuve> identique à celle donnée dans le cas du plan affine réel ❑

Proposition 2 : Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$ et ψ la bijection linéaire qu'elle induit sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Alors φ admet exactement un point fixe si et seulement si ψ admet $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ pour seul vecteur fixe (c.-à-d. : 1 n'est pas valeur propre de ψ)

preuve> petit calcul vectoriel immédiat ❑

La notion d'affinité de rapport k par rapport à un hyperplan affine dans la direction d'une droite sécante se laisse définir comme dans le cas du plan affine réel.

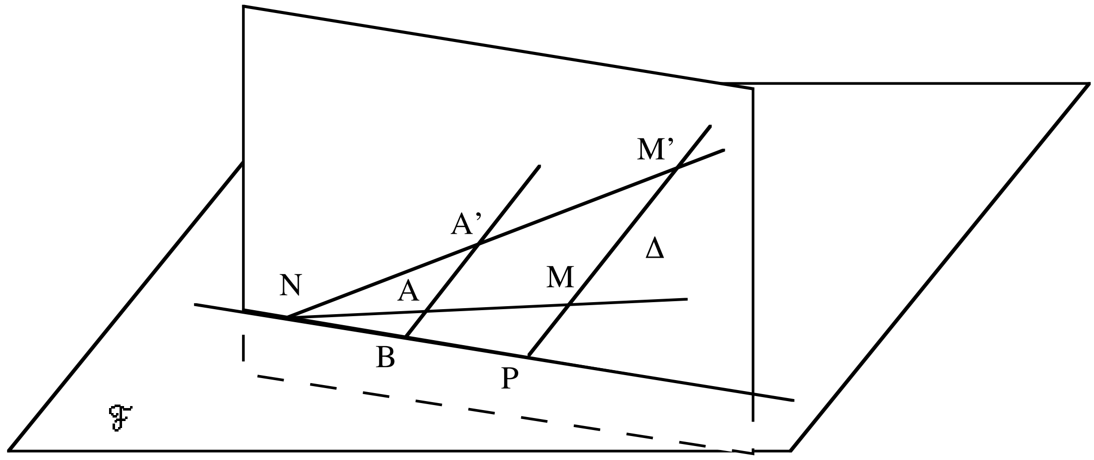
Proposition 3 : *(affinités et transvections).* On suppose que le corps **K** admet au moins trois éléments. Soit $\mathcal{F}$ une hyperplan de $\mathcal{E}$, noyau d'une forme affine φ. Soit σ une transformation de $\mathcal{E}$ qui fixe tous les points de $\mathcal{F}$ et qui transforme toute droite en une droite. Alors σ est une transformation affine de $\mathcal{E}$. Si son déterminant est égal à 1 il existe un vecteur $\overrightarrow{U}$ de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ tel que l'on ait:

$$\sigma(M) = M + \varphi(M).\overrightarrow{U} \qquad \text{pour tout } M,$$

on dit alors que σ est une **transvection** d'hyperplan $\mathcal{F}$.
Sinon, σ est une **affinité** de rapport $\det(\sigma)$ par rapport à l'hyperplan $\mathcal{F}$ dans la direction d'une droite sécante.

preuve> On commence par vérifier que la formule donnée pour une transvection définit bien une transformation affine et que cette transformation vérifie (si $\overrightarrow{U}$ non nul) : la droite joignant M (extérieur à $\mathcal{F}$) à son transformé est parallèle à $\mathcal{F}$. On en vient ensuite au vif du sujet.
Puisque σ transforme une droite en une droite et que le corps admet au moins trois éléments, elle transforme un plan en un plan. On en déduit qu'elle transforme deux droites parallèles (coplanaires non sécantes) en deux droites parallèles. On considère alors A en

dehors de $\mathfrak{F}$ et la transformation affine τ qui fixe un repère affine de $\mathfrak{F}$ et qui envoie A en $\sigma(A) = A'$. Il est facile de vérifier que τ est une affinité ou une transvection, selon que (AA') est sécante de $\mathfrak{F}$ ou parallèle à $\mathfrak{F}$.
Quitte à composer σ et τ avec une affinité de rapport $k \neq 1$ (le corps a au moins trois éléments) on peut supposer désormais que (AA') coupe $\mathfrak{F}$ en un point B.
Remarquons que la droite (AA') est fixe par σ puisque l'image de (AB) est (A'B). On en déduit que toute parallèle à (AA') est fixe par σ puisqu'elle est transformée en une parallèle à (AA') donc à elle-même, et qu'elle a un point fixe : son intersection avec $\mathfrak{F}$.



Soit maintenant un point M tel que (AM) coupe $\mathfrak{F}$, en un point N. On va montrer que $\sigma(M) = \tau(M)$. En effet (AM) = (AN) a pour transformée (A'N) aussi bien par τ que par σ et si Δ est la parallèle à (AA') passant par M, elle est fixe aussi bien par τ que par σ. Les points $\sigma(M)$ et $\tau(M)$ sont confondus puisque à l'intersection de Δ et (A'N). Il est maintenant facile de conclure. ❑

Exercice 1 : Montrer que les transvections d'hyperplan $\mathfrak{F}$ forment un groupe commutatif isomorphe à $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$. Décrire la structure du groupe des transformations affines qui fixent tous les points de $\mathfrak{F}$ sous forme d'un produit semi-direct, le sous-groupe distingué étant celui des transvections.

Théorème 1 : *(symétries)* Supposons que dans le corps **K** on ait $2 \neq 0$. Soit σ une transformation affine de $\mathfrak{E}$, de carré l'identité. Alors il existe un sous espace affine $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{E}$ et une direction $\overrightarrow{\mathfrak{H}}$, sous espace supplémentaire de $\overrightarrow{\mathfrak{F}}$ dans $\overrightarrow{\mathfrak{E}}$, tels que σ soit la symétrie par rapport à $\mathfrak{F}$ dans la direction $\overrightarrow{\mathfrak{H}}$.

preuve> Si M est un point arbitraire avec $\sigma(M) = N$, le milieu de MN est fixe par σ. On est donc ramené au cas classique d'une bijection linéaire dont le carré est l'identité. ❑

On notera que l'identité de $\mathfrak{E}$ peut être vue comme la symétrie par rapport à $\mathfrak{E}$ dans la direction de $\overrightarrow{\mathbf{0}}$, et qu'une symétrie point admet pour direction l'espace tout entier.

Théorème 2 : Toute transformation affine de $\mathfrak{E}$ de déterminant 1 est un produit de transvections. Toute transformation affine de déterminant $\neq 1$ peut être décomposée en un produit de transvections et d'une affinité. Si la caractéristique du corps **K** est différente de 2, toute transformation affine de déterminant ± 1 est un produit de symétries obliques.

preuve> Il suffit de traiter le cas où le déterminant est supposé égal à 1. Il s'agit de transformer, par une succession de transvections, un repère affine donné $\mathfrak{R}$ en un autre repère affine donné $\mathfrak{R}'$. On s'arrange pour que les transformés successifs $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, etc... du premier repère aient de plus en plus de points communs avec $\mathfrak{R}'$. Il suffit pour cela d'établir le lemme ci après. ❑

Lemme Soit E un espace affine de dimension n. Soit F un sous espace de dimension $\leq n-2$. Soient A et B deux points en dehors de F. Si le sous-espace A + F ne contient pas le point B, il existe un hyperplan H contenant F et une transvection d'hyperplan H qui envoie A en B. Sinon, on peut trouver deux transvections qui fixent les points de F et dont le produit envoie A en B.

Exercice 2 : Donnez la preuve détaillée du lemme, puis celle du théorème 2. Étudiez la stabilité de ces résultats. Par exemple, démontrez en dimension 2 qu'une transformation affine de déterminant 1 se laisse toujours décomposer *de manière stable* en un produit de trois transvections (cela signifie que si on ne perturbe pas beaucoup la transformation, une décomposition en un produit de trois transvections voisines des précédentes peut être construite). De même, une isométrie directe d'un plan euclidien se laisse toujours décomposer de manière stable en un produit de quatre symétries orthogonales.

Exercice 3 : Démontrer l'analogue des théorèmes structurels 1 et 2 dans le chapitre 2 section f).

d) Espaces affines réels et complexes

Généralités

Tout espace affine complexe $\mathcal{E}$ de dimension n est de manière naturelle un espace affine réel de dimension 2n, et toute application $\mathbb{C}$-affine φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-affine. En outre l'application :

$$\tau : \overrightarrow{U} \mapsto i.\overrightarrow{U}$$

est alors une application $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant $\tau^2 = -I$. Enfin une application $\mathbb{R}$-affine φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ est $\mathbb{C}$-affine si et seulement si elle vérifie :

$$\varphi(\tau(\overrightarrow{U})) = \tau(\varphi(\overrightarrow{U})) \text{ pour tout } \overrightarrow{U}$$

Inversement si, dans un espace affine réel, on a donné une application linéaire $\overrightarrow{U} \mapsto \tau(\overrightarrow{U})$ vérifiant $\tau^2 = -I$, alors il y a exactement une structure affine complexe compatible avec la structure affine réelle et vérifiant : $\tau(\overrightarrow{U}) = i.\overrightarrow{U}$.

Les sous espaces $\mathbb{C}$-affines sont exactement les sous espaces $\mathbb{R}$-affines stables par τ. On notera que si $e_1,..., e_n$ est une base de l'espace vectoriel complexe $\vec{\mathcal{E}}$, alors e_1, $i.e_1,..., e_n$, $i.e_n$ est une base de l'espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$ et que la matrice de τ sur cette base est une matrice «diagonale par bloc» avec des blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur la diagonale.

Topologie d'un espace affine réel

Les transformations affines de $\mathbb{R}^n$ sont des applications uniformément continues. Il s'ensuit que si l'on transporte la topologie de $\mathbb{R}^n$ sur un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension n au moyen d'une bijection affine arbitraire, la topologie obtenue ne dépend pas de la bijection affine choisie. L'espace affine réel $\mathcal{E}$ a donc une topologie naturelle bien définie. Par le même raisonnement on voit que sont bien définies des notions telles que :

– application uniformément continue d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ vers un espace affine réel, ou vers un espace métrique arbitraire.
– application différentiable d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ vers un espace affine réel $\mathcal{F}$
– application $\mathcal{C}^\infty$ d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ vers un espace affine réel $\mathcal{F}$
– application analytique d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ vers un espace affine réel $\mathcal{F}$

Notez qu'avec un corps de base commutatif quelconque, on peut définir sans ambiguïté, pour les mêmes raisons, des notions telles que :

– fonctions polynomes sur un espace affine $\mathcal{E}$ (à valeurs dans le corps de base)
– applications polynomiales d'un espace affine $\mathcal{E}$ vers un espace affine $\mathcal{F}$

Orientation d'un espace affine réel

Dans un espace affine réel on a une notion de transformation affine **directe** et de transformation affine **indirecte**, selon que le signe du déterminant de l'application linéaire associée est >0 ou <0. Cette notion est conforme à l'intuition en ce sens qu'on a les résultats suivants :

Proposition 1 :

a) Une symétrie par rapport à un hyperplan est une transformation affine indirecte.
b) Une affinité de rapport >0 est une transformation affine directe.
c) Les transformations affines directes forment la composante connexe (et connexe par arc) de l'élément neutre dans le groupe affine.

preuve> Le (a) et le (b) sont immédiats. Avant de traiter le (c) remarquons que la topologie du groupe **Aff**($\mathcal{E}_n$) vu comme sous espace métrique de $\mathbb{R}^{n.(n+1)}$ est conservée par les automorphismes intérieurs. Cela implique que cette topologie peut être transportée sur le groupe affine de $\mathcal{E}$, espace affine réel de dimension n arbitraire. Pour traiter le c) on peut alors se placer dans la situation standard où $\mathcal{E}$ est l'espace $\mathcal{E}_n$. Le c) signifie que les transformations affines directes sont celles qui proviennent de l'identité par «déformation continue». Pour le démontrer on commence par remarquer que les transformations affines directes et indirectes sont déconnectées parce que la fonction «déterminant de l'application linéaire associée» est une fonction continue. Il suffit ensuite de se convaincre qu'une transformation affine directe est dans la composante connexe par arc de l'élément neutre. On voit d'abord facilement qu'une transvection ou une affinité de rapport > 0 se laisse déformer continûment en l'identité (faire varier continûment le rapport de l'affinité). Enfin, on conclut en remarquant qu'une transformation affine directe se laisse décomposer en un produit de transvections et d'affinités de rapport > 0. (cf. le théorème 2 de la section c)) ❑

Définition On dit que deux repères cartésiens d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ ont **même orientation** lorsque la transformation affine qui envoie le premier sur le second est directe. Sinon, on dit qu'ils sont d'orientation opposée. On dit qu'**on a orienté un espace affine réel** lorsqu'on a choisi l'une des deux classes d'équivalence pour la relation «avoir la même orientation que», les repères cartésiens de cette classe d'équivalence étant appelés directs.

Droite affine complexe

Nous allons voir qu'une droite affine complexe est grosso modo la même chose qu'un plan euclidien.

