7) DROITE PROJECTIVE REELLE, HOMOGRAPHIES

a) Introduction

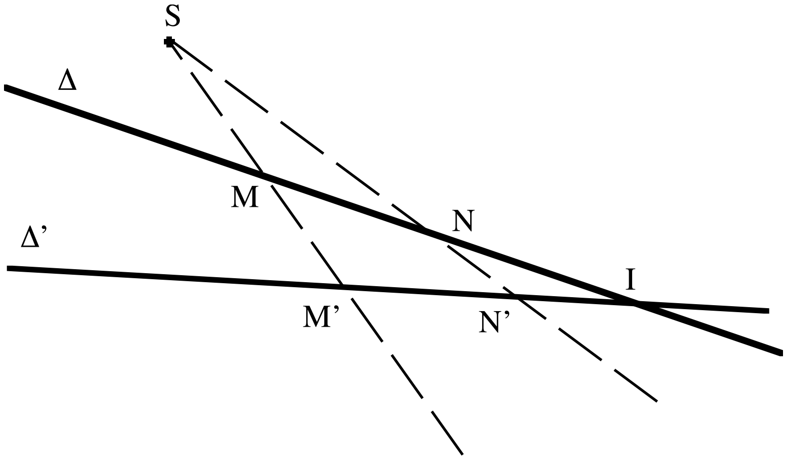
Nous développons dans ce chapitre la théorie de la droite projective réelle.

En fait, la quasi totalité des résultats vaut en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire de caractéristique 0, et 90% sont encore valables en caractéristique finie quelconque, avec un corps possédant au moins 7 éléments. Comme nous avons en vue essentiellement des résultats concernant les géométries élémentaires, seuls les cas «réel» et «complexe» nous importent vraiment.

Dans cette introduction, nous indiquons deux cadres géométriques très simples qui font intervenir les fonctions homographiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Perspective d'une droite sur une autre droite

Si nous considérons deux droites Δ et Δ' d'un plan affine réel, il y a des applications de l'une vers l'autre, définies de manière géométrique extrêmement simple, et qui ne sont pas répertoriées dans le cadre affine.



Ce sont les «perspectives depuis un sommet S extérieur aux deux droites». Si les deux droites sont parallèles, on passe de M à M’ par une homothétie, mais sinon... Considérons un repère cartésien $\Re$ ayant pour origine le point I, intersection des deux droites, avec Δ pour axe des x et Δ' pour axe des y. On a alors :

$S =_{\Re}(a,b)$, $M =_{\Re}(x,0)$, $M' =_{\Re}(0,y)$ et l'alignement des trois points s'écrit :

$$0 = \begin{vmatrix} a & x & 0 \\ b & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x-a & -a \\ b & -b & y-b \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-a)\,(y-b) - a\,b$$

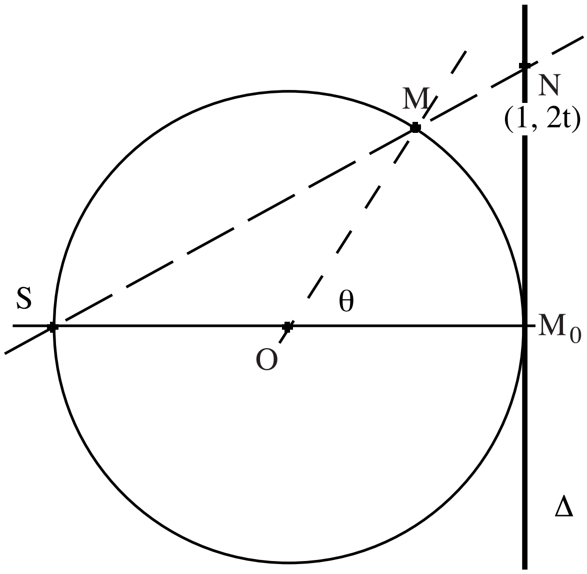
Ainsi, le passage de M à M’ (ou vice versa) est donné par une fonction homographique :

$$y = \frac{c.x + d}{e.x + f} \quad \text{avec } c.f - e.d \neq 0$$

On obtiendrait le même type de fonction si on changeait le repère affine de Δ et/ou celui de Δ' pour attribuer une abscisse à M et/ou M'.
Il est à noter que ce n'est pas tout à fait une bijection, à cause des cas où la droite variable passant par S est parallèle à Δ ou à Δ'. Pour obtenir des bijections il faut rajouter sur chacune des droites affines $\mathbb{R}$, Δ et Δ' un «point à l'infini».
De ce point de vue l'ensemble des droites passant par S est un meilleur objet, puisqu'il ne lui manque pas de point à l'infini.

Paramétrages rationnels d'un cercle

Un autre cadre géométrique naturel où apparaissent les fonctions homographiques est celui des repérages rationnels des points d'un cercle dans le plan euclidien.



On sait qu'on peut repérer un point M d'un cercle par l'angle :

$$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$$

où le point M_0 sert d'origine, mais les coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans un repère convenable ne sont pas des fonctions rationnelles du paramètre θ.
Par contre, à partir de

$$t = \mathrm{tg}(\theta/2) = \sin(\theta)/(1+\cos(\theta)),$$

on a le paramétrage rationnel :

$$M =_{\mathcal{R}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

Cela revient à paramétrer M au moyen de son image N dans une perspective de sommet S du cercle vers la droite Δ tangente au cercle en M_0, le point diamétralement opposé à S. Pour que le paramétrage soit bijectif, il faut de nouveau rajouter un point à l'infini sur la droite Δ et sur $\mathbb{R}$, ce point à l'infini correspond au point S du cercle, auquel il ne manque donc pas de point. Si maintenant on considère un changement de paramétrage rationnel correspondant au choix d'une autre origine M_0 sur le cercle, on voit qu'on obtient le nouveau paramètre t' en fonction de l'ancien par :

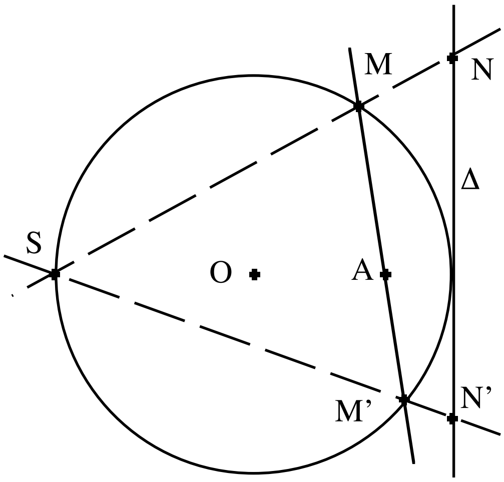
$$t' = \frac{t + t_0}{1 - t.t_0}$$

Ce qui est de nouveau une fonction homographique.

Transformations naturelles d'un cercle

De la même manière, une rotation du cercle sur lui-même se traduit, dans ce type de paramétrage rationnel, par une fonction homographique :

$$t \longmapsto \frac{t + t_0}{1 - t.t_0}$$



D'autres transformations du cercle, géométriquement simples à décrire, ont également une traduction sous forme de fonction homographique.

Considérons par exemple une *perspective du cercle sur lui-même depuis un sommet* A non sur le cercle. Nous notons $\Pi_{A,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$ cette transformation du cercle. Un calcul simple montre qu'une telle transformation du cercle se traduit par une fonction homographique pour un paramétrage rationnel :

En prenant S, O, A alignés, $A =_{\mathfrak{R}} (a,0)$, l'alignement des points M, A, M' se traduit par :

$$\begin{vmatrix} a & x_M & x_{M'} \\ 0 & y_M & y_{M'} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c.-à-d. encore $0 = \begin{vmatrix} a & 1-t^2 & 1-t'^2 \\ 0 & 2t & 2t' \\ 1 & 1+t^2 & 1+t'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1-t^2 & t^2-t'^2 \\ 0 & 2t & 2(t'-t) \\ 1 & 1+t^2 & t'^2-t^2 \end{vmatrix} = 2\,(t'-t) \begin{vmatrix} a & 1-t^2 & -(t+t') \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 1+t^2 & t+t' \end{vmatrix}$

Puisque $t \neq t'$, cela fournit la relation suivante en t et t'

$$0 = \begin{vmatrix} a & 1-t^2 & -(t+t') \\ 0 & t & 1 \\ 1+a & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1+t.t' & -(t+t') \\ 0 & 0 & 1 \\ 1+a & 2 & 0 \end{vmatrix} = (1+t.t')(1+a) - 2a$$

Ce qui équivaut à : $t.t' = (a-1)/(a+1)$

Et t' dépend de t via une fonction homographique. (on notera que $a \neq 1$ et $a \neq -1$)

Tout ceci conduit aux définitions de la section suivante.

b) Droites projectives, homographies, birapport

Comme nous venons de le voir, une droite affine à laquelle on a rajouté un point à l'infini, ou un cercle, sont des objets qui sont paramétrés de manière naturelle par $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et pour lesquels, via ce paramétrage, des bijections naturelles prennent la forme de fonctions homographiques. Nous allons donner une définition plus formelle, celle de «droite projective réelle», pour rendre compte de ce phénomène.

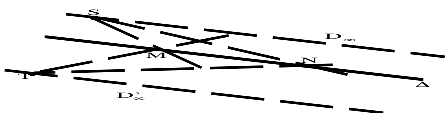
Auparavant, nous étudions un meilleur modèle de «droite projective», qui est donné par un faisceau de droites dans un plan affine.

Homographies entre faisceaux de droites

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire.

Définition 1 : Dans un plan affine, on appelle **faisceau de droites de sommet S**, et on note <S> l'ensemble des droites passant par S.
Étant donnés deux faisceaux <S> et <T> (dans un même plan ou dans deux plans distincts) on appelle **homographie du faisceau <S> vers le faisceau <T>** une application de <S> vers <T> induite par une bijection affine η du plan de <S> vers le plan de <T> telle que $\eta(S) = T$, c.-à-d. encore une bijection de la forme : $\delta \mathbin{//} \overrightarrow{U} \;\mapsto\; \delta' \mathbin{//} \varphi(\overrightarrow{U})$
où φ est une bijection linéaire.

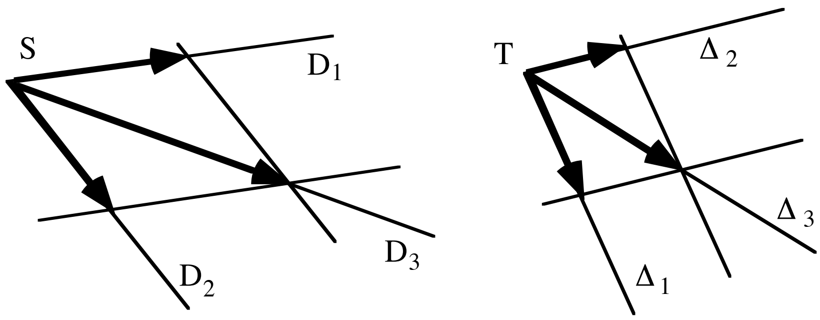
On dira que *l'homographie est induite par la bijection affine* η (ou par la bijection linéaire φ). La composée de 2 homographies est une homographie. La bijection réciproque également. Si t est la pente de δ (dans un repère cartésien donné) et t' celle de $\delta' = \eta(\delta)$ il est immédiat que t' est une fonction homographique de t. La proposition qui suit exprime qu'une «perspective de <S> vers <T>» est une homographie.



Proposition 1 : Soient dans un plan affine : Δ une droite, S, T 2 points extérieurs à Δ. Alors la transformation φ de <S> vers <T> définie par $\varphi(SN) = (TN)$ pour $N \in \Delta$, $\varphi(D_\infty) = D'_\infty$, (où D_∞ et D'_∞ sont les parallèles à Δ) est une homographie.

preuve> Il suffit de considérer 2 points A, B sur Δ et la transformation affine qui envoie A, B, S en A, B, T. ❏

Proposition 2 : Une homographie de <S> vers <T> est caractérisée par les images de 3 droites distinctes, qui peuvent être 3 droites distinctes arbitraires. Deux bijections linéaires induisent la même homographie de <S> vers <T> si et seulement si elles sont égales à une homothétie près.



preuve> *Unicité* : Cela revient à dire que si une homographie de <S> vers <S> a 3 droites fixes, c'est l'identité :
les 3 droites portent 3 vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ tels que $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{W}$ (construire un parallélogramme) . Si φ est la transformation affine on a $\varphi(\overrightarrow{U}) = \lambda\,\overrightarrow{U}$, $\varphi(\overrightarrow{V}) = \mu\,\overrightarrow{V}$, $\varphi(\overrightarrow{W}) = \upsilon\,\overrightarrow{W}$, d'où l'on tire $\lambda = \mu = \upsilon$. Ainsi φ est une homothétie et induit l'identité sur <S>.
Existence : Soient D_1, D_2, D_3 3 éléments de <S> et Δ_1, Δ_2, Δ_3 3 éléments de <T>. On choisit $\overrightarrow{U_i}$ sur D_i, (i = 1,2,3) de manière que $\overrightarrow{U_3} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$, on choisit de même $\overrightarrow{W_i}$ sur Δ_i, et on considère la transformation affine qui donne pour image du repère $(S, \overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{U_2})$ le repère $(T, \overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{W_2})$.
La deuxième affirmation résulte de la preuve de l'unicité dans la première affirmation. ❏

Remarque Le groupe des homographies d'un faisceau de droites d'un plan vers lui-même est donc isomorphe au groupe des matrices carrées 2×2 inversibles définies «à un facteur multiplicatif non nul près».

Exercice 1 : Donner, dans le cas où S et T sont deux points distincts d'un même plan affine, une construction de l'homographie cherchée de <S> vers <T> (celle qui envoie D_1, D_2, D_3 sur Δ_1, Δ_2, Δ_3) en utilisant uniquement la règle. On composera judicieusement des homographies définies comme à la proposition 1.

Birapport de 4 droites d'un faisceau

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire.

Soient δ_i (i = 1, 2, 3, 2) quatre droites d'un faisceau <S> dans un plan affine, et soit sur chacune de ces droites un vecteur $\overrightarrow{U_i}$. Supposons fixée une base de deux vecteurs par rapport à laquelle sont calculés les déterminants. Alors, le rapport :

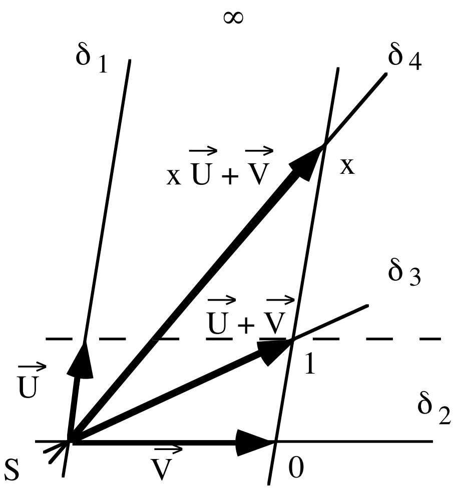
$$\boxed{\frac{\det(\overrightarrow{U_3},\overrightarrow{U_1}).\det(\overrightarrow{U_4},\overrightarrow{U_2})}{\det(\overrightarrow{U_3},\overrightarrow{U_2}).\det(\overrightarrow{U_4},\overrightarrow{U_1})} \qquad (*)}$$

ne dépend que des droites δ_i. En effet, un changement de base de référence revient à multiplier les déterminants par une constante, et un changement de vecteur $\overrightarrow{U_i}$ revient à multiplier le numérateur et le dénominateur par un même scalaire. On notera que si 2 des 4 droites coïncident, le birapport est encore défini et égal à 0, 1 ou ∞.

Définition 2 : Le rapport (*) défini ci-dessus est appelé le **birapport** des quatre droites, et on le note $[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4]$.

Les principales propriétés du birapport sont données dans la proposition suivante.

Proposition 3 :



a) Le birapport est invariant par homographie.

b) Si $\delta_1 \,//\, \overrightarrow{U}$, $\delta_2 \,//\, \overrightarrow{V}$, $\delta_3 \,//\, \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$, et $\delta_4 \,//\, x\,\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$, alors le birapport des 4 droites (prises dans cet ordre), est égal à x

c) Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sont trois droites distinctes, pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ il y a exactement une droite δ telle que $[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta] = x$.

d) Dans le quadruplet $(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ si on échange les deux premiers ou les deux derniers, le birapport x est remplacé par 1/x, si on échange les deux

extrêmes ou les deux du milieu, x est remplacé par
$1 - x$.

e) Si $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sont distinctes : $[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta] = [\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4].[\delta_1,\delta_2,\delta_4,\delta]$

On notera que le b) pourrait servir à définir le birapport.

Exercice 2 : Démontrer les affirmations de la proposition 3. Pour la question (d) on pourra prendre $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ comme en (b) et calculer les déterminants par rapport à la base $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$.

Exercice 3 : Toute permutation d'un quadruplet peut être obtenue par composition des transpositions envisagées au d). On peut ainsi calculer ce que devient le birapport par une permutation arbitraire. Faire l'étude complète des différentes valeurs du birapport obtenues par permutations des δ_i. Dans quels cas particuliers obtient-on moins que les 6 valeurs attendues en général ?

Définition de la structure de droite projective

Cette section, mis à part l'exemple 3, reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire.

Nous proposons trois définitions possibles de la structure de droite projective réelle.