Définition On appelle **plan euclidien sans unité de longueur**, un plan réel affine muni d'une relation d'orthogonalité entre droites, cette relation d'orthogonalité pouvant être définie comme celle associée à un produit scalaire.

On peut dire aussi qu'il s'agit d'un plan euclidien dans lequel on a oublié l'unité de longueur mais où on se souvient des rapports de longueur. Un plan euclidien orienté sans unité de longueur admet pour «isomorphismes» les similitudes directes (d'un plan euclidien obtenu en fixant l'unité de longueur).

Théorème 1 : Sur un ensemble $\mathcal{E}$ il revient exactement au même de se donner une structure de plan euclidien orienté sans unité de longueur, ou une structure de droite affine complexe.

preuve> Si on a une structure de plan euclidien orienté sans unité de longueur sur $\mathcal{E}$, le quart de tour positif est une application linéaire bien définie sur les vecteurs. Cela permet de définir une structure d'espace vectoriel complexe sur l'espace $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ on obtient une droite affine complexe (détails laissés au lecteur). Inversement, si on a une structure de droite affine complexe sur $\mathcal{E}$ on peut définir l'orthogonalité de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ en disant que leur rapport est un imaginaire pur. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi une structure de plan euclidien sans unité de longueur. Par ailleurs, l'orientation de $\mathcal{E}$ est obtenue en définissant le quart de tour vectoriel positif comme la multiplication par i.

❑

Ainsi les similitudes planes directes ne sont rien d'autre que les bijections affines complexes en dimension 1.
Cela jette un jour nouveau sur le théorème affirmant que le groupe des similitudes planes directes (d'un plan réel euclidien) est exactement 2 fois transitif : c'est un phénomène plus général pour tous les groupes affines en dimension 1.

Complexification d'un espace affine réel

Il est souvent tout à fait utile de «rajouter des points imaginaires» à un espace affine réel, pour les mêmes raisons qui font qu'il est utile d'avoir à sa disposition des nombres imaginaires. Il y a un procédé de construction automatique pour cela, que nous décrivons brièvement. Les preuves n'offrent aucune difficulté.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension n et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel associé. Le complexifié de l'espace vectoriel réel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ peut être vu comme l'espace réel $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur lequel on définit une loi externe «multiplication par un scalaire complexe» :

$$\mathbb{C} \times (\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} : (a+ib, (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})) \longmapsto (a\overrightarrow{U} - b\overrightarrow{V}, b\overrightarrow{U} + a\overrightarrow{V})$$

On obtient ainsi un espace vectoriel complexe de dimension n. Si on identifie $\overrightarrow{U}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ avec le couple $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{\mathbf{0}})$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ on a alors

$$(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{U} + i\,\overrightarrow{V}.$$

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ et on fait opérer sur cet ensemble l'espace complexe $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ par :

$$(\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}) \times (\overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$$
$$((A, \overrightarrow{W}), (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})) \longmapsto (A + \overrightarrow{U}, \overrightarrow{W} + \overrightarrow{V})$$

On obtient ainsi une structure d'espace affine complexe de dimension n sur $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$. On peut identifier $\mathcal{E}$ a un sous espace réel de $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ au moyen de l'injection canonique : $A \longmapsto (A, \overrightarrow{\mathbf{0}})$. On a alors : $(A, \overrightarrow{V}) = A + i\,\overrightarrow{V}$.
En outre l'indépendance affine pour des points de $\mathcal{E}$ est la même notion, qu'on considère les scalaires comme étant réels ou complexes. En particulier, un repère affine réel de $\mathcal{E}$ est aussi un repère affine complexe du complexifié $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Enfin, tout point du complexifié peut être défini comme barycentre à coefficients complexes de points «réels», c.-à-d. de points de $\mathcal{E}$.

e) Relations d'incidence dans l'espace affine en dimension 3 : géométrie affine synthétique

Cette section est consacrée aux conséquences qui peuvent être tirées des relations d'incidence entre points, droites et plans dans l'espace réel affine.

Le résultat spectaculaire est que les seules relations d'incidence les plus immédiates suffisent à reconstruire entièrement la structure d'espace affine, mais avec un corps des scalaires arbitraire. Autrement dit, la structure «très algébrique» de corps est cachée dans la structure «très géométrique» attachée aux points, droites et plans de l'espace avec leurs relations d'incidence. Ce phénomène ne se produit pas de manière aussi spectaculaire en dimension 2 parce que dans ce cadre, il serait nécessaire de rajouter les axiomes correspondants aux figures des triangles translatés et des triangles homothétiques.

Cette section peut être considérée comme une réécriture «concrète» du très beau traitement «abstrait» de la même question qu'on trouve dans le livre d'Emil Artin.

Axiomes d'incidence dans l'espace affine

Les objets définissant la structure d'incidence

Nous supposons donc donnée une structure mathématique par les éléments suivants :

- un ensemble de points $\mathfrak{E}$, un ensemble de droites $\mathfrak{D}$ et un ensemble de plans $\mathfrak{P}$
- une relation binaire entre points et plans, dite relation d'incidence, qui se lira : le point M est dans le plan Π (ou : le plan Π passe par le point M)
- une relation d'incidence entre points et droites, qui se lira : le point M est sur la droite Δ
- une relation d'incidence entre droites et plans, qui se lira : la droite Δ est dans le plan Π

Les axiomes d'incidence

Comme nous désirons que ça ressemble à notre vision intuitive de l'espace où nous sommes, nous demanderons que soient vérifiés les axiomes suivants :

A0 : Il existe quatre points non coplanaires

A1 : Si M est sur Δ et si Δ est dans Π, alors M est dans Π

A2 : Par deux points distincts il passe exactement une droite

A3 : Par trois points non alignés, il passe exactement un plan

A4 : Si une droite a deux points dans un plan, elle est dans le plan

A5 : deux plans distincts qui ont en commun un point ont également une droite en commun (on dit qu'ils se coupent)

Définitions pour le parallélisme, le postulat d'Euclide

- deux plans sont dits parallèles s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point en commun
- deux droites sont dites parallèles si elles sont confondues ou si elles sont dans un même plan et n'ont aucun point en commun
- une droite est dite parallèle à un plan Π si elle est dans Π ou si elle n'a aucun point commun avec Π

droite parallèle à un plan

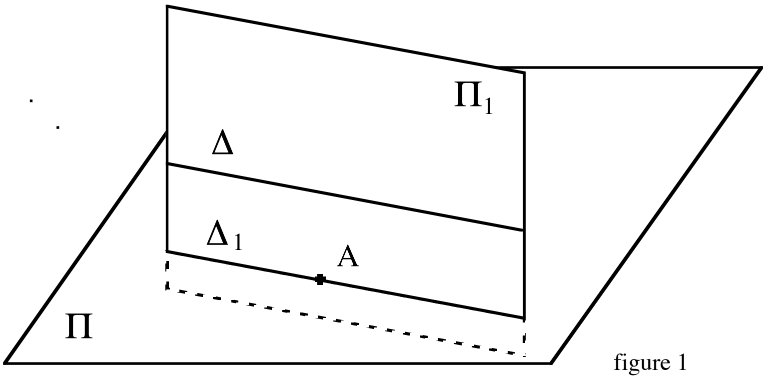


figure 1

Si une droite Δ extérieure à un plan Π est parallèle à Π et si A est un point de Π, il résulte des axiomes précédents qu'il y a exactement un plan Π_1 contenant A et Δ, que $\Pi \cap \Pi_1$ se coupent selon une droite Δ_1 et que Δ et Δ_1 sont parallèles.

Nous pouvons maintenant énoncer l'axiome correspondant au postulat d'Euclide.

A6 : Par un point extérieur à une droite il passe exactement une parallèle à cette droite

Le théorème fondamental

Le but de la section e) est de démontrer le théorème suivant :

Théorème Si on a une structure définie comme précédemment qui vérifie les axiomes A0 $\longrightarrow$ A6 il existe un corps (non nécessairement commutatif) **K**, un espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension 3 sur ce corps, et un isomorphisme entre la structure donnée et la structure analogue de $\vec{\mathcal{E}}$ définie par :

- les points sont les éléments de $\vec{\mathcal{E}}$
- les droites sont les translatés droites vectorielles de $\vec{\mathcal{E}}$
- les plans sont les translatés des plans vectoriels de $\vec{\mathcal{E}}$
- la relation d'incidence est la relation d'appartenance ou d'inclusion

L'idée générale de la preuve est la suivante. En dimension 3 les axiomes d'incidence (y compris le parallélisme) impliquent que la figure des triangles translatés et celle des triangles homothétiques sont valables. Or la figure des triangles translatés permet de définir le groupe des translations, et celle des triangles homothétiques permet de définir le groupe des homothétie-translations. Comme la structure affine est basée sur ces deux groupes, on a gagné. Un scalaire non nul sera défini comme un rapport d'homothétie, c.-à-d. comme un élément du groupe quotient des homothétie-translations modulo les translations.

Le groupe des translations

Premiers résultats sur le parallélisme

Proposition 1 : Soient Δ_1, Δ_2 deux droites sécantes d'un plan Π et parallèles à un plan Π', alors Π' est parallèle à Π.

preuve> Soit A le point commun à Δ_1 et Δ_2. Si A est dans Π', Δ_1 et Δ_2 sont dans Π', donc $\Pi' = \Pi$. Si A est extérieur à Π', supposons que Π' coupe Π selon une droite Δ. La droite Δ coupe forcément Δ_1 ou Δ_2 puisque Δ_1 et Δ_2 sont sécantes et que les 3 droites sont dans Π'. Si par exemple Δ coupe Δ_1 en A_1, alors Δ_1 coupe Π' en A_1. ❏

Proposition 2 : Par un point A extérieur à un plan Π, il passe exactement un plan Π' parallèle à Π.

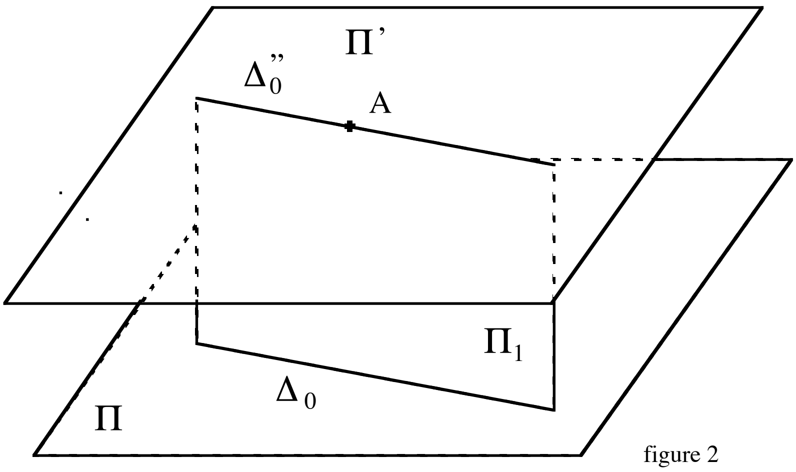


figure 2

preuve> L'existence résulte de la proposition 1 et de l'axiome A6. Voyons l'unicité : soit Δ_0 une droite de Π. Le plan (A,Δ_0) contient exactement une parallèle Δ'_0 à Δ_0 passant par A. Or Π' coupe (A,Δ_0) selon une droite Δ''_0, qui ne peut couper Δ_0, on a donc $\Delta''_0 = \Delta'_0$. Le plan Π' contient donc toute parallèle passant par A à une droite de Π : ceci assure l'unicité. ❑

Proposition 3 : Si 2 plans Π_1 et Π_2 contiennent respectivement les droites Δ_1 et Δ_2 parallèles, et s'ils se coupent, leur intersection Δ est parallèle à Δ_1 et Δ_2.

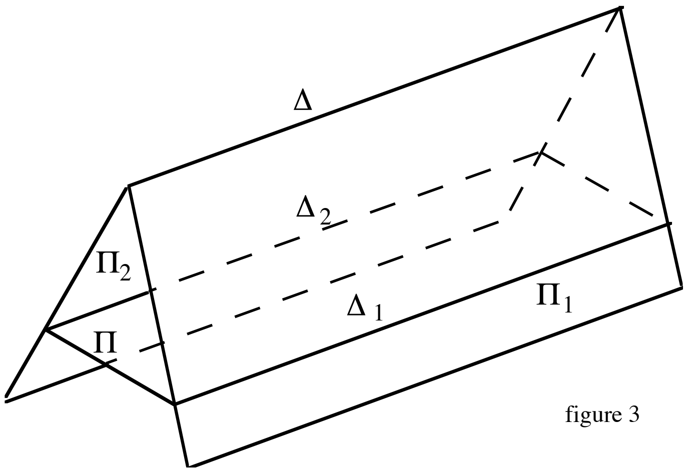


figure 3

preuve> Soit Π le plan défini par Δ_1 et Δ_2. Si Δ_1 et Δ ont un point commun A, alors : $\Pi_2 = (\Delta_2,A) = \Pi$ (puisque $A \notin \Delta_2$), donc Π_2 et Π_1 ont la droite Δ_1 en commun, donc $\Delta_1 = \Delta$. De même si Δ_2 et Δ ont un point en commun, alors $\Delta_2 = \Delta$. Dans tous les cas Δ est donc parallèle à Δ_1 et Δ_2.

❑

Proposition 4 : Le parallélisme est une relation d'équivalence entre droites. Le parallélisme est une relation d'équivalence entre plans.

preuve > Réflexivité et symétrie sont évidentes. Voyons la transitivité dans le cas des plans : soient Π_1 et Π_2 deux plans parallèles à un même troisième Π. Si Π_1 et Π_2 ont un point en commun, ils sont confondus (proposition 2). Sinon ils sont parallèles et distincts.

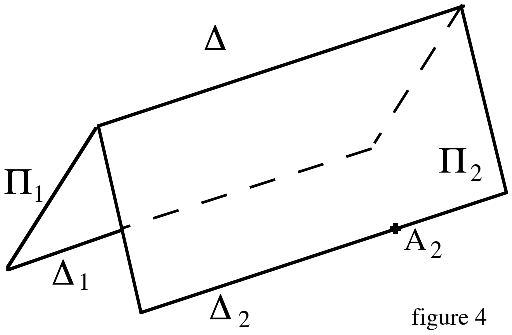


figure 4

Voyons maintenant la transitivité dans le cas des droites : soient Δ_1 et Δ_2 deux droites parallèles à une même troisième Δ (la difficulté consiste à montrer que Δ_1 et Δ_2 sont coplanaires).
Si les trois droites ne sont pas distinctes, c'est terminé. Supposons donc les trois droites distinctes. Soit Π_1 le plan déterminé par Δ_1 et Δ, - Π_2 le plan déterminé par Δ_2 et Δ, A_2 un point de Δ_2. Le plan (Δ_1,A_2) et le plan Π_2 contiennent respectivement les droites Δ_1 et Δ parallèles, et ils se coupent puisqu'ils ont A_2 en commun. Donc (proposition 3) leur intersection est une droite parallèle à Δ_1 et Δ.
❑

Proposition 5 : Soient ABCD et CDEF deux parallélogrammes. Alors ABFE est un parallélogramme (on suppose les droites (AB) et (EF) distinctes).

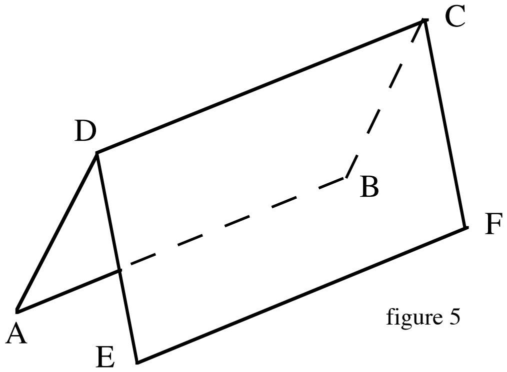


figure 5

preuve> *1^er cas* : Les trois parallèles (AB), (CD) et (EF) ne sont pas coplanaires. Le plan (ADE) et le plan (BCF) sont donc distincts Le plan (BCF) contient les droites (BC) et (CF) parallèles à (ADE), il est donc parallèle à (ADE). Le plan (ABFE) coupe les deux plans parallèles (ADE) et (BCF) selon les deux droites (AE) et (BF) qui sont donc parallèles. *2^ème cas* : Les trois parallèles (AB), (CD) et (EF) sont coplanaires. Construisons un parallélogramme ABGH dont le plan coupe Π (plan commun à A, B, C, D, E, F)

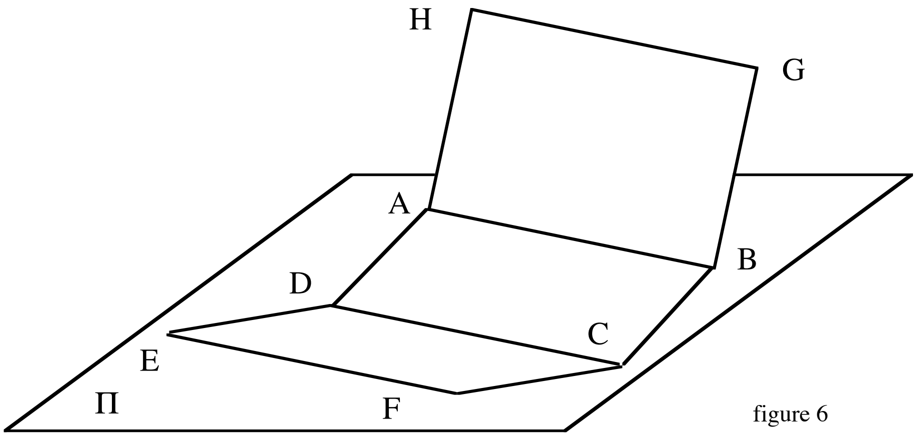


figure 6

Par applications successives du 1^er cas à des parallélogrammes convenables nous obtenons :
CDHG est un parallélogramme (utiliser ABCD et ABGH), puis : EFGH est un parallélogramme (utiliser CDHG et CDEF), puis : ABFE est un parallélogramme (utiliser EFGH et ABGH)

En 1^ère lecture on peut passer directement à la proposition 8.

Construction des translations

Proposition 6 : *(construction des translations)*

Soient A, A' deux points de l'espace $\mathcal{E}$. Il existe une et une seule transformation τ de $\mathcal{E}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

– τ (A) = A'
– pour toute droite Δ, $\tau(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ
– si τ(M) = M', alors les droites (MM') et (AA') sont parallèles

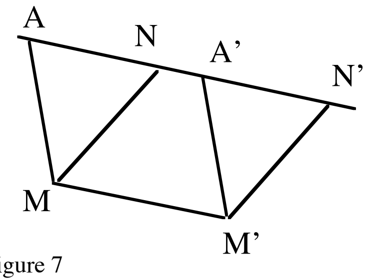


figure 7

preuve> Démontrons d'abord *l'unicité* de τ(M).
Si M est en dehors de la droite (AA'), on construit le parallélogramme AA'M'M, et on a nécessairement τ(M) = M'. Si N est sur la droite AA', on construit un parallélogramme MM'N'N, où M et M' ont été précédemment construits, et on a nécessairement τ(N) = N'.

Existence de τ : Nous définissons τ(M) = M' par la construction précédente lorsque M n'est pas sur (AA'). Lorsque N est sur (AA') nous allons prouver que le point N' construit précédemment ne dépend pas du choix de M. En effet si N' a été construit en utilisant M et M' et si on regarde ce qui se passe avec P et P', on voit, par applications répétées de la proposition 5, que MM'P'P est un parallélogramme («en passant par» AA'), puis que NPP'N' est un parallélogramme («en passant par» MM'). Il reste à montrer que τ ainsi définie, vérifie les propriétés de parallélisme demandées. Or on a bien (MP) parallèle à (M'P'), avec τ(M) = M', τ(P) = P', par application de la proposition 5. ❏

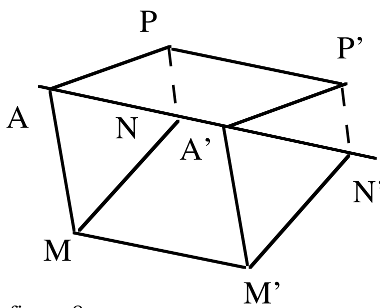


figure 8

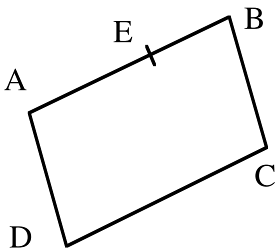
Note : La preuve ci-dessus montre en fait l'équivalence des 2 propriétés suivantes : «existence des translations» (affirmée par la proposition 6) et «figure des 3 parallélogrammes» (proposition 5).

Proposition 7 : Les translations forment un groupe de transformations commutatif

preuve> Il est clair que si on compose la translation τ qui envoie A en B et la translation τ' qui envoie B en C, on obtient une transformation τ'' qui vérifie les propriétés demandées :

– l'image d'une droite reste une droite parallèle
– si τ(M) = N, τ'(N) = P, alors les droites (AC) et (MP) sont parallèles (proposition 5).

Il reste à montrer que le groupe est commutatif.



Notons τ_{AB} la translation de A à B. Si A, B, C sont non alignés on a un parallélogramme ABCD avec :

$$\tau_{AB} \circ \tau_{BC}\,(A) = \tau_{AB}(D) = C, \text{ et } \tau_{BC} \circ \tau_{AB}\,(A) = \tau_{BC}(B) = C.$$

Or des translations qui donnent la même image C d'un point A sont égales : cela montre : $\tau_{AC} = \tau_{BC} \circ \tau_{AB} = \tau_{AB} \circ \tau_{AC}$ (*)

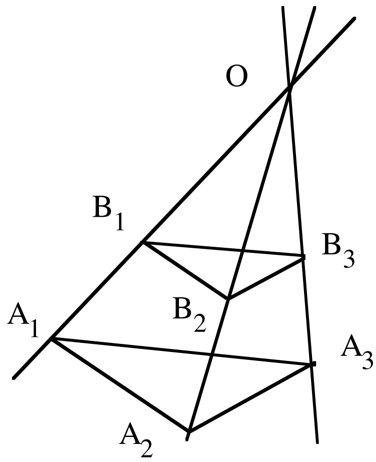
Si maintenant A, B, E sont alignés, on considère un point C extérieur à la droite (AB) et on utilise la relation (*) dans le cas «non aligné» plusieurs fois de suite :

$$\tau_{AB} \circ \tau_{BE} = \tau_{AB} \circ (\tau_{BC} \circ \tau_{CB}) \circ \tau_{BE} = (\tau_{AB} \circ \tau_{BC}) \circ (\tau_{CB} \circ \tau_{BE}) = \tau_{AC} \circ \tau_{CE} = \tau_{AE}$$

Par ailleurs $\tau_{BE} \circ \tau_{AB} = \tau_{AE}$ ❑

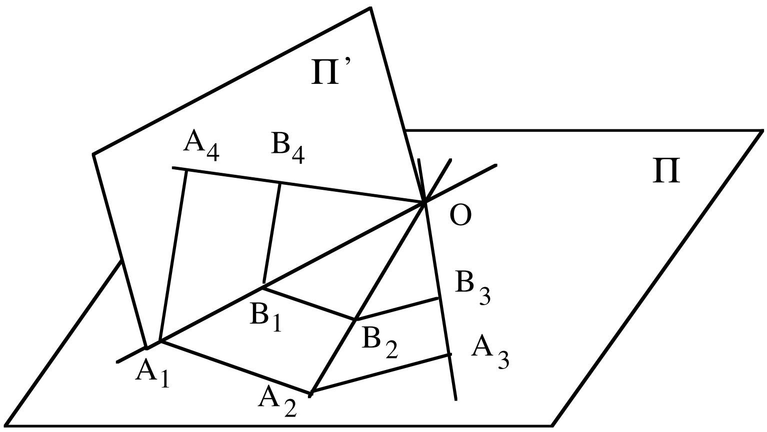
Le groupe des homothétie-translations

Construction des homothéties



Proposition 8 : Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 3 droites concourantes et sur Δ_i deux points A_i et B_i distincts. On suppose que $(A_1A_2) // (B_1B_2)$ et $(A_2A_3) // (B_2B_3)$. Alors $(A_1A_3) // (B_1B_3)$.

preuve> Si A_1, A_2, A_3 sont alignés c'est évident sinon on considère deux cas. 1[er] cas : Les 3 droites ne sont pas coplanaires. Les plans $(A_1A_2A_3)$ et $(B_1B_2B_3)$ sont donc distincts. Ils sont parallèles puisque $(A_1A_2) // (B_1B_2)$ et $(A_2A_3) // (B_2B_3)$. Ils coupent donc le plan $(0A_1A_3)$ selon 2 droites parallèles.



2[ème] cas : Les 3 droites sont coplanaires. Soit Π' un plan coupant le plan des 3 droites selon Δ_1. Soit Δ_4 une droite de Π' concourante avec Δ_1, Δ_2, Δ_3. Menons dans Π' 2 parallèles (A_1A_4) et (B_1B_4). Par applications successives du 1[er] cas on obtient les parallélismes suivants : $(A_4A_2) // (B_4B_2)$, puis $(A_4A_3) // (B_4B_3)$, puis $(A_1A_3) // (B_1B_3)$. ❑

Proposition 9 : *(homothéties)*

Soient A, A', B, B' quatre points de l'espace avec

– (AA') coupe (BB') en I

– (AB) / / (A'B')

Alors il existe une et une seule transformation η de l'espace vérifiant :

– η(A) = A', η(B) = B' et
– pour toute droite Δ, $\eta(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ.

Cette transformation est appelée une homothétie de centre I. Le point I se trouve sur toute droite (MM') pour M' = η(M), M $\neq$ I.

preuve> La démonstration de la proposition 9 à partir de la proposition 8 est essentiellement la même que celle de la proposition 6 à partir de la proposition 5 : nous la laissons en exercice. ❑

Remarques

1) On peut donc définir les homothéties avant même d'avoir parlé de rapport d'homothétie, uniquement en se basant sur les relations d'incidence dans l'espace entre points, plans et droites.
2) Il est par contre impossible de démontrer la commutativité du groupe des homothéties de centre I en se basant uniquement sur les relations d'incidence dans l'espace (de A0 à A6).