Définition 3 : *(structure de droite projective réelle)*

a) Un objet Δ est dit muni d'une structure de droite projective réelle lorsqu'on a donné une famille de bijections naturelles φ_i entre cet objet et des faisceaux de droites, et que ces bijections sont *cohérentes* entre elles, c.-à-d. que pour tous i, j la bijection $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est une homographie.

b) On définit alors une **homographie** d'une droite projective Δ vers une droite projective Δ' comme une bijection cohérente, au sens où elle se traduit en homographies de faisceaux de droites.

c) Enfin, comme le birapport est invariant par homographie entre faisceaux de droites, le **birapport de 4 points d'une droite projective** est bien défini.

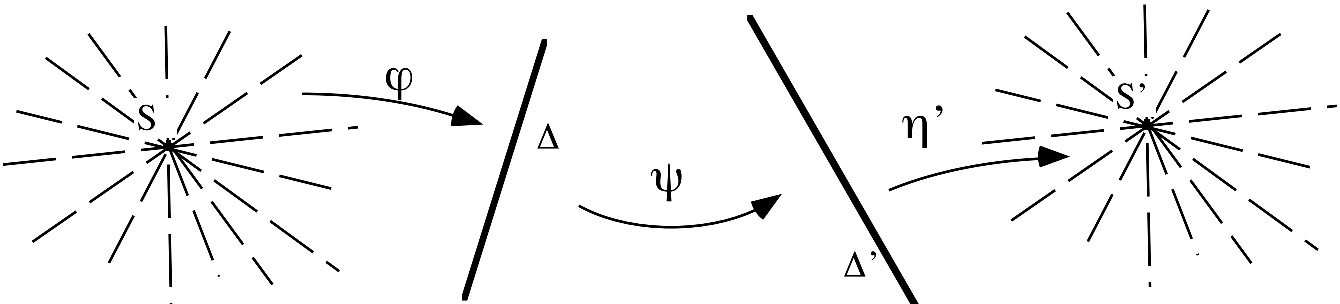


figure pour la définition 3 (b)

Exemple 1 : Tout faisceau (de droites) est une droite projective en considérant l'unique bijection «identité» du faisceau avec lui même.

Par exemple :

$$\mathbf{P_2}(\mathbb{R}) = \{\text{droites de } \mathbb{R}^2 \text{ passant par l'origine}\}$$

L'ensemble $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$ est parfois appelé *le modèle standard de droite projective réelle*.
Un point $(u,v) \neq (0,0)$ est sur une unique droite δ de $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$, est aussi appelé un *système de coordonnées homogènes* du «point» δ de la droite projective réelle $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$.
Un élément du groupe $\mathbf{PGL_2}(\mathbb{R})$ des homographies de $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$ sur elle-même opère sur les coordonnées homogènes via une application linéaire. En pratique, on identifie le groupe $\mathbf{PGL_2}(\mathbb{R})$ avec le groupe quotient de $\mathbf{GL_2}(\mathbb{R})$ par le sous-groupe des homothéties vectorielles (ici les matrices $\lambda.I_2$).

Exemple 2 : *Une droite affine* D *à laquelle on rajoute un point à l'infini* est une droite projective Δ via les bijections $\Delta \longrightarrow$ <S> : $M \longmapsto (SM)$, le point S étant un point (non sur D) d'un plan affine contenant D. La condition de cohérence est assurée par la proposition 1 (on notera que la preuve de la proposition 1 n'utilise pas le fait que les points S et T font partie d'un même plan contenant D). On obtient alors les trois résultats essentiels suivants :

Proposition 4 : *(droite affine vue comme une droite projective)*

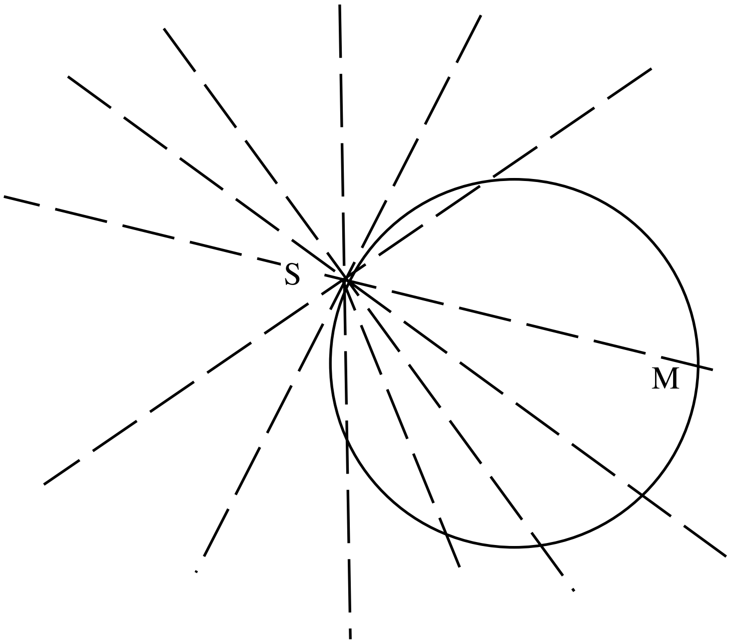
a) Étant données deux droites affines considérées avec leur structure de droite projective (on leur a rajouté à chacune un point à l'infini), les homographies sont les bijections qui s'expriment au moyen de fonctions homographiques (chaque droite est munie d'un repère affine).
b) Le birapport de 4 points A, B, C, D sur une droite affine Δ (sous-entendu, munie de sa structure naturelle de droite projective) est égal au rapport de rapports :
$$\left(\overline{CA} / \overline{CB}\right) / \left(\overline{DA} / \overline{DB}\right)$$
(si un des 4 points est à l'infini, on remplace par 1 le rapport des deux termes où il intervient).
c) Une bijection entre droites affines est affine si et seulement si c'est une homographie qui envoie le point à l'infini de la première sur le point à l'infini de la seconde.

preuve> Le (a) s'obtient en remarquant que, pour des repères convenables, à la droite de vecteur directeur (u,v) du faisceau <S> correspond le point d'abscisse u/v de la droite Δ par la bijection naturelle. Le (c) s'en déduit immédiatement. Le (b) s'obtient en appliquant la définition du birapport avec les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ pris sur les droites (SA), (SB), (SC), (SD) de <S>. ❑

Notons que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est muni d'une structure de droite projective à partir de la structure de droite affine de $\mathbb{R}$. Les homographies de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur lui-même sont alors données par les fonctions homographiques. En outre $[\infty,0,1,x] = x$ (cf. exercice 4).
La structure de droite projective réelle sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ peut aussi être définie en considérant le faisceau : $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$ = {droites de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine}, et la bijection :
$$m \longmapsto \text{la droite de pente } m.$$

Exercice 4 : Soit Δ une droite projective réelle, A, B, C, trois points de Δ. Montrer que l'homographie (unique) de Δ vers $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui envoie A, B, C sur ∞, 0, 1 est donnée par : $M \longmapsto [A,B,C,M]$

Exemple 3 : *Un cercle $\mathcal{C}$ d'un plan euclidien* est muni d'une structure de droite projective via les bijections $\mathcal{C} \longrightarrow \langle S \rangle : M \longmapsto (SM)$, le point S étant un point de $\mathcal{C}$.



La condition de cohérence est assurée par le théorème des angles inscrits qui dit que, si T est un autre point de $\mathcal{C}$ l'angle (SM,TM) est fixe, c.-à-d. que la bijection $(SM) \longmapsto (TM)$ est induite par une rotation vectorielle (qui est bien une application linéaire). On voit que les paramétrages du cercle définis dans l'introduction sont des homographies de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, (ou vers $\Delta \cup \{\infty\}$ où Δ est une tangente au cercle). En appliquant les définitions on obtient alors :

> La perspective $\Pi_{A,\mathcal{C},\mathcal{C}}$ du cercle vers lui-même (depuis un sommet A non sur le cercle) est une homographie.

en effet, elle s'exprime, via le paramétrage, par une fonction homographique.
Nous ne donnerons pas pour le moment d'interprétation du birapport de 4 points A, B, C, D sur un cercle autre que celle qui consiste à appliquer la définition : c'est le birapport des 4 droites (SA), (SB), (SC), (SD) si S est un point du cercle (le birapport ne dépend pas du choix de S)

Remarque Bien que nous ne soyons aucunement habitués à d'autres cercles que les cercles réels, les considérations qui nous ont amenés à attribuer une structure de droite projective à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans un plan affine se généralisent à n'importe quel corps de scalaires vérifiant la propriété de réalité suivante :

$$-1 \text{ n'est pas un carré}$$

C'est cette propriété qui assure que toute droite passant par un point du cercle et non tangente au cercle recoupe nécessairement le cercle. Par contre, avec les nombres complexes, un cercle est aussi une hyperbole, et les sécantes parallèles aux asymptotes coupent une hyperbole en un seul point. Il manquerait donc deux points sur un cercle affine complexe pour en faire une droite projective complexe.

Définition 3 bis : *(structure de droite projective réelle)*

a) Un objet Δ est dit muni d'une structure de droite projective réelle lorsqu'on a donné une fonction «birapport» qui associe à tout quadruplet de points distincts sur Δ un nombre réel, et à condition que cette fonction birapport vérifie les propriétés (c), (d), (e) énoncées ci-dessus dans la proposition 3.

b) Une **homographie** entre droites projectives réelles ainsi définies est alors définie comme une bijection qui conserve les birapports.

Il est clair qu'une droite projective selon la première définition l'est également selon la seconde. La réciproque nécessite un petit calcul laissé au lecteur : il faut montrer qu'à partir des propriétés (c), (d) et (e) on peut retrouver l'expression du birapport $[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4]$ à partir des 4 birapports $[\chi_1,\chi_2,\chi_3,\delta_i] = a_i$: vous devez aboutir à l'expression suivante

$$[\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4] = (a_3 - a_1).(a_4 - a_2)/(a_4 - a_1).(a_3 - a_2).$$

Une fois ce calcul fait on voit que les différentes bijections $\delta \longmapsto [\chi_1,\chi_2,\chi_3,\delta]$ de Δ vers $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (définies pour chaque triplet de points distincts (χ_1,χ_2,χ_3) sur Δ) sont cohérentes entre elles.

Nous allons donner maintenant une proposition de définition par «copie conforme d'un modèle standard», c'est l'analogue exact de la troisième proposition de définition donnée pour la structure de plan réel affine au chapitre 2. Ce procédé de définition est un procédé qui fonctionne chaque fois qu'on a défini un modèle standard et le groupe des bijections qui conservent sa structure géométrique[1].

Définition 3 ter : *(structure de droite projective réelle)*

Rappelons que nous notons $\mathbf{PGL_2}(\mathbb{R})$ le groupe des homographies de $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$. Une droite projective réelle $\mathfrak{C}$ est donnée par les objets suivants, constitutifs de sa structure

– l'ensemble des points : $\mathfrak{C}$

– un ensemble non vide $\mathcal{H}_\mathfrak{C}$ de bijections de $\mathfrak{C}$ vers $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$ (appelées homographies).

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier les axiomes :

1) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_\mathfrak{C}$, alors $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathbf{PGL_2}(\mathbb{R})$

2) si $\varphi_1 \in \mathcal{H}_\mathfrak{C}$, $\psi \in \mathbf{PGL_2}(\mathbb{R})$, alors $\psi \circ \varphi_1 \in \mathcal{H}_\mathfrak{C}$

Nous laissons le soin à la lectrice de définir les homographies dans ce cadre, et de faire le raccord avec la première proposition de définition.

Si on compare à la première proposition de définition, on voit que la différence la plus importante est que maintenant, on réclame d'avoir dans $\mathcal{H}_\mathfrak{C}$ *toutes* les homographies de $\mathfrak{C}$

[1] On a même vu dans les années 70 une définition de ce type proposée aux collégiens français pour la structure de droite réelle affine ! Comme quoi la guerre du Golfe n'est pas la preuve unique que la folie des grandeurs anime beaucoup de gens soi disant responsables.

vers $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$, alors que dans la première proposition, on réclamait seulement que les différentes homographies données soient cohérentes entre elles. L'autre différence est qu'on ne fixait pas, parmi tous les modèles naturels que sont les faisceaux de droites, un modèle standard qui serve de référence unique.
L'avantage de la première proposition de définition est qu'elle est plus proche de la pratique mathématique lorsqu'elle conduit à attribuer à tel ou tel objet une structure de droite projective réelle. Son inconvénient, qui fait qu'on ne la présente pas dans les livres «sérieux», est qu'il semble impossible de la transcrire directement en termes «sérieux» : une structure de droite projective réelle sur un ensemble sous-jacent Δ devrait être un objet unique et clairement identifié de l'univers cantorien (la classe de tous les ensembles) dans lequel on a l'habitude de plonger *tous* les êtres mathématiques[2].

Topologie de la droite projective réelle

Parmi les différents exemples de droites projectives réelles que nous avons donnés jusqu'à maintenant, c'est le cercle qui a le plus clairement une topologie. En outre un calcul simple montre que les homographies d'un cercle sont des applications uniformément continues, lipshitziennes, et cela légitime de recopier sur n'importe quelle droite projective la topologie du cercle via les homographies.

Localement une droite projective réelle est paramétrée par un réel sur un intervalle ouvert, via un morceau d'une homographie avec le modèle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Et les changements de paramétrage «légitimes», c.-à-d. qui conservent les birapports, sont obtenus en composant avec des fonctions homographiques. Cela implique que l'on sait définir sans ambigüité des phrases comme :

«la fonction $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie partout sauf peut-être en un nombre fini de points, est une fraction rationnelle»

ou «la fonction $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, est analytique»

(ou encore : dérivable, ou indéfiniment dérivable).
Autrement dit, on a bien mieux qu'une structure topologique sur la droite projective réelle. On a une structure de «variété analytique réelle» (resp. de «variété algébrique réelle») qui est définie par la donnée des fonctions analytiques $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. des fractions rationnelles).

Droite projective et dualité

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire.

---

[2] De la même manière, pour les gens «sérieux», les nombres entiers doivent *être* des ensembles, zéro doit *être* l'ensemble vide, et π doit *être* l'ensemble des suites de rationnels qui convergent vers π. Ce qui montre que ni Gauss, ni Riemann, ni aucun mathématicien avant Bourbaki n'était vraiment «sérieux».

On a défini la structure de droite projective (dans la première version) à partir de la structure d'un faisceau de droites <S> dans un plan affine $\mathcal{P}$, la «structure» étant ce qui est invariant par les homographies.
Il se trouve que nous pouvons considérer une autre structure de droite projective sur l'ensemble <S> des droites d'un faisceau. Fort heureusement pour nous, ces deux structures coïncident, et nous pourrons dans la suite ne plus y prêter attention.
Comment est définie cette deuxième structure de droite projective ?
En considérant les droites passant par S non plus du point de vue des vecteurs qu'elles portent, mais du point de vue des équations qui les définissent. Ces «équations» sont des formes affines sur $\mathcal{P}$, définies à un facteur multiplicatif près. Si Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont quatre droites de <S> et si f_i est une forme affine de noyau Δ_i il est facile de voir que f_3 et f_4 sont des combinaisons linéaires de f_1 et f_2 (on obtient avec une telle combinaison linéaire une forme affine dont le noyau est une droite passant par S, et en adaptant les coefficients, cette droite peut passer par un autre point donné a priori). En bref les quatre formes affines (définies à un facteur près) définissent 4 droites vectorielles situées dans un même plan vectoriel du dual affine $\mathcal{P}^\bullet$. En tant que telles elles ont un birapport qui, a priori, pourrait être différent de celui que nous avons défini par ailleurs.

Exercice 5 : Démontrer que le birapport de quatre droites d'un faisceau est le même du point de vue direct (birapport de 4 vecteurs coplanaires, défini comme rapport de produits de déterminants) et du point de vue dual (birapport de 4 formes affines considérées comme 4 vecteurs coplanaires du dual affine). En langage un peu plus savant, vous venez de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5 : Dans un plan affine, tout droite affine définit une droite vectorielle du dual : $\Delta \mapsto \Delta^\perp = \{ f : f \in \mathcal{P}^\bullet,\ \mathrm{Ker}(f) = \Delta \text{ ou } f = 0 \}$. Les droites d'un faisceau <S> définissent alors un faisceau de droites vectorielles, «dual», dans un plan vectoriel de $\mathcal{P}^\bullet$, et la bijection ainsi construite : $\Delta \in \langle S\rangle \mapsto \Delta^\perp \in \langle S\rangle^\perp$ est une homographie.

c) Le groupe des homographies d'une droite projective

Résultats généraux

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps commutatif arbitraire.

On appelle «homographie d'une droite projective», une homographie d'une droite projective sur elle-même.

Notation : Nous notons **PGL**(Δ) le groupe des homographies d'une droite projective Δ.

Nous rappelons tout d'abord la propriété fondamentale des homographies, qui a déjà été établie.

Théorème fondamental 1 : Une homographie entre droites projectives est caractérisée par les images de trois points distincts, images qui sont trois points distincts arbitraires.

Pour exprimer cette propriété lorsqu'on considère les homographies d'une droite projective sur elle-même, on dit parfois : *le groupe des homographies d'une droite projective opère exactement trois fois transitivement sur les points de la droite projective*.