En regroupant les propositions 6 et 9, on obtient :

Proposition 10 : Si A, A', B, B' sont quatre points de l'espace avec (AB) / / (A'B'), il existe exactement une transformation η de l'espace, vérifiant :

– η(A) = A', η(B) = B' et
– pour toute droite Δ, $\eta(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ.

Si (AA') / / (BB'), alors η est une translation.

Si (AA') coupe (BB') en I, alors η est une homothétie de centre I.

preuve> Le cas où (AA') coupe (BB') est l'objet de la proposition 9.
Si (AA') est parallèle à (BB') la proposition 6 prouve l'existence d'une translation ayant les propriétés requises, et l'unicité se démontre comme suit :
– si M est en dehors de (AB) alors la parallèle Δ'_1 à (AM) passant par A' et la parallèle Δ'_2 à (BM) passant par B' se coupent en M', et on a nécessairement η(M) = M' ; or M' = $\tau_{AA'}$(M)
– si N est sur (AB), alors N est en dehors de (AM) pour M en dehors de (AB), et η(N) = $\tau_{AA'}$ (N) par le même argument. ❑

Proposition 11 : Les homothétie-translations forment un groupe de transformations de l'espace $\mathcal{E}$

preuve> D'après la proposition 10, toute transformation η de l'espace $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété (Par) ci-après est une homothétie-translation et réciproquement.

(Par) Pour toute droite Δ, $\eta(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ

Or la composée de deux transformations vérifiant (Par), vérifie (Par). De même η^{-1} vérifie (Par) lorsque η vérifie (Par) puisqu'une homothétie-translation opère bijectivement sur les droites. ❑

Bipoints équipollents, vecteurs

Deux bipoints (A,B) et (A',B') sont dits équipollents lorsque la translation qui envoie A en B envoie A' en B'. On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont égaux. Autrement dit, un vecteur est défini comme classe d'équivalence de bipoints pour la relation d'équipollence. Il n'y a pas de différence essentielle entre «le vecteur $\overrightarrow{AB}$ » et «la translation τ_{AB} qui envoie A en B ». En effet : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ si et seulement si $\tau_{AB} = \tau_{A'B'}$, et toute translation peut s'écrire sous forme τ_{AB}, de la même manière que tout vecteur peut s'écrire sous forme $\overrightarrow{AB}$. Enfin, la classe d'équivalence du bipoint (A,B) pour la relation d'équipollence est le graphe de τ_{AB}. Lorsque A, B, A' sont non alignés, on retrouve le parallélogramme ABB'A' caractérisant l'équipollence des bipoints (A,B) et (A'B').

Notons $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ tels que nous venons de les définir. Si $\overrightarrow{U}$ est le vecteur associé à la translation τ on note A + $\overrightarrow{U}$ pour €τ (A). La composition des translations donne pour les vecteurs associés une loi de composition interne qui est notée sous forme additive. Cette addition vérifie la relation

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} .$$

L'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est donc, pour le moment, un groupe commutatif isomorphe au groupe des translations de $\mathcal{E}$. De plus $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ opère simplement transitivement sur $\mathcal{E}$ par

$$(\overrightarrow{U},A) \mapsto A+\overrightarrow{U} .$$

Une homothétie-translation η donne pour image d'un parallélogramme ABCD un parallélogramme $A_1B_1D_1C_1$; donc 2 bipoints équipollents ont pour images par η 2 bipoints équipollents, et on peut parler de l'image du vecteur $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB}$ par η : c'est le vecteur $\overrightarrow{U_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Notons que la phrase

«le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour image par η le vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ »

peut être réécrite en termes du groupe des homothétie-translations :

$$\eta \circ \tau_{AB} \circ \eta^{-1} = \tau_{A_1B_1} \quad (\text{si } \eta(A) = A_1, \eta(B) = B_1)$$

En effet, si on appelle λ le membre de gauche ci-dessus on a tout de suite : $\lambda(A_1) = B_1$ et λ est bien une translation puisque le graphe de λ est égal à η(graphe de τ_{AB}).

Le corps des scalaires et la structure d'espace vectoriel

Notons $\mathcal{H}$ le groupe des homothétie-translations de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ le sous-groupe des translations. Comme le sous-groupe $\mathcal{T}$ est à la fois distingué et commutatif, le groupe quotient $\mathcal{H}/\mathcal{T}$ opère sur le groupe $\mathcal{T}$ «par automorphismes intérieurs» : c.-à-d. la translation $\eta \circ \tau_{AB} \circ \eta^{-1}$ ne dépend que de la classe de η modulo les translations.

Si on note $\underline{\eta}$ la classe de η modulo les translations, $\underline{\eta}\,.\,\underline{\eta}'$ la classe de $\eta \circ \eta'$, et $\underline{\eta} \bullet \tau$ la translation $\eta \circ \tau \circ \eta^{-1}$ obtient donc une loi externe : $(\underline{\eta},\tau) \mapsto \underline{\eta} \bullet \tau$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $1 \bullet \tau = \tau$; $(\underline{\eta}\,.\,\underline{\eta}') \bullet \tau = \underline{\eta} \bullet (\underline{\eta}' \bullet \tau)$ et $\underline{\eta} \bullet (\tau \circ \tau') = (\underline{\eta} \bullet \tau) \circ (\underline{\eta} \bullet \tau')$

Si maintenant on remplace la translation par le vecteur associé, si on remplace • par une absence de symbole et si on note α pour $\underline{\eta}$ les mêmes propriétés vont nous apparaître sous une apparence plus familière, à savoir :

- $1\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U}$, $(\alpha.\beta)\,\overrightarrow{U} = \alpha\,(\beta\,\overrightarrow{U}\,)$ et $\alpha(\,\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}\,) = \alpha\,\overrightarrow{U} + \alpha\,\overrightarrow{V}$

En résumé, on a déjà pratiquement la structure d'espace vectoriel souhaitée sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Il nous manque l'addition des scalaires et il nous faut encore vérifier quelques axiomes supplémentaires de la structure d'espace vectoriel.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ seront dits **parallèles** lorsque l'un d'entre eux est nul ou lorsque les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Définition Nous appellerons scalaire de $\mathcal{E}$ un homomorphisme α de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ vers $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ vérifiant la propriété de parallélisme suivante :

pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$, le vecteur $\alpha(\,\overrightarrow{U}\,)$ est parallèle à $\overrightarrow{U}$.

Nous noterons alors $\alpha\,\overrightarrow{U}$ à la place de $\alpha(\,\overrightarrow{U}\,)$. On note 0 le scalaire défini par : $0\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Remarque Si α et β sont deux scalaires, l'homomorphisme composé $\alpha \circ \beta$ est manifestement aussi un scalaire. On l'appellera **le produit** des deux scalaires, et on le notera $\alpha.\beta$ de sorte qu'on obtient : $(\alpha.\beta)\,\overrightarrow{U} = \alpha(\beta\,\overrightarrow{U}\,)$ pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$.

Proposition 12 : Étant donné un vecteur non nul $\overrightarrow{U}$ et un vecteur parallèle $\overrightarrow{V}$ il y a exactement un scalaire α tel que $\alpha\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$. Si $\overrightarrow{V}$ est non nul, ce scalaire provient d'une homothétie-translation, sinon, c'est le scalaire nul.

preuve> Il s'agit pratiquement du même énoncé que la proposition 10. ❑

Proposition 13 : *(somme de deux scalaires)* Étant donné deux scalaires α et β il existe un scalaire unique γ vérifiant, pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$,

$$\gamma\,\overrightarrow{U} = \alpha\,\overrightarrow{U} + \beta\,\overrightarrow{U} .$$

On notera $\gamma = \alpha + \beta$.

preuve> Il suffit de vérifier que l'application $\overrightarrow{U} \mapsto \alpha\,\overrightarrow{U} + \beta\,\overrightarrow{U}$ vérifie la définition d'un scalaire. C'est à peu près immédiat. ❑

Proposition 14 : *(corps des scalaires)* Avec l'addition et le produit précédemment définis, les scalaires de $\mathcal{E}$ forment un corps (non nécessairement commutatif). Nous noterons $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ le corps des scalaires de $\mathcal{E}$.

preuve> L'associativité du produit est claire. Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur non nul fixé. Deux scalaires α et β sont égaux si et seulement si on a l'égalité des vecteurs $\alpha\,\overrightarrow{U}$ et $\beta\,\overrightarrow{U}$. En se basant sur cette remarque, on montre facilement les propriétés :

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,

$(\alpha+\beta).\gamma = \alpha.\gamma+\beta.\gamma$, $\gamma.(\alpha+\beta) = \gamma.\alpha+\gamma.\beta$

L'existence de l'opposé d'un scalaire résulte de ce que le scalaire -1 opposé de 1 existe : $\overrightarrow{U} \mapsto -\overrightarrow{U}$ (d'où ensuite $-\alpha = (-1)\ \alpha$)

L'existence de l'inverse d'un scalaire non nul α s'obtient en considérant le scalaire δ qui vérifie, pour un vecteur $\overrightarrow{U}$ non nul fixé : $\delta(\alpha\overrightarrow{U}) = \overrightarrow{U}$. ❑

Proposition 15 : (structure d'espace vectoriel sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$) Le groupe additif $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni de la loi externe $\mathbf{K}_{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}$: $(\alpha, \overrightarrow{U}) \mapsto \alpha\overrightarrow{U}$ est un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$.

preuve> Il faut d'abord vérifier les axiomes d'espace vectoriel, ce qui ne présente aucune difficulté. Reste la question de la dimension. On considère trois vecteurs non coplanaires $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$. On peut alors écrire un vecteur arbitraire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ en construisant le parallélépipède habituel. Les détails sont laissés à la lectrice. ❑

Le théorème annoncé au début de la section est maintenant presque démontré.

Théorème fondamental de la géométrie affine synthétique

Soit une structure $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{P})$ (points, droites, plans) vérifiant les axiomes A0 ⟶ A6. Soient $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ le corps des scalaires de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace des vecteurs de $\mathcal{E}$ définis dans les propositions précédentes.

Alors la structure donnée est isomorphe à une structure du même type définie à partir de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur le corps $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}$ (le corps est non nécessairement commutatif, il s'agit alors d'un espace vectoriel à gauche) de la manière suivante :

– les points sont les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
– les droites sont les translatés des droites vectorielles de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
– les plans sont les translatés des plans vectoriels de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
– les relations d'incidence sont les relations d'appartenance ou d'inclusion

preuve> Appelons droite de $\mathcal{E}$ (resp. plan de $\mathcal{E}$) l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ situés sur un élément de $\mathcal{D}$ (resp. sur un élément de $\mathcal{P}$) pour la relation d'incidence définie dans la structure. Pour ces nouvelles «droites» et ces nouveaux «plans» (et avec les mêmes points) les relations d'incidence se traduisent par l'appartenance ou l'inclusion, et cette «nouvelle» structure est évidemment isomorphe à la première.

On considère alors un point A qui sert d'origine dans $\mathcal{E}$ et la bijection $\overrightarrow{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par :

$$\overrightarrow{U} \mapsto A+\overrightarrow{U}.$$

Il est facile de voir que les droites (resp. les plans) de $\mathcal{E}$ sont exactement les images par cette bijection des translatés des droites vectorielles (resp. des plans vectoriels) de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Cela signifie que cette bijection réalise un isomorphisme entre les deux structures considérées. ❑

4) GEOMETRIE EUCLIDIENNE DANS L'ESPACE (de dimension 3)

Introduction

Nous reprenons, pour la géométrie dans l'espace, le contenu du chapitre 1 consacré à la géométrie euclidienne plane, en nous basant sur une définition plus abstraite d'espace euclidien.

Nous ne parlons presque pas d'angles, et les autres notions reçoivent un traitement tout à fait analogue à celui opéré en géométrie plane.

Le déplacement d'un solide est intuitivement caractérisé par l'image d'un «drapeau» (un triplet : point, droite orientée, demi plan) attaché à ce solide. Aussi le théorème qui affirme que le groupe des déplacements opère simplement transitivement sur les drapeaux doit être considéré comme fondamental. C'est lui qui assure une bonne adéquation du modèle mathématique «espace euclidien» à la réalité que nous cherchons à décrire.

Il serait plus logique, si on s'en tenait à une présentation intuitive, d'introduire le produit scalaire à partir d'un groupe de déplacements (qui serait donné dans la structure en tant que sous groupe du groupe affine, avec le «théorème fondamental» comme axiome) ; mais comme c'est moins fatigant de faire l'inverse (définir les déplacements à partir du produit scalaire) on a choisi la voie de la facilité.

La section a) est consacrée aux définitions et premières propriétés, la section b) au groupe des isométries, la section c) aux similitudes et transformations affines. Dans la section d) nous donnons quelques théorèmes structurels.