Nous établissons maintenant quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 6 : *(droite affine et droite projective)*

a) Sur une droite projective privée d'un point, noté ∞, il existe une unique structure de droite affine vérifiant : $\overline{CA} \;/\; \overline{CB} = [A,B,C,\infty]$

b) Le sous groupe du groupe des homographies d'une droite projective formé par les homographies qui fixent un point donné s'identifie au groupe affine de la droite affine obtenue en retirant ce point.

preuve> Comme les homographies opèrent transitivement sur les points, le choix du point ∞ n'a pas d'importance. On peut alors choisir le modèle droite affine + point à l'infini, et se reporter à la proposition 4. Notez que l'identification en (b) est obtenue en supprimant ou rajoutant le point fixe à l'infini dans la bijection considérée. ❑

Proposition 7 : *(points fixes des homographies)*

a) Le sous groupe formé par les homographies qui fixent deux points est isomorphe au groupe multiplicatif des scalaires non nuls.

b) L'identité et les homographies qui fixent un unique point donné forment un sous groupe isomorphe au groupe additif des scalaires.

c) Deux homographies qui possèdent un seul point fixe sont conjuguées.

preuve> (a) On considère la structure affine en prenant un des deux points à l'infini on trouve alors le groupe des homothéties de centre fixé d'une droite affine.
(b) Même méthode, on trouve le groupe des translations d'une droite affine.
(c) Deux translations de vecteur non nul sont conjuguées dans le groupe affine. En outre, par conjugaison on déplace où l'on veut l'unique point fixe ❑

On appelle **involution** une homographie d'une droite projective distincte de l'identité, mais dont le carré est égal à l'identité.

Théorème 1 : *(homographies à deux points fixes)*

a) Si une homographie φ d'une droite projective Δ possède deux points fixes A et B, le birapport $[A,B,M,\varphi(M)]$ est un scalaire a indépendant de M (pris distinct de A et B). Deux homographies de ce type avec des scalaires a et a' sont conjuguées si et seulement si $a = a'$ ou $a = 1/a'$.

b) Réciproquement, pour tout scalaire $a \neq 0$ l'application φ définie par $[A,B,M,\varphi(M)] = a$ est une homographie.
c) Supposons la caractéristique du corps différente de 2. Alors une homographie φ avec deux points fixes A et B est une involution si et seulement si le birapport constant $[A,B,M,\varphi(M)]$ est égal à -1. En tant qu'involution, elle est entièrement caractérisée par ses deux points fixes. On la note $\sigma_{\{A,B\}}$ et on l'appelle la **symétrie par rapport à A et B**.

preuve> (a) On a pour tous M, N : $[A,B,M,N] = [A,B,\varphi(M),\varphi(N)]$ puisque A et B sont fixes et φ conserve les birapports. D'où en multipliant chaque membre par $[A,B,N,\varphi(M)]$ et en utilisant la propriété 3(e) des birapports (proposition 3), on obtient :

$$[A,B,M,\varphi(M)] = [A,B,N,\varphi(N)].$$

Considérons par ailleurs $\rho = \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$, où ψ est une homographie. C'est une homographie avec pour points fixes $A' = \psi(A)$ et $B' = \psi(B)$ et en outre, en considérant un point $M' = \psi(M)$ arbitraire, on voit que ψ transforme A, B, M, $\varphi(M)$ en A', B', M', $\rho(M')$, donc les birapports sont les mêmes. Ceci dit, l'ordre des points A et B n'est pas déterminé par la donnée de φ en tant qu'homographie, et on obtient donc par conjugaison le même birapport ou son inverse selon que l'on choisit de comparer $[A',B',M',\rho(M')]$ à $[A,B,M,\varphi(M)]$ ou à $[B,A,M,\varphi(M)]$.
On peut dire à peu près la même chose autrement : si on choisit pour ψ une involution qui échange A et B on a : $[A,B,M,\rho(M)] = 1 / [A,B,M,\varphi(M)]$.
(b) Considérons un point C et l'homographie qui envoie A, B, C en A, B, D où D est défini par : $[A,B,C,D] = a$. C'est une homographie à deux points fixes. D'après (a) et l'unicité du point faisant un birapport donné avec trois points donnés, cette homographie coïncide avec l'application φ définie par : $[A,B,M,\varphi(M)] = a$.
(c) En prenant le produit de deux homographies définies comme au (b) avec deux nombres a et a', on voit que c'est une homographie du même type, avec le nombre a.a'. D'où le résultat en résolvant : $a^2 = 1$, $a \neq 1$. ❏

Remarque Avec un corps de caractéristique 2, les homographies à un seul point fixe sont des involutions, les homographies à deux points fixes ne sont jamais des involutions, la propriété (c) n'est plus valable.

Il peut exister des involutions sans point fixe si certains éléments du corps ne sont pas des carrés (cf. théorème 3).

Théorème 2 : *(involutions)*
a) Une homographie d'une droite projective Δ qui échange deux points A et B est une involution.
b1) Étant donnés quatre points A, B, A', B' distincts, il y a exactement une involution qui envoie A sur A' et B sur B'.
b2) Étant donnés trois points A, B, B' distincts, il y a exactement une involution qui fixe A et envoie B sur B'.

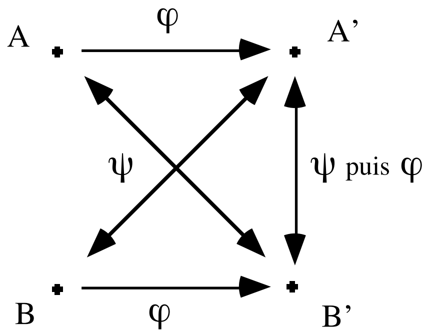
b3) Supposons la caractéristique du corps différente de 2. Étant donnés deux points A, B distincts, il y a exactement une involution qui fixe A et B.

c) Toute homographie peut s'écrire comme un produit de deux involutions.

preuve> (a) Considérons un faisceau de droites <S> : soient δ et δ' les deux éléments de <S> échangés par une homographie φ, et des vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sur ces deux droites. Sur cette base, une application linéaire ψ induisant φ donne

$$\psi(\overrightarrow{U}) = a.\overrightarrow{V} \quad \text{et} \quad \psi(\overrightarrow{V}) = b.\overrightarrow{U}\ .$$

On voit alors que ψ^2 est une homothétie de rapport a.b donc que φ^2 est l'identité.



(b3) est un simple rappel du théorème 1(c).

(b1) et (b2) résultent facilement de (a) et du théorème fondamental 1.

(c) Soit φ une homographie distincte de l'identité. Choisissons un point A non fixe, soit A' son image, choisissons un point B non fixe et distinct de A, A' et $\varphi^{-1}(A)$. De sorte que A, B, A', $B' = \varphi(B)$ sont quatre points distincts.

Soit ψ l'involution qui envoie A et B en B' et A'. L'homographie $\varphi \circ \psi$ échange A' et B' et est donc une involution. ❑

Remarque La preuve du point (c) réclame que le corps de base possède au moins 7 éléments.

Exercice 6 : Sur le modèle de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ montrez que «x et y sont en involution» si et seulement si ils vérifient une relation $a\,xy + b\,(x+y) + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.

Homographies directes et indirectes

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps ordonné arbitraire. Dans la proposition 8 c), on utilise en outre le fait que tout élément positif du corps est un carré.

Considérons le modèle standard de droite projective réelle $\mathbf{P_2}(\mathbb{R})$.

Une homographie possède un déterminant qui est défini à un carré près (puisque l'application linéaire correspondante est définie à une homothétie près). Les homographies peuvent donc être réparties en deux classes, les **directes** et les **indirectes**, selon que le déterminant est positif ou négatif. Si maintenant, on considère une droite projective réelle arbitraire Δ, et une homographie φ de cette droite, le caractère direct ou indirect de $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ où ψ est une homographie de Δ vers le modèle standard, ne dépend pas du choix de ψ et donc la définition s'étend aux homographies de Δ. La proposition suivante est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 8 : *(homographies directes et indirectes, corps ordonnés)*

a) Une homographie à deux points fixes A et B définie par le birapport λ est directe ou indirecte selon que λ est positif ou négatif.

b) Une homographie à un seul point fixe est toujours directe.

c) Une homographie sans point fixe est toujours directe.

Sur le modèle de la droite affine complétée par un point à l'infini, les homographies directes sont les fonctions homographiques «croissantes» (sur chacun des intervalles de définition si l'homographie n'est pas affine).
Sur le modèle du cercle, les homographies directes sont celles pour lesquelles un point M et son image $\varphi(M)$ «tournent dans le même sens» (pour peu qu'on fasse tourner M dans un sens déterminé).

Divisions harmoniques

Cette section est valable avec un corps de caractéristique $\neq 2$ arbitraire.
Étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite projective, on dit qu'ils forment une **division harmonique** lorsque leur birapport [A,B,C,D] est égal à -1. On dit encore que D est le **conjugué harmonique** de C par rapport à A et B. Rappelons que $\sigma_{\{A,B\}}$ désigne l'involution ayant pour points fixes A et B.

Proposition 9 : *(divisions harmoniques)*

a) La propriété pour (A,B,C,D) d'être une division harmonique est attachée uniquement à {{A,B},{C,D}}.

b) On a les équivalences suivantes pour quatre points distincts (A,B,C,D) :
(A,B,C,D) est une division harmonique $\Leftrightarrow \sigma_{\{A,B\}}(\{C,D\}) = \{C,D\}$
$\Leftrightarrow \sigma_{\{C,D\}}(\{A,B\}) = \{A,B\} \Leftrightarrow \sigma_{\{A,B\}} \circ \sigma_{\{C,D\}} = \sigma_{\{C,D\}} \circ \sigma_{\{A,B\}}$

c) Supposons que les quatre points (A,B,C,D) soient sur une droite affine Δ et d'abscisses a, b, c, d. Ils forment une division harmonique si et seulement si : $(a+b)(c+d) = 2(ab + cd)$
(si D est à l'infini la division est harmonique si et seulement si C est le milieu de [AB]).

preuve> Le point (a) résulte des propriétés du birapports par permutations.
(b) La première équivalence résulte du théorème 1 (c). Par ailleurs, pour toute homographie φ on a l'égalité : $\varphi \circ \sigma_{\{A,B\}} \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\{A',B'\}}$ avec $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$ (parce que le membre de gauche est une involution ayant A' et B' pour points fixes. On en déduit les deux dernières équivalences du (b). Notez qu'alors $\sigma_{\{A,B\}} \circ \sigma_{\{C,D\}}$ est une involution qui échange A et B d'une part, C et D d'autre part.
(c) Petit calcul laissé à la lectrice courageuse. ❏

Les involutions d'une droite projective réelle

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps euclidien, c.-à-d. un corps ordonné où tous les positifs sont des carrés.

Théorème 3 : *(classification des involutions d'une droite projective réelle)*

Il y a exactement deux classes de conjugaison pour les involutions d'une droite projective réelle : les involutions avec deux points fixes (qui sont indirectes) et les involutions sans point fixe (qui sont directes).

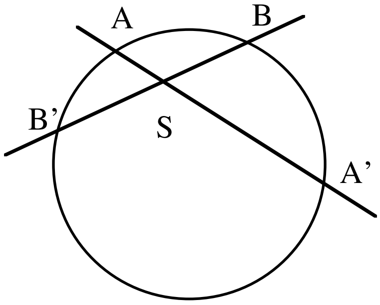
preuve> Reprenons le calcul du théorème 2 (a). On a donc la matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

En remplaçant $\overrightarrow{U}$ par $c.\overrightarrow{U}$ on remplace a par a.c et b par b/c. On peut donc se ramener à $a = b$ ou $a = -b$, dans le premier cas il y a deux points fixes, dans le second cas, aucun. Et comme deux matrices proportionnelles donnent la même homographie, il n'y a que deux types distincts d'involutions. ❏

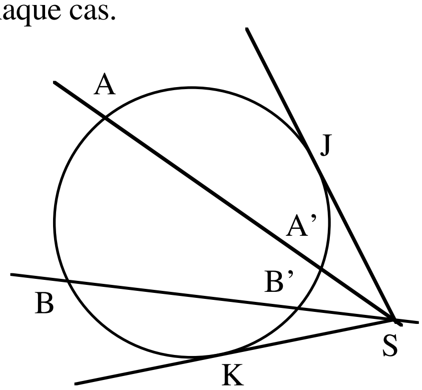
Exercice 7 : Avec un corps commutatif **K** arbitraire mais de caractéristique $\neq 2$, montrer que les involutions de la droite projective sont classifiées par les éléments du quotient $\mathbf{K}^\times/\mathbf{K}^{\times 2}$ où $\mathbf{K}^\times$ désigne le groupe multiplicatif de **K**, et $\mathbf{K}^{\times 2}$ désigne le sous-groupe des carrés.
Précisez le résultat lorsque $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$.

Proposition 10 : *(les involutions d'un cercle d'un plan euclidien)*
Considérons dans un plan euclidien un cercle $\mathfrak{C}$ muni de sa structure de droite projective réelle. On a alors :
a) Une involution sans point fixe de $\mathfrak{C}$ est une perspective $\Pi_{A,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$ depuis un point A intérieur à $\mathfrak{C}$
b) Une involution $\sigma_{\{J,K\}}$ est de l'une des deux formes suivantes :
 – si J et K ne sont pas diamétralement opposés et si S est l'intersection des tangentes en J et K, $\sigma_{\{J,K\}}$ est la perspective $\Pi_{S,\mathfrak{C},\mathfrak{C}}$ de sommet S
 – si J et K sont diamétralement opposés, $\sigma_{\{J,K\}}$ est la restriction à $\mathfrak{C}$ de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (JK)
c) Une involution sans point fixe est produit de deux involutions à points fixes.

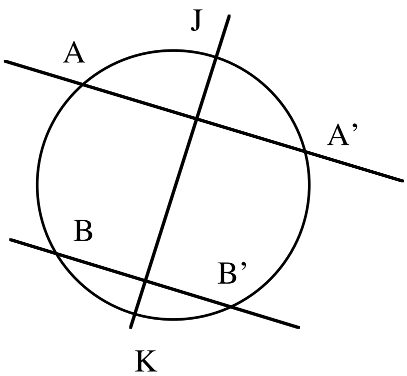
preuve> (a) et (b) : Les symétries orthogonales par rapport aux diamètres du cercle et les perspectives depuis un sommet non sur le cercle sont des involutions de $\mathfrak{C}$ (voir l'introduction). Par ailleurs, elles suffisent à décrire toute involution envoyant A et B en A' et B' avec A, B, A', B' distincts (cas de figures ci dessous). Enfin la question des points fixes est claire dans chaque cas.



droites se coupant
à l'intérieur du cercle



droites se coupant
à l'extérieur du cercle



droites parallèles

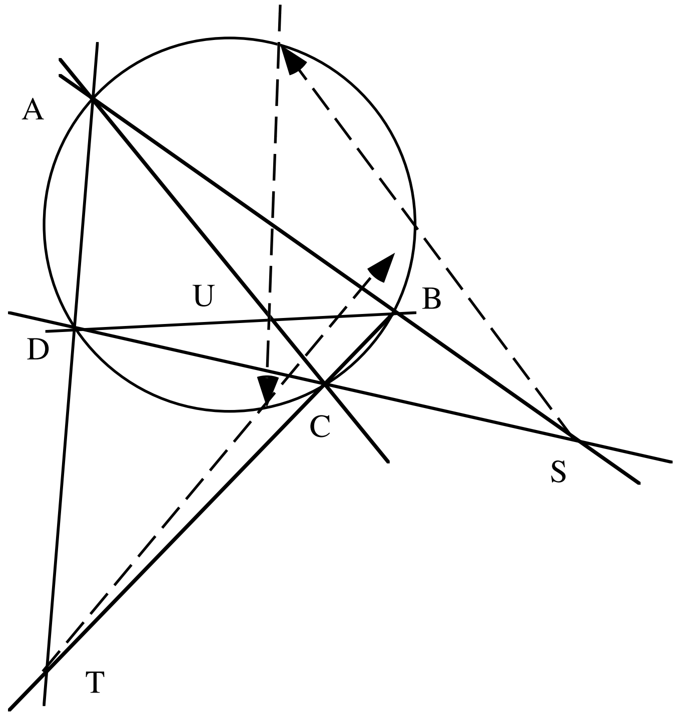
(c) On est dans le premier cas de figure ci-dessus. Composons l'involution (A,A') $\longmapsto$ (B,B') puis l'involution (B,B') $\longmapsto$ (A',A). ❑

Notez que le résultat (c) s'applique à toute droite projective réelle.

Terminologie : on dit souvent **involution à points doubles** à la place d'involution à points fixes.

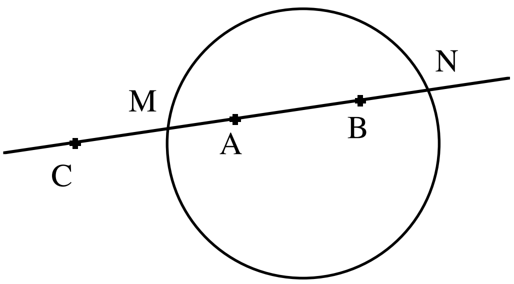
Exercice 8 :

1) Montrez que le produit des trois involutions du cercle construites comme perspectives de sommets S, U, T (figure ci-contre) est égal à l'identité, en raisonnant sur les images des points A, B, C, D.
2) En déduire un théorème non trivial de géométrie élémentaire du cercle.
3) Décrire le groupe des homographies qui conservent l'ensemble des 4 points A, B, C, D. Pensez aux cas particuliers qui peuvent se présenter, par exemple celui d'une division harmonique.