La plupart des résultats de ce chapitre s'étendraient sans difficulté aucune à un espace euclidien de dimension finie arbitraire, à l'exception de la classification complète des isométries, dont la preuve est un peu plus sophistiquée en dimensions supérieures à 3. Nous faisons quelques commentaires à ce sujet dans la dernière section du chapitre.

Notons que nous adoptons dans ce chapitre la terminologie «espace euclidien» pour «espace euclidien de dimension 3 dans un cadre affine». Si nous désirons parler d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, nous adoptons la terminologie : espace vectoriel euclidien.

a) Produit scalaire, distance, orthogonalité

L'espace euclidien

Nous avons vu au chapitre 1 comment le théorème de Pythagore se démontre dans une géométrie où la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Nous avons vu aussi comment le produit scalaire des vecteurs est une notion qui découle naturellement de la notion de distance.

Nous avons enfin reconnu les principales notions intuitives de «notre» plan à l'intérieur d'un modèle mathématique abstrait : un plan réel affine avec un produit scalaire sur les vecteurs.

Une bonne définition mathématique pour un espace euclidien de dimension 3 sera donc :

Définition Un espace euclidien de dimension 3 est donné par

– un espace affine $\mathcal{E}$ réel de dimension 3

– un produit scalaire sur les vecteurs de $\mathcal{E}$.

On rappelle qu'un produit scalaire est par définition une forme bilinéaire symétrique définie positive. On définit alors

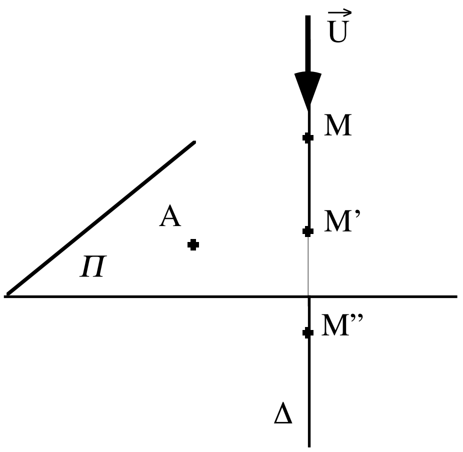
- l'**orthogonalité** de deux vecteurs, par la condition : $\vec{V} \bullet \vec{W} = 0$, celle de deux sous-espaces affines par l'orthogonalité des vecteurs de l'un à ceux de l'autre,
- la **norme** $\|\vec{V}\|$ d'un vecteur $\vec{V}$ par : $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \bullet \vec{V}}$,
- la **distance** d(M,N) de deux points M et N, par : $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$,
- un **repère orthonormé** comme un repère cartésien $(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ vérifiant :
  $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = \|\vec{W}\| = 1$, $\vec{U} \bullet \vec{V} = \vec{U} \bullet \vec{W} = \vec{V} \bullet \vec{W} = 0$.

On a alors :

- Des vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux sont indépendants.
- $2\,\vec{U} \bullet \vec{V} = \|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2$
- $|\vec{U} \bullet \vec{V}| \leq \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\|$
- $\vec{U} \neq \vec{0} \Rightarrow \left(|\vec{U} \bullet \vec{V}| = \|\vec{U}\|\,\|\vec{V}\| \Leftrightarrow \exists\, r \geq 0 \quad \vec{V} = r.\vec{U} \right)$
- $d(M,N) = 0 \Leftrightarrow M = N$
- $d(M,N) = d(N,M)$
- $d(M,N) + d(N,P) \geq d(M,P)$
- Pour que trois réels a, b, c soient les longueurs des cotés d'un triangle non aplati il faut et suffit qu'on ait les inégalités : $|b - c| < a < b + c$
- $d(M,N) + d(N,P) = d(M,P) \Leftrightarrow \exists\, r \in [0,1] \quad \overrightarrow{MN} = r\,\overrightarrow{MP}$
- Si Δ est une droite, il existe une unique direction de plan Π orthogonale à Δ.
  La direction de Π est notée $\Delta^{\perp}$.
- Si Π est un plan, il existe une unique direction de droite Δ orthogonale à Π.
  La direction de Δ est notée $\Pi^{\perp}$.

Distance d'un point à un plan, équations normalisées d'un plan

On considère un plan Π et un point M dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$. Soit Δ la droite orthogonale à Π passant par M. Elle coupe Π en un point M' : on appelle **projection orthogonale sur** Π et on note π_Π l'application qui envoie M en M'.



Il s'agit donc de la projection sur Π parallèlement à la direction orthogonale à Π.
Si A est un point de Π distinct de M', on a : $\overrightarrow{AM'} \perp \overrightarrow{MM'}$ et donc, par Pythagore,

$$MA = \sqrt{MM'^2 + M'A^2} > MM'$$

Ainsi M' est le point du plan le plus proche de M. La distance MM' est encore appelée la **distance du point** M **au plan** Π. Par ailleurs le symétrique M'' de M par rapport à M' est appelé le symétrique de M par rapport au plan Π.

La **symétrie orthogonale par rapport à** Π est donc par définition la symétrie par rapport à Π dans la direction orthogonale à Π. Nous la noterons σ_Π. Si $\overrightarrow{U}$ est un vecteur unitaire porté par Δ, posons $\overrightarrow{MM'} = d.\overrightarrow{U}$. On obtient :

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{U} = \overrightarrow{MM'} \bullet \overrightarrow{U} + \overrightarrow{M'A} \bullet \overrightarrow{U} = \overrightarrow{MM'} \bullet \overrightarrow{U} = d.\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{U} = d$$

et on a $d = \pm MM'$, le signe dépendant de l'orientation du vecteur $\overrightarrow{U}$.
Si maintenant on considère un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ on pose :

$$\overrightarrow{U} = u\overrightarrow{X} + v\overrightarrow{Y} + w\overrightarrow{Z}$$

et $\qquad M =_{\mathfrak{R}} (x,y,z),\ A =_{\mathfrak{R}} (a,b,c),$

on obtient : $\quad -\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{U} = -\overrightarrow{MM'} \bullet \overrightarrow{U} = ux + vy + wz - (ua + vb + wc)$

On a alors : $\quad M \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{U} = 0 \Leftrightarrow ux + vy + wz + s = 0$

(où $s = -(ua + vb + wc)$, ne dépend pas du point A choisi dans Π)

On retrouve ainsi l'équation d'un plan dans un repère cartésien, mais avec une nouvelle interprétation de cette équation. On a en effet démontré la proposition suivante :

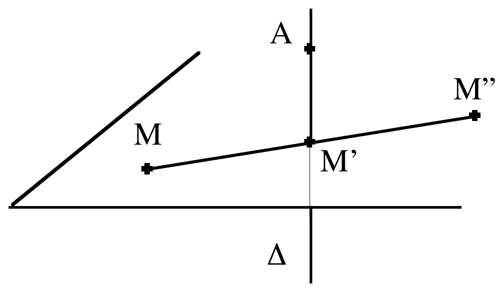
Proposition 1 : Soient $\mathfrak{R} = (O, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z})$ un repère orthonormé, et s, u, v, w, quatre réels tels que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, alors la fonction :

$$f : M =_{\mathfrak{R}} (x,y,z) \longmapsto f(M) = ux + vy + wz + s$$

exprime la distance du point M à un plan Π, affectée du signe $+$ ou $-$ selon que M se trouve d'un coté ou de l'autre de Π. Le plan Π est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{U} = u\overrightarrow{X} + v\overrightarrow{Y} + w\overrightarrow{Z}$.

Il est clair que toute équation cartésienne de Π est proportionnelle à deux équations de la forme ci-dessus : $f(M) = 0$ et $-f(M) = 0$. Ces deux équations correspondent aux deux orientations possibles du vecteur unitaire orthogonal à Π.
Une telle équation est appelée **équation normalisée du plan** Π.

Distance d'un point à une droite



On considère une droite Δ et un point M dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$. La **projection orthogonale de** M **sur** Δ est la projection de M sur Δ parallèlement à la direction de plan orthogonale à Δ. On la note π_Δ. Si $M' = \pi_\Delta(M)$ et si A est un point de Δ distinct de M' on a : $MM' < MA$, et le réel MM' est appelé la **distance du point** M **à la droite** Δ.

On définit enfin la **symétrie orthogonale par rapport à** Δ comme étant la symétrie par rapport à Δ dans la direction de plan orthogonale à $\Delta^\perp$. Nous la noterons σ_Δ.

En considérant un vecteur unitaire $\overrightarrow{U}$ porté par Δ, on obtient, comme en géométrie plane et par les mêmes calculs.

$$\overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{AM})\,\overrightarrow{U} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \pi_\Delta(M) = A + (\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{AM})\,\overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{AM''} = 2(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{AM})\,\overrightarrow{U} - \overrightarrow{AM} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \sigma_\Delta(M) = 2A - M + 2(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{AM})\,\overrightarrow{U}$$

ou, avec une origine O arbitraire $\qquad \sigma_\Delta(M) = \sigma_\Delta(O) + 2(\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{OM})\,\overrightarrow{U}$

Exercice 1 : En supposant que la droite Δ passe par l'origine d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, dans lequel les composantes de $\overrightarrow{U}$ sont (u,v,w), donner la matrice P telle que l'expression analytique de la projection orthogonale sur la droite Δ s'écrive : $Y = P.X$. Quelles sont alors les applications dont les expressions analytiques sont respectivement :

$$Y = (2P - I).X, \quad Y = (I - P).X, \quad Y = (I - 2P).X \ ?$$

Produit scalaire et barycentre

Étant donné un système de points pondérés $S = ((A_1,a_1),\ldots,(A_m,a_m))$, rappelons que la masse totale du système est la somme des a_i. Nous avons étudié dans un espace affine arbitraire la fonction ψ_S de $\mathcal{E}$ vers $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ définie par :

$$\psi_S(M) = a_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + a_m\overrightarrow{MA_m}$$

Dans un cadre euclidien, nous sommes maintenant intéressés par la fonction réelle :

$$\boxed{\varphi_S(M) = a_1\overrightarrow{MA_1}^2 + \ldots + a_m\overrightarrow{MA_m}^2 = a_1.MA_1^2 + \ldots + a_m.MA_m^2}$$

Un calcul élémentaire montre que :

Proposition 2 : *(formule de Leibniz)*

a) Si la masse totale a du système S est non nulle, et si G est son barycentre, on a: $\varphi_S(M) = \varphi_S(G) + a.MG^2$ (formule de Leibniz)

b) Si la masse totale du système est nulle et si $\overrightarrow{U_S} = \psi_S(.)$, on a :

$$\varphi_S(M) - \varphi_S(N) = 2\,\overrightarrow{U_S} \bullet \overrightarrow{MN}$$

b) Isométries de l'espace euclidien

Définition et premier théorème fondamental

Nous donnons dans cette section la décomposition d'une isométrie en produit de symétries-plan orthogonales. Ceci a comme conséquence que les isométries sont des transformations affines.

Proposition 1 : *(transformations affines qui sont des isométries)*

a) Pour qu'une transformation affine de $\mathcal{E}$ soit une isométrie, *il suffit* que l'image d'*un* repère orthonormé soit un repère orthonormé, et
b) *il faut* que l'image de *tout* repère orthonormé soit un repère orthonormé.
c) Une transformation affine qui est une isométrie conserve les produits scalaires.

Corollaire Les symétries affines qui sont des isométries sont : les symétries-point, l'identité, et les symétries orthogonales par rapport à un plan ou une droite.

Exercice 1 : Démontrer la proposition 1, son corollaire, et le lemme ci-dessous

Exercice 2 : Donner la forme analytique des symétries orthogonales (par rapport à une droite et par rapport à un plan), dans un repère orthonormé.

Lemme 1 : Les points équidistants de deux points distincts A et B sont les points d'un plan : le plan orthogonal à la droite (AB) passant par le milieu du segment [AB]. On l'appelle le plan médiateur du segment [AB].

La preuve du théorème fondamental qui suit est basée sur les seuls résultats : plan médiateur d'un segment, existence des symétries orthogonales. On comparera avec le théorème analogue pour le plan euclidien.