Théorème fondamental 2 : *(homographies comme produits d'involutions)*

Toute homographie d'une droite projective réelle peut s'écrire comme produit de deux involutions.
Si l'homographie est indirecte elle s'écrit comme produit d'une involution à points doubles et d'une involution sans point double, sinon elle s'écrit comme produit de deux involutions à points doubles.



preuve> La première affirmation est un simple rappel du théorème 2 (c). La deuxième affirmation s'en déduit immédiatement. Il reste à montrer que le produit de deux involutions sans points doubles peut aussi s'écrire comme produit de deux involutions à points doubles. Prenons de nouveau le modèle du cercle. Soient A et B les centres des perspectives de C sur C réalisant les deux involutions sans points doubles. Les points A et B sont intérieurs au cercle et la droite (AB) le coupe en M et N. Soit alors C un point sur (AB) à l'extérieur de C. Le produit des trois perspectives de centres A, B et C échange M et N, c'est donc une involution, qui par raison de parité est indirecte, donc à points double. _

Exercice 9 : Construire avec une règle le point D centre de la perspective qui réalise l'involution $\Pi_{C,\mathcal{C},\mathcal{C}} \circ \Pi_{B,\mathcal{C},\mathcal{C}} \circ \Pi_{A,\mathcal{C},\mathcal{C}}$ considérée à la fin de la preuve précédente.

Orientation de la droite projective réelle

Cette section reste valable si on remplace le corps $\mathbb{R}$ par un corps ordonné.

Un cercle est, au moins intuitivement, susceptible d'être orienté de deux manières en précisant un des deux sens de parcours possibles. Lorsque nous avons parlé des homographies directes, nous avons dit que dans le cas du cercle, ce sont celles qui conservent le sens de rotation (si M tourne dans un certain sens, son image tourne dans le même sens).
Le lecteur pourra essayer de se convaincre de ce résultat, par exemple en considérant un paramétrage homographique naturel du cercle (cf. l'introduction du chapitre).
Lorsqu'un cercle est orienté, les homographies directes sont donc celles qui conservent l'orientation.

Soit maintenant un cercle orienté $\mathcal{C}$ et une droite projective réelle Δ, les homographies de Δ vers $\mathcal{C}$ sont réparties en deux classes d'équivalence pour la relation : $\varphi \circ \psi^{-1}$ est directe.
On dira qu'*on a défini une orientation sur une droite projective réelle* Δ lorsqu'on a spécifié une de ces deux classes comme étant celle qui conserve l'orientation.

Nous nous en sommes tenus à une présentation purement intuitive pour le cas du cercle, et nous nous sommes un peu fatigués pour le cas général.

Il est également possible de développer une théorie purement algébrique de l'orientation d'une droite projective avec un corps de base ordonné (pas nécessairement $\mathbb{R}$).
On peut définir une structure de «sens de parcours circulaire» sur un ensemble $\mathbb{A}$ un peu à la manière dont on définit une relation d'ordre total. Au lieu de définir « x est avant y » comme on le fait pour une structure d'ordre total, on définit « en allant de x à y dans le sens convenu, on passe par z ». Il s'agit donc d'une relation ternaire $\Gamma(x,y,z)$ sur l'ensemble $\mathbb{A}$, relation qui doit vérifier des axiomes convenables.
De même qu'une relation d'ordre total permet de produire une liste en ordre croissant d'éléments à partir d'une liste d'éléments distincts, une relation de sens de parcours circulaire permet de produire un **cycle** (une permutation circulaire) à partir d'une liste d'éléments distincts. Relations d'ordre total et sens de parcours circulaires sont donc étroitement liés. Explicitons ceci.
Une liste finie de longueur n formée d'éléments distincts code un cycle d'ordre n : par exemple la liste [a,b,c,d] code le cycle $a \mapsto b \mapsto c \mapsto d \mapsto a$. Et un cycle d'ordre n est codé par exactement n listes distinctes.
Un ordre total définit donc un sens de parcours circulaire : considérer pour chaque partie finie le cycle associé à la liste mise en ordre croissant.

En rajoutant un point «à l'infini» à un ensemble totalement ordonné, on obtient un ensemble avec sens de parcours circulaire, le point rajouté est à la fois en $+$ l'infini et en $-$ l'infini, l'ordre total disparaît mais cela donne un sens de parcours circulaire.
En enlevant un point à un ensemble avec sens de parcours circulaire, on obtient un ensemble totalement ordonné : pour ordonner une partie finie, on rajoute le point à l'infini, on considère le cycle que cela définit, et on considère le codage de ce cycle par une liste se terminant par le point à l'infini.
Après avoir développé une telle formalisation algébrique de la notion de sens de parcours circulaire, on peut démontrer que toute droite projective (sur un corps ordonné) possède deux sens de parcours circulaires naturels, de la même manière qu'une droite affine possède deux ordres totaux naturels. On peut alors donner une définition purement algébrique de la notion de droite projective orientée, et démontrer (de manière purement algébrique) les résultats affirmés au début de la section.

d) Intersection de deux faisceaux de droites en homographie dans un même plan affine

Fonctions polynômes sur un plan affine

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine défini sur un corps commutatif $\mathbf{K}$, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}_1$ deux repères affines de $\mathcal{P}$. Pour $M \in \mathcal{P}$, si on a $M =_{\mathfrak{R}} (x,y)$ et $M =_{\mathfrak{R}_1} (x_1,y_1)$ le passage de (x_1,y_1) à (x,y) est obtenu par une formule de changements de coordonnées :

$$x = ax_1 + by_1 + c$$
$$y = dx_1 + ey_1 + f \quad \text{avec} \quad (ae - bd \neq 0)$$

Si maintenant $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{K}$ est une fonction qui s'exprime sous la forme :

$$\phi(M) = \phi_{\mathfrak{R}}(x,y) \quad (\text{avec } M =_{\mathfrak{R}} (x,y)),$$

alors on peut également l'exprimer, dans le repère $\mathfrak{R}_1$, sous la forme :

$$\phi(M) = \phi_{\mathfrak{R}_1}(x_1,y_1) \quad (\text{avec } M =_{\mathfrak{R}_1} (x_1,y_1))$$

d'où :
$$\phi_{\mathfrak{R}_1}(x_1,y_1) = \phi_{\mathfrak{R}}(ax_1 + by_1 + c,\ dx_1 + ey_1 + f)$$

Donc : si $\phi_{\mathfrak{R}}$ est un polynome de degré exactement n (en (x,y)), alors $\phi_{\mathfrak{R}_1}$ est un polynome de degré inférieur ou égal à n (en (x_1,y_1)). Enfin, on remarque que l'implication est encore valable si on échange les rôles de $\phi_{\mathfrak{R}}$ et $\phi_{\mathfrak{R}_1}$, ce qui montre que *le degré du polynome est indépendant du repère.*
Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 4 : Une fonction $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{K}$ définie sur un plan affine $\mathcal{P}$ est dite une **fonction polynome de degré n** si, dans un repère $\mathfrak{R}$ de $\mathcal{P}$, la fonction ϕ s'exprime au moyen d'une fonction polynome de degré n (de $\mathbf{K}^2$ dans $\mathbf{K}$).

Remarque La définition (et sa légitimation préalable) s'étend sans difficulté au cas d'espaces affines de dimension quelconque au départ et à l'arrivée (remplaçant $\mathcal{P}$ et $\mathbf{K}$).

Définition 5 : L'ensemble des points de $\mathfrak{P}$ qui annulent un polynome donné de degré 2, s'il possède au moins deux points, est appelé une **conique**.
Une conique est dite **décomposée** si elle contient une droite.

Remarque Dès qu'une conique contient trois points alignés A, B, C elle contient toute la droite (AB) : en effet, la restriction du polynome à la droite (AB) est une polynome de degré ≤ 2 «en une seule variable» et s'annulant en trois points, donc identiquement nul.