Théorème fondamental 1 : *(isométries comme produits de symétries orthogonales par rapport à des plans).* Soit τ une isométrie de $\mathcal{E}$.

a) Si τ fixe quatre points non coplanaires, c'est l'identité $Id_{\mathcal{E}}$.
b) Si $\tau \neq Id$ fixe trois points non alignés A, B, C c'est la symétrie orthogonale $\sigma_{(ABC)}$.
c) Si τ fixe deux points A et B, mais aucun autre point en dehors de la droite (AB) c'est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans passant par (AB).
d) Si τ fixe exactement un point A, c'est le produit de trois symétries orthogonales par rapport à des plans passant par A.
e) Dans tous les cas τ est le produit de zéro, une, deux, trois ou quatre symétries orthogonales.

preuve> (a) Soient A, B, C, D les quatre points non alignés. Si pour un point M on avait $N = \tau(M)$ distinct de M, on aurait MA = NA, MB = NB, MC = NC, MD = ND, puisque τ est une isométrie, et les points A, B, C, D seraient dans le plan médiateur de [MN].
(b) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, les points A, B, C sont dans le plan médiateur Π de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Pi$ possède les quatre points fixes non coplanaires A, B, C, N. Donc d'après (a), c'est l'identité. Donc $\tau = \sigma_\Pi$.
(c) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, les points A et B sont dans le plan médiateur Π de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Pi$ possède les trois points fixes non alignés A, B, N. Donc d'après (b) c'est l'identité ou la symétrie orthogonale $\sigma_{(ABN)}$. Le premier cas est exclu car sinon $\tau = \sigma_\Pi$.
(d) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, le point A est dans le plan médiateur Π de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Pi$ possède les deux points fixes A, N. Donc d'après (a), (b), (c) c'est l'identité ou une symétrie σ_Π ou le produit de deux symétries par rapport à des plans passant par (AB). Les premiers cas sont exclus car sinon τ posséderait la droite (AN) de points fixes.
(e) On peut supposer que τ n'admet aucun point fixe. Soit M arbitraire et $N = \tau(M)$ distinct de M. On considère le plan médiateur Π de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Pi$ possède le point fixe N. Ce qui nous ramène à l'un des cas précédents. ❑

Corollaire 1 : Deux isométries de $\mathcal{E}$ qui coïncident en quatre points non coplanaires sont égales (coïncident partout).

Corollaire 2 :

a) Toute isométrie de $\mathcal{E}$ est une transformation affine et elle induit sur les vecteurs une application linéaire bijective qui conserve le produit scalaire, et donc l'orthogonalité.
b) Le groupe des isométries opère simplement transitivement sur l'ensemble des repères orthonormés.

preuve> (a) Une symétrie orthogonale est une transformation affine qui conserve les produits scalaires. Donc un produit de symétries orthogonales également.
Le (b) résulte du (a), de la proposition 1, et du fait que les transformations affines opèrent simplement transitivement sur les repères affines. ❑

Corollaire 3 : Dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ la symétrie orthogonale σ_Π est l'unique isométrie σ de $\mathcal{E}$ qui vérifie :
le plan Π est l'ensemble des points fixes de σ

Proposition 2 : *(cas d'égalité de deux tétraèdres)* Soient ABCD et A'B'C'D' deux tétraèdres, le premier non aplati, les arêtes correspondantes ayant des longueurs égales (ce qui fait 6 égalités de longueurs). Alors il existe exactement une isométrie qui envoie A, B, C, D en A', B', C', D'.

preuve> On envoie A sur A' au moyen de 0 ou 1 symétrie orthogonale. Soit B_1 l'image de B par cette isométrie. On envoie ensuite B_1 sur B' au moyen de 0 ou 1 symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par A,... etc. Cela assure l'existence. L'unicité est déjà connue. ❑

Problèmes d'orientation

L'orientation de l'espace «où nous vivons» par la règle du bonhomme d'Ampère est bien connue. formalisation mathématique de cette notion est assez délicate et fait appel à la théorie des déterminants. Deux repères cartésiens de $\mathfrak{E}$ ont, par définition «même orientation» lorsque la transformation affine qui transforme le premier en le second est directe (cf. chapitre 3), c.-à-d. lorsque son déterminant est positif. Cette notion est donc une notion affine. En fait, elle peut être traitée de manière plus proche de l'intuition en établissant directement le résultat suivant:

> On peut répartir les repères orthonormés en deux sous-ensembles complémentaires Ro^+ et Ro^- (les repères «directs» et les repères «indirects») de manière que la propriété suivante soit vérifiée : une symétrie orthogonale par rapport à un plan donne pour image d'un repère $\mathfrak{R} \in Ro^+$ un repère $\mathfrak{R}' \in Ro^-$ et vice versa.

En effet, si ce résultat est établi, comme on a démontré que toute isométrie est un produit de symétries orthogonales par rapport à des plans, on en déduit que toute isométrie, ou bien conserve l'orientation de tout repère orthonormé, ou bien renverse l'orientation de tout repère orthonormé. Notons que le résultat ci-dessus se ramène à :

> Le produit d'un nombre impair de symétries planes orthogonales n'est jamais égal à l'identité.

et ce fait peut être démontré en réduisant un produit de 5 symétries planes orthogonales à un produit de trois symétries planes orthogonales[2].

Définition On appelle **isométrie directe**, ou **déplacement**, une isométrie qui conserve l'orientation des repères orthonormés, **isométrie indirecte** une isométrie qui renverse ces orientations.

Proposition 3 : *(troisième cas d'égalité des triangles)*

a) Deux isométries directes (resp. indirectes) de $\mathfrak{E}$ qui coïncident en trois points non alignés sont égales.

b) Étant donnés deux triangles ABC et A'B'C' non aplatis, avec AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', il existe exactement un déplacement de l'espace qui envoie le premier sur le second.

---

2 La lectrice intéressée peut produire une preuve de ce fait sans faire appel à la théorie des déterminants en utilisant judicieusement les preuves des propositions 5 (a) et (b), et 8.

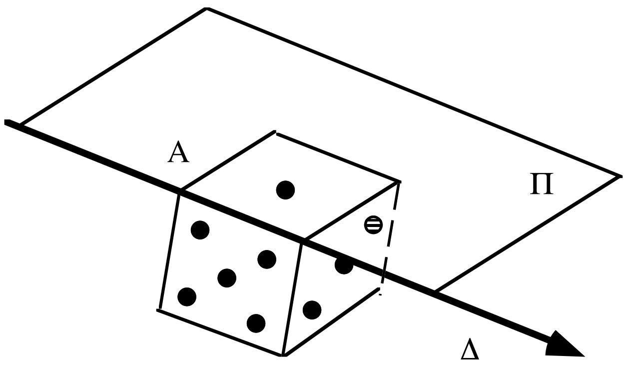
preuve> (a) Si on a deux isométries directes ρ et τ qui coïncident en A, B, C on considère le plan Π = (ABC) et l'isométrie $\sigma_\Pi \circ \tau^{-1} \circ \rho$. On applique le (b) du théorème fondamental 1 et on voit qu'elle est égale à σ_Π.
(b) L'unicité résulte du (a). Pour l'existence, on raisonne comme à la proposition 2, et, dans le cas où elle est indirecte, on compose l'isométrie obtenue avec la symétrie orthogonale par rapport au plan (A'B'C'). ❑

Deuxième théorème fondamental

Nous définissons **un 2-drapeau** de l'espace euclidien de dimension 3 exactement de la même manière qu'un drapeau dans le plan euclidien. Nous définissons ensuite **un 3-drapeau** comme un quadruple (A,Δ,Π,E) où (A,Δ,Π) est un 2-drapeau et E un demi-espace limité par le plan qui prolonge Π. On obtient par la même technique qu'en dimension 2 (associer un repère orthonormé direct à un 2-drapeau, ou un repère orthonormé à un 3-drapeau) le résultat suivant.

Théorème fondamental 2 : *(propriété de libre mobilité)*

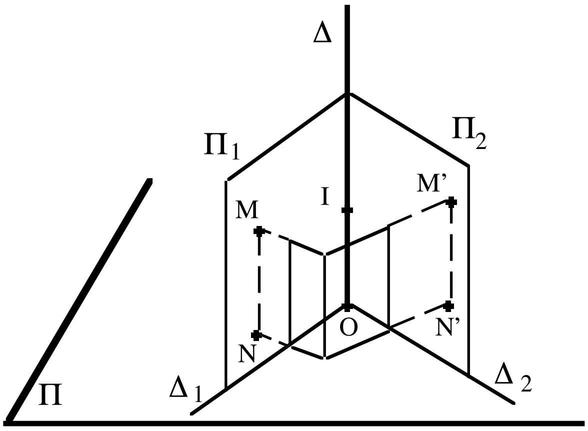
a) Le groupe des isométries de $\mathcal{E}$ opère simplement transitivement sur les 3-drapeaux.
b) Le groupe des isométries directes de $\mathcal{E}$ opère simplement transitivement sur les 2-drapeaux.



Rappelons que le (a) signifie : étant donnés deux 2-drapeaux D_1 et D_2 de l'espace euclidien $\mathcal{E}$, il existe exactement une isométrie directe de $\mathcal{E}$ qui donne pour image du 2-drapeau D_1 le 2-drapeau D_2. La propriété (b) doit être considérée comme fondamentale parce que d'un point de vue intuitif, c'est la propriété essentielle que doit vérifier le groupe des déplacements. En effet, qu'est-ce qui permet de «fixer» un solide dans l'espace, un cube par exemple ? Il faut placer un sommet A du cube, puis l'axe Δ (droite orientée) défini par ce sommet et un autre sommet, puis enfin le demi-plan Π portant une face du cube.

Le groupe des rotations qui fixent un point

Commençons par une étude intuitive d'une rotation autour d'un axe dans l'espace.
Soit Δ une droite, Π un plan orthogonal à Δ coupant Δ en O. Une rotation d'axe Δ peut aussi être décrite comme suit : on considère une rotation ρ du plan euclidien Π, de centre O. Si M est un point de $\mathcal{E}$ on projette M orthogonalement sur Δ en I.



La translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$ envoie M en N avec $N \in \Pi$, $\rho(N) = N'$, et la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ envoie N' en M'. Le point M' est l'image de M par la rotation $\rho°$ qui est une transformation de $\mathcal{E}$. Si on considère un repère orthonormé

$$\mathfrak{R} = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$$

avec $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans Π, $\overrightarrow{W}$ sur Δ, on a : $\rho°(\overrightarrow{U}) = \rho(\overrightarrow{U})$, $\rho°(\overrightarrow{V}) = \rho(\overrightarrow{V})$, $\rho°(\overrightarrow{W}) = \overrightarrow{W}$.

En résumé, une rotation autour de l'axe Δ est obtenue à partir de la rotation du seul plan Π en «rajoutant une coordonnée z à laquelle on ne touche pas».

Étant donné un plan Π dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$, nous appellerons **déplacement-de-Π** tout déplacement de $\mathcal{E}$ obtenu à partir d'un déplacement du plan euclidien Π en «rajoutant une coordonnée z à laquelle on ne touche pas». Nous mettons des tirets à «déplacement-de-Π» pour éviter la confusion avec l'idée «déplacer le plan Π dans l'espace $\mathcal{E}$ », or ici on ne fait que «faire glisser le plan Π sur lui-même». Notez bien qu'un demi-tour autour d'une droite de Π est un déplacement qui conserve Π mais n'est pas un déplacement-de-Π.

Lorsque le déplacement de Π est une rotation de centre O, le déplacement-de-Π correspondant est ce qu'on appelle une rotation d'axe Δ où Δ est la perpendiculaire à Π passant par O.

Les déplacements-de-Π sont donc les translations de vecteur parallèle à Π et les rotations d'axe perpendiculaire à Π. Les déplacements-de-Π forment un sous groupe du groupe des déplacements de $\mathcal{E}$, sous groupe est naturellement isomorphe au groupe des déplacements du plan euclidien Π.

Revenons maintenant à notre rotation. Supposons que nous ayons écrit dans le plan euclidien Π :

$$\rho = \sigma_{\Delta_2} \circ \sigma_{\Delta_1}$$

où Δ_1 et Δ_2 sont des droites de Π.

Nous pouvons alors de même «rajouter une coordonnée z à laquelle on ne touche pas» pour les symétries par rapport à Δ_1 et Δ_2 dans Π. Nous obtenons un plan Π_1 contenant Δ et Δ_1 un plan Π_2 contenant Δ et Δ_2. Alors en considérant les symétries orthogonales (dans $\mathcal{E}$) σ_{Π_1} et σ_{Π_2} par rapport aux plans Π_1 et Π_2, nous avons

$$\rho° = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1}$$

Nous résumons ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 4 : *(rotation comme produit de deux symétries orthogonales)*

a) Une rotation d'axe Δ est une isométrie directe, qui peut s'écrire comme produit de deux symétries planes (orthogonales). On a en outre libre choix pour le premier plan (ou, pour le deuxième) pourvu qu'il passe par Δ.

b) Inversement le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans passant par un point O est une rotation autour d'une droite passant par O.

Proposition 5 : *(groupe des déplacements qui fixent un point)*

a) La composée de deux rotations, d'axes Δ et Δ' passant par O est une rotation dont l'axe passe par O.

b) Tout déplacement qui fixe un point O est une rotation autour d'une droite passant par O.

c) Les rotations dont l'axe passe par O forment un groupe d'isométries de $\mathcal{E}$, isomorphe à $SO(3,\mathbb{R})$ groupe des matrices orthogonales 3×3 de déterminant 1.

d) Toute rotation ρ dont l'axe passe par O peut s'écrire comme produit de deux rotations d'un demi-tour autour d'axes passant par O.

preuve> (a) Considérons maintenant la composée de deux rotations fixant O. La première rotation, soit ρ, peut s'écrire $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1}$ où le plan Π_2 contient Δ et Δ', et la deuxième rotation, soit ρ' peut s'écrire $\sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_2}$. En composant, on obtient $\sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1}$, c'est-à-dire $\sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_1}$. Les deux plans Π_3 et Π_1 ont le point O en commun, donc le produit des deux symétries est : l'identité si $\Pi_3 = \Pi_1$, une rotation d'axe Δ, intersection de Π_3 et Π_1, si $\Pi_3 \neq \Pi_1$.
(b) parce que le déplacement se décompose en un produit d'un nombre pair de symétries orthogonales par rapport à des plans passant par O, et vu le (a).
(c) résulte clairement du (b) et de l'écriture d'une isométrie directe dans un repère orthonormé d'origine O.
(d) Si $\rho = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1}$, alors $\rho = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi} \circ \sigma_{\Pi} \circ \sigma_{\Pi_1}$ or : $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi} = \sigma_{\Delta_2}$ (resp. $\sigma_{\Pi} \circ \sigma_{\Pi_1} = \sigma_{\Delta_1}$), où maintenant σ_{Δ_2} (resp. σ_{Δ_1}) désigne la symétrie orthogonale par rapport à Δ_2 (resp. Δ_1) dans $\mathcal{E}$ tout entier. ❑

Le groupe des déplacements

Nous connaissons déjà les translations et les rotations autour d'un axe Δ. D'après les résultats des paragraphes précédents on a :

Un déplacement qui fixe trois points est nécessairement l'identité, un déplacement qui fixe deux points A, B est une rotation d'axe (AB) ou l'identité, un déplacement qui conserve un point A est une rotation autour d'un axe passant par A.

La proposition qui suit complète la classification des déplacements dans l'espace euclidien.

Définition Le produit d'une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et d'une rotation distincte de l'identité, d'axe Δ portant $\overrightarrow{U}$, s'appelle un **vissage** d'axe Δ. Lorsque le vecteur est non nul, on parle de vissage vrai.

Proposition 6 : *(forme géométrique générale d'un déplacement)*

a) Tout déplacement peut s'écrire comme produit d'une translation (de vecteur éventuellement nul) et d'une rotation (d'angle éventuellement nul).
b) Si nous demandons que le produit soit commutatif, alors l'écriture existe de manière unique.
c) La commutativité du produit d'une translation et d'une rotation toutes deux distinctes de l'identité équivaut à l'affirmation : le vecteur de la translation est parallèle à l'axe de la rotation.
d) Tout déplacement peut s'écrire comme produit de deux demi-tours.
e) Un déplacement distinct de l'identité est une translation ou une rotation ou un vissage vrai.

preuve> (a) Soient φ un déplacement, A un point, $A' = \varphi(A)$, $A'' = \varphi^{-1}(A)$, τ la translation de A à A', τ'' la translation de A'' à A. Alors :

- Le déplacement $\tau^{-1} \circ \varphi$ conserve A, donc est une rotation ρ_1 dont l'axe passe par A, et $\varphi = \tau \circ \rho_1$.
- Le déplacement $\varphi \circ \tau''^{-1}$ conserve A, donc est une rotation ρ_2 dont l'axe passe par A, et $\varphi = \rho_2 \circ \tau''$.

(c) Soit $\tau_{\overrightarrow{U}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et ρ une rotation, *distincte de l'identité*, d'axe Δ : je dis que « $\tau_{\overrightarrow{U}} \circ \rho = \rho \circ \tau_{\overrightarrow{U}}$ » équivaut à : « $\overrightarrow{U}$ est porté par Δ » : en effet on a l'égalité

$$\rho \circ \tau_{\overrightarrow{U}} \circ \rho^{-1} = \tau_{\rho(\overrightarrow{U})}$$

(car ρ est affine) et les seuls vecteurs fixes par ρ sont ceux parallèles à Δ.

(b) *Existence* : Nous avons vu que φ peut s'écrire $\tau \circ \rho_1$ où τ est une translation et ρ_1 une rotation. Si $\overrightarrow{U}$ est le vecteur de la translation τ' écrivons:

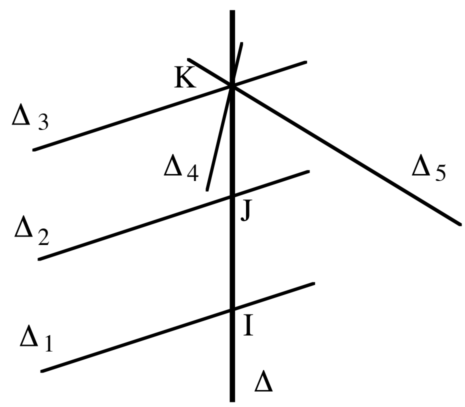
$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} \quad \text{avec } \overrightarrow{U_1} \text{ porté par } \Delta, \text{ et } \overrightarrow{U_2} \text{ orthogonal à } \Delta,$$

Notons τ_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{U_1}$ et τ_2 celle de vecteur $\overrightarrow{U_2}$.

L'isométrie $\tau_2 \circ \rho_1$ est un déplacement-de-Π, donc une rotation ρ d'axe parallèle à Δ. On a alors : $\varphi = \tau \circ \rho_1 = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \rho_1 = \tau_1 \circ \rho$

Unicité : La direction de Δ est la direction des seuls vecteurs fixes par φ. L'axe Δ est la seule droite de cette direction fixe par φ. Le reste suit facilement.

(d) Soit Δ l'axe du vissage $\varphi = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau$. Un point I de Δ admet pour image $\varphi(I) = K$. Soit J le milieu de IK. Soit Δ_1 une droite orthogonale à Δ coupant Δ en I, $\Delta_3 = \tau(\Delta_1)$, $\Delta_5 = \rho(\Delta_3)$. Si ρ_1 est une rotation d'axe Δ et «d'angle moitié de l'angle de ρ », on pose $\Delta_4 = \rho_1(\Delta_3)$ et on a $\rho = \sigma_{\Delta_4} \circ \sigma_{\Delta_3}$. Par ailleurs $\tau = \sigma_{\Delta_3} \circ \sigma_{\Delta_2}$. Donc $\rho \circ \tau = \sigma_{\Delta_4} \circ \sigma_{\Delta_2}$.



N que l'axe Δ du vissage est la perpendiculaire commune aux droites Δ_2 et Δ_4. ❑

Remarque Les constructions que nous donnons sont toutes instables pour les isométries directes proches des translations, c.-à-d. d'angle très proche de 0, parce qu'alors deux isométries très voisines peuvent avoir des axes de rotation très éloignés l'un de l'autre. Ces considérations peuvent recevoir un traitement rigoureux, mais un peu déroutant. Dans un premier temps, on pourra se contenter de considérer que les théorèmes sont entièrement valables lorsqu'on est éloigné des situations instables, ou lorsqu'on dispose de données (donc d'instruments de mesure ?) de précision infinie. Les théorèmes seraient par contre sujets à modifications dans le cas contraire.

Classification des isométries indirectes

Nous décrivons quelques isométries indirectes, et donnons ensuite la classification complète. La notion de déplacement-de-Π a été introduite dans le paragraphe sur les rotations.

Proposition et définition 7 : Un déplacement-de-Π commute avec la symétrie orthogonale par rapport à Π. La composée de ces deux isométries s'appelle :

- une **symétrie glissée** lorsque le déplacement-de-Π est une translation de vecteur non nul
- une **symétrie tournée** ou **antirotation** lorsque le déplacement-de-Π est une rotation distincte de l'identité et d'un demi-tour.

Notons que la composée d'un demi-tour d'axe Δ et de la symétrie par rapport à un plan Π orthogonal à Δ est une symétrie-point (ou symétrie centrale) de centre $\Delta \cap \Pi$.

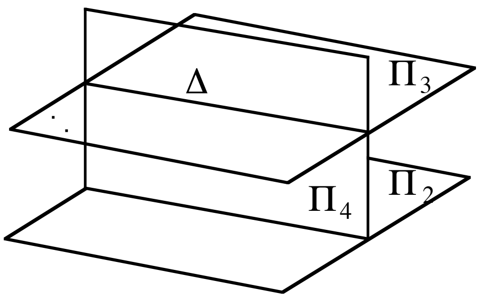
Proposition 8 : *(forme géométrique des isométries indirectes)*
Toute isométrie indirecte est une symétrie-point, ou une symétrie-plan, ou une symétrie glissée ou une symétrie tournée.

preuve> En composant l'isométrie indirecte τ avec une symétrie orthogonale convenable σ_Π, on obtient un déplacement qui admet un point fixe, et qui est l'identité ou une rotation ρ. Dans le premier cas τ est une symétrie-plan. Dans le deuxième cas, on a :

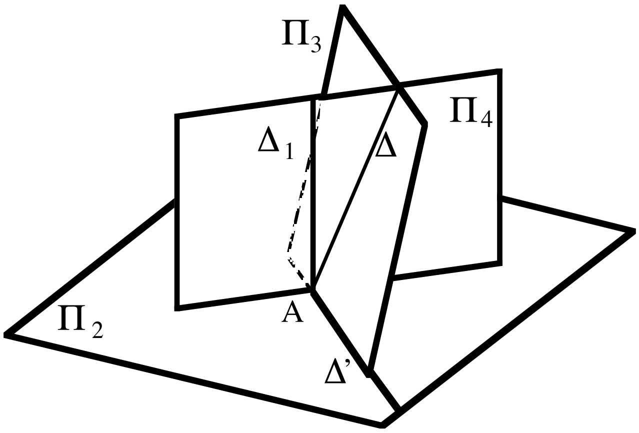
$$\tau = \rho \circ \sigma_\Pi \quad (*)$$

Soit D l'axe de la rotation ρ. Si D est dans Π, on écrit ρ sous la forme $\sigma_{\Pi_1} \circ \sigma_\Pi$ et on obtient $\tau = \sigma_{\Pi_1}$. Si D est orthogonale à Π, l'écriture (*) donne τ comme symétrie tournée. Dans le cas restant, soit Π_1 le plan passant par D et orthogonal à Π. On écrit ρ comme composée de deux symétries orthogonales $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_1}$. Si $\Delta = \Pi_1 \cap \Pi$, on a :

$$\tau = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_\Delta.$$



Si $\Delta \perp \Pi_2$, τ est une symétrie point.
Si $\Delta \,/\!/\, \Pi_2$, on considère Π_3 et Π_4 orthogonaux, passant par Δ avec $\Pi_3 \,/\!/\, \Pi_2$. On a alors : $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_\Delta = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_4}$, est donc c'est une symétrie glissée par rapport au plan Π_4.



Si Δ coupe Π_2 sans être orthogonale à Π_2, considérons le point d'intersection A, la perpendiculaire Δ_1 à Π_2 en A, le plan Π_4 contenant Δ et Δ_1 et écrivons $\sigma_\Delta = \sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_4}$. On a alors :

$$\tau = \sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_3} \circ \sigma_{\Pi_4}$$

avec les plans Π_2 et Π_3 orthogonaux à Π_4 par construction. Donc l'axe Δ' de la rotation $\sigma_{\Pi_2} \circ \sigma_{\Pi_3}$ est orthogonal à Π_4 et τ est une symétrie tournée. ❑

Remarques un phénomène d'instabilité au voisinage des symétries-point, des symétries-plan et des symétries glissées. Dans le cas d'une symétrie-point, une isométrie indirecte voisine qui est une symétrie tournée a une direction instable pour son plan de symétrie. Dans le cas d'une symétrie glissée, il y a des symétries tournées voisines avec stabilité de la direction mais instabilité de la position de l'axe de rotation.

2) On peut définir, pour une droite donnée Δ, la notion d'**isométrie-de-Δ** de manière analogue à ce que nous avons fait pour les déplacement-de-Π. On obtient que toute isométrie-de-Δ est une translation parallèle à Δ ou une symétrie orthogonale par rapport à un plan perpendiculaire à Δ (précisez pourquoi). On peut alors résumer les résultats obtenus sur la classification des isométries de $\mathcal{E}$ sous la forme suivante : toute isométrie de $\mathcal{E}$ s'écrit (de manière à peu près unique : précisez) comme produit commutatif d'une isométrie-de-Δ et d'un déplacement-de-Π avec Δ perpendiculaire à Π.

Forme analytique des isométries

Dans un repère orthonormé, une transformation affine admet une écriture :

$$X' = A\,X + B$$

C'est une isométrie si et seulement si la matrice A est orthogonale, c.-à-d. si ses vecteurs colonnes sont orthogonaux et de norme 1. (La même caractérisation vaut pour les vecteurs lignes). On en déduit que le déterminant de A est égal à ± 1.

Si l'isométrie est directe, la matrice A est semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit : trace(A) = $1 + 2\cos\theta$ (c'est un nombre de l'intervalle $[-1,3]$).

Et le polynome caractéristique de A est :

$$-\lambda^3 + (1+2\cos\theta)\,\lambda^2 - (1+2\cos\theta)\,\lambda + 1$$

Si l'isométrie est indirecte, la matrice A est semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On en déduit : trace(A) = $-1 + 2\cos\theta$ (c'est un nombre de l'intervalle $[-3,1]$).
Et le polynome caractéristique de A est :

$$-\lambda^3 + (-1+2\cos\theta)\,\lambda^2 - (1-2\cos\theta)\,\lambda - 1$$

On voit donc que la connaissance de l'écriture analytique d'une isométrie permet, via la trace et/ou le polynome caractéristique, de reconnaître facilement le type géométrique de l'isométrie.

Exercice 3 : Dans quels cas la trace est-elle égale à 1, à -1 ? Dans quels cas la connaissance de la trace d'une isométrie permet-elle de déduire la valeur du déterminant et celle de $\cos\theta$ dans la forme géométrique ? (ce petit exercice de logique est régulièrement raté lorsqu'il n'est pas énoncé en tant que tel).

Questions d'angles

Même lorsqu'on a orienté l'espace euclidien, il est impossible de distinguer les rotations d'un quart de tour et celles de trois quarts de tour. En fait pour pouvoir parler sans ambiguïté de la rotation d'angle θ autour de la droite Δ il faut orienter l'espace *et* l'axe Δ de la rotation.
De manière analogue, on ne peut parler que d'angles géométriques entre vecteurs (leur mesure est entre 0 et π) ou entre droites (leur mesure est entre 0 et $\pi/2$).

c) Similitudes, transformations affines

Définition Une similitude de l'espace euclidien est une transformation qui conserve les rapports de longueurs. Une similitude multiplie les longueurs par une constante $k \in \mathbb{R}^+$, on dit que c'est une similitude de rapport k. Une similitude est dite directe si elle induit sur les vecteurs une transformation linéaire de déterminant positif. Sinon, on dit qu'elle est indirecte.

Théorème 1 :

a) Le produit de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport k.k'.
b) Les isométries et les homothéties sont des similitudes.
c) Les similitudes de $\mathcal{E}$ forment un groupe de transformations.
d) Une similitude de rapport k est le produit d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. Le centre de l'homothétie peut être choisi arbitrairement. Toute similitude est une transformation affine qui conserve l'orthogonalité.
e) Une transformation affine qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

f) Une similitude de rapport $k \neq 1$ possède exactement un point fixe J. Elle est alors le produit commutatif de homothétie $\eta_{J,k}$ et d'une isométrie qui fixe J.

g) Les seules similitudes qui ne possèdent pas de point fixe sont les translations, les vissages vrais, et les symétries planes glissées.

Théorème 2 : *(systèmes naturels de repères)*
Les similitudes forment un groupe qui opère simplement transitivement sur les tétraèdres réguliers (A,B,C,D) (un tétraèdre est vu ici comme un quadruplet ordonné de points). Les similitudes directes opèrent simplement transitivement sur les triangles équilatéraux (A,B,C).

Les preuves des deux théorèmes précédents, analogues à celles de la dimension 2, sont laissées au lecteur sceptique.

Théorème 3 : *(forme géométrique d'une déformation affine)* Toute transformation affine de l'espace euclidien peut s'écrire comme composée d'une isométrie suivie d'une *multiaffinité orthogonale positive*, c.-à-d. d'une application affine ayant pour forme analytique dans un repère orthonormé convenable : $Y = D.X$ avec D diagonale positive.

preuve> Nous renvoyons aux théorèmes d'algèbre selon lesquels :

– toute matrice (réelle) inversible est produit (de manière unique) d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique positive
– toute matrice symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale.

On notera que le premier résultat est stable, c.-à-d. que les deux matrices en sortie dépendent continûment de la matrice en entrée, tandis que le second est instable, parce que la matrice de passage orthogonale en sortie ne dépend pas continûment de la matrice en entrée. En conséquence, le théorème 3 est lui-même «instable».

Une preuve plus intuitive (mais exactement équivalente) est la suivante. On considère une sphère. Son image est un ellipsoïde. Cet ellipsoïde a trois axes principaux D_1, D_2, D_3, deux à deux conjugués et orthogonaux, dont les images réciproques sont trois diamètres de la sphère, deux à deux conjugués donc deux à deux orthogonaux, Δ_1, Δ_2, Δ_3. L'isométrie cherchée est alors une isométrie qui transforme les Δ_i en les D_i.

Cette preuve plus intuitive nécessite cependant la théorie des ellipsoïdes. ❑

d) Théorèmes structurels

Nous donnons dans cette section les énoncés de théorèmes structurels importants. Les premiers sont les analogues de théorèmes établis pour le plan euclidien à la fin du chapitre 2. Les démonstrations seraient tout à fait semblables.

Concernant la structure affine

Théorème 1 : Dans un espace affine sur un corps commutatif quelconque, une transformation qui donne pour image de toute homothétie-translation une homothétie-translation de même rapport est une transformation affine.

Le groupe linéaire **GL**($\overrightarrow{\mathcal{E}}$) d'un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (sur un corps commutatif quelconque) opère de manière naturelle sur le groupe additif $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Cela donne lieu à une structure naturelle de produit semi-direct abstrait : $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times_\theta$ **GL**($\overrightarrow{\mathcal{E}}$) avec $\theta(\varphi)(\overrightarrow{U}) = \varphi(\overrightarrow{U})$. Lorsque $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est l'espace des vecteurs d'un espace affine $\mathcal{E}$ on obtient le résultat suivant.

Théorème 2 : Le produit semi-direct abstrait $\overrightarrow{\mathcal{E}} \times_\theta$ **GL**($\overrightarrow{\mathcal{E}}$) défini ci-dessus est isomorphe au groupe affine de $\mathcal{E}$.

Théorème 3 : Une transformation φ d'un espace affine réel qui donne pour image d'une droite une droite, est une transformation affine.

Théorème 4 : Tout automorphisme du groupe affine d'un espace affine réel de dimension n est intérieur.

Concernant la structure euclidienne

Théorème 5 : Si un sous-groupe du groupe affine d'un espace réel affine de dimension 3 $\mathcal{E}$ opère simplement transitivement sur les 2-drapeaux, c'est le sous-groupe des isométries directes pour une distance définie dans $\mathcal{E}$ à partir d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. En outre, ce produit scalaire est unique à un facteur multiplicatif positif près.

Théorème 6 : Tout automorphisme du groupe des similitudes d'un espace euclidien de dimension 3 est intérieur, et fixe le sous-groupe des isométries. Tout automorphisme du groupe des isométries d'un espace euclidien est induit par un automorphisme intérieur du groupe des similitudes.

Dans le théorème qui suit, on parle de la topologie du groupe des isométries. Cette topologie peut être définie à partir de l'écriture d'une isométrie comme transformation affine, dans un repère orthonormé fixé. Le groupe des isométries apparaît alors comme un sous-ensemble fermé d'un espace réel de dimension 12. Et il est facile de voir que la topologie obtenue ne dépend pas du choix du repère orthonormé.

Théorème 7 : Les déplacements forment une composante connexe et connexe par arc du groupe des isométries de l'espace euclidien. Les rotations qui fixent un point O forment une composante connexe et connexe par arc du groupe des isométries qui fixent un point O. Ce dernier groupe est compact.

preuve> Il est clair que le groupe des isométries qui fixent un point O s'identifie à **SO**$(3,\mathbb{R})$ et que ce groupe est un fermé borné de $\mathbb{R}^9$. Par ailleurs, un déplacement arbitraire peut s'écrire sous la forme :

$$\rho_{J,\theta} \circ \tau_{\vec{U}}$$

Il est donc relié au déplacement «identité» par le chemin continu :

$$t \longmapsto \rho_{J,t.\theta} \circ \tau_{t.\vec{U}} \quad t \in [0,1] \qquad \square$$

En guise de petite conclusion sur l'espace euclidien de dimension 3

Le théorème fondamental de la géométrie affine synthétique (chapitre 3 section e)) et les théorèmes 3 et 5 ci-dessus ouvrent la possibilité d'**une axiomatique synthétique assez naturelle pour l'espace euclidien**. La structure serait définie à partir des points, droites, plans, segments de droites et du groupe des isométries directes. Les axiomes d'incidence sont ceux du théorème fondamental de la géométrie affine synthétique en dimension 3. Avec quelques axiomes judicieusement choisis concernant les segments de droite, on contraint le corps des scalaires à être isomorphe à $\mathbb{R}$ et les segments de droite à être les segments au sens de ce corps ordonné. On peut ensuite définir les 2-drapeaux. Enfin le groupe des isométries directes est soumis par un dernier axiome à la contrainte d'opérer simplement transitivement sur les 2-drapeaux.

e) Généralisations

On peut généraliser la notion d'espace euclidien dans au moins deux directions évidentes.

La première est de remplacer $\mathbb{R}$ par un autre corps ordonné **R** ayant des propriétés algébriques suffisamment agréables. Dans le cadre géométrique le moins qu'on puisse demander est que le corps **R** soit un **corps euclidien**, c.-à-d. un corps ordonné où tous les positifs sont des carrés.
Hormis les théorèmes structurels 3, 4, 6 et 7 de la section d) (notez que les théorèmes 3, 4 et 6 utilisent le fait que $\mathbb{R}$ admet un seul automorphisme), tout ce qui a été démontré dans ce chapitre pour la dimension 3 reste valable avec un corps euclidien. Cela tient à ce que, quant au fond, l'algèbre utilisée se limite aux équations du second degré.

La deuxième généralisation est de passer à une dimension finie quelconque. Un espace euclidien sera un espace affine réel $\mathfrak{E}$ de dimension n avec un produit scalaire sur l'espace vectoriel associé. Signalons sans nouvelle preuve les analogues de quelques uns des théorèmes démontrés en dimension 3.

Théorème fondamental 1 : *(isométries comme produits de symétries orthogonales par rapport à des plans).* Soit τ une isométrie d'un espace euclidien de dimension n, $\mathfrak{E}$.

a) Si τ fixe n+1 points affinement indépendants, c'est l'identité $Id_{\mathfrak{E}}$.
b) Si $\tau \neq Id$ fixe n points affinement indépendants c'est la symétrie orthogonale σ_H par rapport à l'hyperplan H engendré par ces points.

c) Si τ fixe $k < n$ points affinement indépendants, mais aucun autre point en dehors du sous espace affine F qu'ils engendrent, c'est le produit de $n+1-k$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans contenant F.
d) Dans tous les cas τ est le produit de zéro, une, deux … ou $n+1$ symétries orthogonales.

Après avoir défini de manière naturelle les n-drapeaux et les (n+1)-drapeaux, on établit sans peine.

Théorème fondamental 2 : *(propriété de libre mobilité)*
a) Le groupe des isométries de $\mathfrak{E}$ opère simplement transitivement sur les (n+1)-drapeaux.
b) Le groupe des isométries directes de $\mathfrak{E}$ opère simplement transitivement sur les n-drapeaux.

Théorème 1 : Si un sous-groupe du groupe affine d'un espace réel affine de dimension n $\mathfrak{E}$ opère simplement transitivement sur les n-drapeaux, c'est le sous-groupe des isométries directes pour une distance définie dans $\mathfrak{E}$ à partir d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathfrak{E}}$. En outre, ce produit scalaire est unique à un facteur multiplicatif positif près.

Les trois théorèmes précédents sont encore valables sur un corps euclidien.
En dimension supérieure à 3, il faudrait renforcer les hypothèses algébriques concernant le corps **R** pour obtenir l'équivalent du théorème suivant. Par exemple, on peut demander que **R** soit un **corps réel clos**, c.-à-d. un corps ordonné sur lequel tout polynome qui change de signe aux extrémités d'un intervalle s'annule sur l'intervalle.

Théorème 2 : *(forme géométrique d'une déformation affine)* Toute transformation affine d'un espace euclidien peut s'écrire comme composée d'une isométrie et d'une *multiaffinité orthogonale positive*, c.-à-d. d'une application affine ayant pour forme analytique dans un repère orthonormé convenable : $Y = D.X$ avec D diagonale positive.

De la même manière voici un théorème qui donne la forme géométrique d'une isométrie directe ou indirecte, analogue à ceux obtenus en dimensions 2 et 3, et valable sur tous les corps réels clos.

Théorème 3 : *(forme géométrique d'une isométrie)* Soit φ une isométrie d'un espace euclidien $\mathfrak{E}$. Il existe un repère orthonormé dans lequel la matrice de φ est diagonale par bloc, chaque bloc étant une matrice 1×1 contenant 1 ou -1, ou une matrice 2×2 de **SO**(2,**R**). Si 1 n'est pas valeur propre l'isométrie admet un point fixe unique. Si 1 est valeur propre l'isométrie s'écrit de manière unique comme produit commutatif d'une isométrie ayant un sous-espace de points fixes $\mathfrak{F}$ et d'une translation de vecteur parallèle à $\mathfrak{F}$.

Dans le cas du corps des réels le repère orthonormé dans lequel φ admet une belle forme réduite est instable au voisinage des isométries dont les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes. Ce phénomène est bien connu des numériciens. Par exemple en dimension 4 on peut avoir deux fois la même matrice de rotation sur la diagonale, et dans ce cas le choix du premier vecteur de base est libre car tout vecteur est contenu dans un plan fixe. Cependant une petite perturbation de l'isométrie rend les deux angles distincts et l'isométrie n'admet plus alors que deux plans fixes (orthogonaux). Et cette décomposition de l'espace vectoriel en somme orthogonale de deux plans est instable.