Intersection de faisceaux en homographie

Proposition 11 :

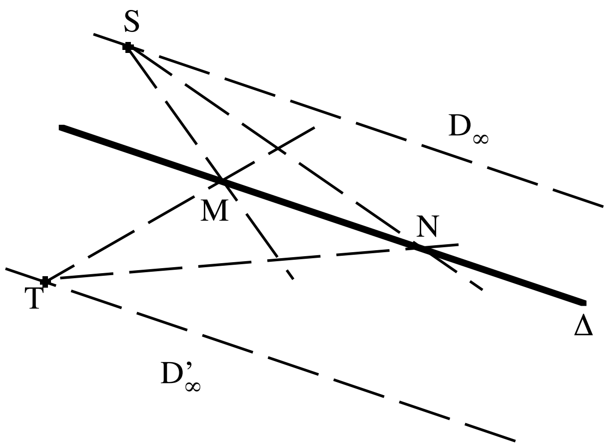
Soient S et T deux points distincts d'un plan affine et φ une homographie de <S> vers <T>. Notons $\mathfrak{C}$ l'ensemble

$$\{M \mid \exists\, D \in \langle S\rangle,\ M = D \cap \varphi(D)\}.$$

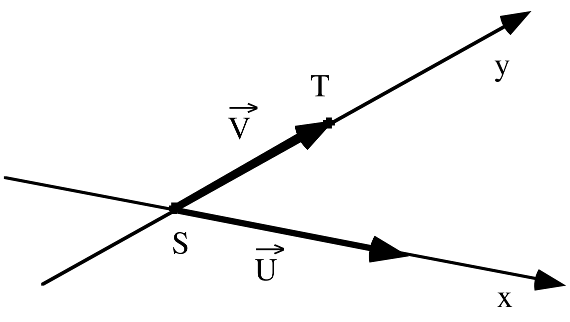
a) Lorsque $\varphi(ST) = (ST)$, ou bien l'homographie peut être définie comme à la proposition 1 (et l'ensemble $\mathfrak{C}$ est la réunion de deux droites), ou bien $\varphi(D)$ reste constamment parallèle à D (et l'ensemble $\mathfrak{C}$ est réduit à (ST)).

b) Lorsque $\varphi(ST) \neq (ST)$, l'ensemble $\mathfrak{C}$ est une conique non décomposée passant par S et T.

preuve> Voyons le premier cas.
Si pour deux positions de D distinctes de (ST), la droite $\varphi(D)$ est parallèle à D, l'homographie coïncide, en trois «points» donc partout, avec celle induite par la translation de vecteur $\overrightarrow{ST}$.



Sinon on considère deux positions de D telles que $\varphi(D)$ est sécante avec D, en deux points M et N. Et alors l'homographie φ coïncide, en les trois «points» (SM), (SN), (ST), donc partout, avec celle définie à la proposition 1 à partir de la droite (MN).



Passons au deuxième cas.
Soit $(S, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ un repère tel que

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{ST} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U} \ // \ \varphi^{-1}(ST).$$

On peut choisir la transformation affine ψ qui induit φ de manière que :

$$\psi(\overrightarrow{U}) = \overrightarrow{V}$$

(parce que ψ est définie à une homothétie près). On a alors $\psi(\overrightarrow{V}) = a\,\overrightarrow{U} + b\,\overrightarrow{V}$ avec $a \neq 0$. Soit $M =_{\mathfrak{R}} (x,y)$ arbitraire. On a :

$$\overrightarrow{SM} =_{\mathfrak{R}} (x,y),\quad \overrightarrow{TM} =_{\mathfrak{R}} (x,y-1),\quad \psi(\overrightarrow{SM}) = (ya, x+yb).$$

Pour que M soit de la forme $D \cap \psi(D)$ (en supposant $M \neq S,T$) il faut et suffit que $\overrightarrow{TM}$ et $\psi(\overrightarrow{SM})$ soient proportionnels, ce qui donne :

$$ay^2 - x^2 - bxy - ay = 0 \qquad (1)$$

On obtient donc une courbe du second degré qui coupe la droite (ST) en les deux points $S =_{\mathfrak{R}} (0,0)$ et $T =_{\mathfrak{R}} (0,1)$. (petit calcul facile)

Montrons que cette conique n'est pas décomposée. Le seul point de $\mathfrak{C}$ sur (Sx) est le point S $(x^2 = 0)$. Si $\mathfrak{C}$ contient une droite Δ, Δ doit couper (Sx) en S ou être parallèle à (Sx). Dans ce dernier cas, c'est nécessairement la parallèle passant par T. Or, par construction, toute droite passant par S ou T ne coupe $\mathfrak{C}$ qu'en au plus un point différent de S et T. ❑

Notez qu'on a obtenu de cette manière toute conique qui dans un repère convenable, possède une équation : $ay^2 - x^2 - bxy - ay = 0$ avec $a \neq 0$ (1)

Réciproques et théorème de Pascal

Nous considérons ici des coniques non décomposées (elles ont au moins deux points distincts, selon notre définition)

Lemme Étant donnés deux points S et T sur une conique non décomposée, il y a un repère cartésien où elle possède une équation de la forme (1) ci-dessus et où les deux points ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(0,1)$

preuve> Si on a un repère où S et T ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(0,1)$, l'équation de la conique dans ce repère est du type

$$e\,x^2 + f\,y^2 + g\,xy + h\,x - f\,y = 0$$

Le coefficient f est non nul, parce que la conique ne contient pas la droite $x = 0$.
On a droit à un changement de variables $y \longmapsto Y + u\,X$, $x \longmapsto X$, puisqu'il fixe les couples $(0,0)$ et $(0,1)$.
Puisque $f \neq 0$, un tel changement de variable permet d'annuler le coefficient h de x. On se retrouve donc (après le changement de repère cartésien correspondant à ce changement de variable) avec une équation de la forme :

$$E\,X^2 + F\,Y^2 + G\,XY - F\,Y = 0$$

Le coefficient E est non nul, parce que la droite $Y = 0$ n'est pas contenue dans la conique.
En divisant par $-E$ on obtient la forme (1) annoncée ❑

On déduit du lemme précédent, et du fait qu'une droite coupe une conique non décomposée en au plus deux points, la réciproque suivante de la proposition 11.

Proposition 12 : Soit $\mathfrak{C}$ une conique non décomposée avec deux points S, $T \in \mathfrak{C}$. Alors l'application de $<S>$ vers $<T>$ définie par $(SM) \longmapsto (TM)$ lorsque M parcourt $\mathfrak{C}$, est une homographie vérifiant $\varphi(ST) \neq (ST)$.

Corollaire : Soit $\mathfrak{C}$ une conique non décomposée avec cinq points distincts $A, B, C, D, S \in \mathfrak{C}$. Alors le birraport $[(SA),(SB),(SC),(SD)]$ en dépend pas du point S.

On l'appelle le **birapport des points** A, B, C, D **sur la conique** $\mathcal{C}$ et on le note [A, B, C, D].

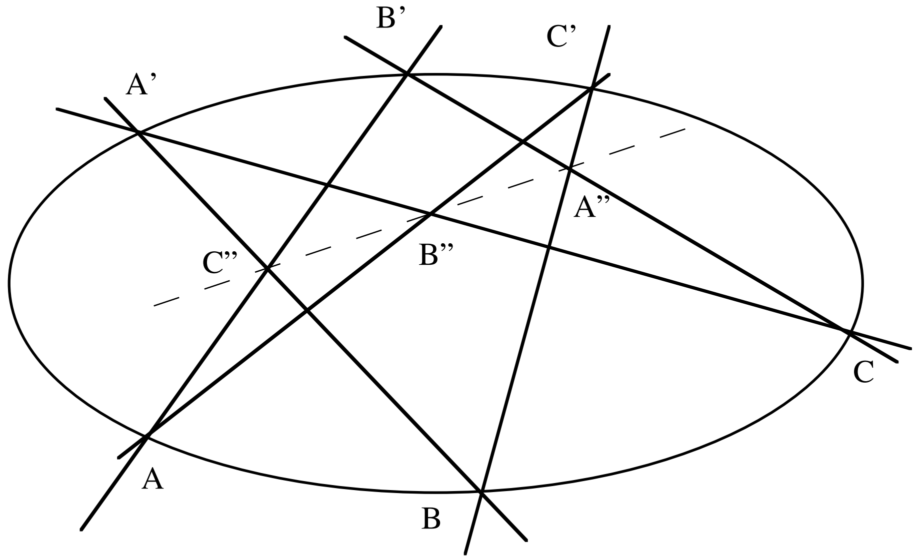
Une autre conséquence est la suivante.

Proposition 13 : Par cinq points, non trois alignés, il passe exactement une conique non décomposée.

preuve> Appelons S, T, M_1, M_2, M_3 ces 5 points, les 3 droites (SM_1) (SM_2) (SM_3) sont distinctes, ainsi que les 3 droites (TM_1) (TM_2) (TM_3), il existe donc exactement une homographie φ de <S> vers <T> qui envoie (SM_i) en (TM_i) (i = 1, 2, 3). Si on avait $\varphi(ST) = (ST)$ alors en appelant Δ la droite (M_1M_2) on voit que φ coïnciderait avec l'homographie définie à la proposition 1 et donc que M_3 serait aligné avec M_1 et M_2 (ce qui n'est pas, par hypothèse). Ainsi $\varphi(ST) \neq (ST)$. Cela montre l'existence de la conique (par la proposition 11) et son unicité (par la proposition 12). ❑

Exercice 10 : Montrez que si deux coniques non décomposées, d'équations respectives $\varphi(M) = 0$ et $\psi(M) = 0$, coïncident, il existe un scalaire non nul k tel que $\varphi = k.\psi$.

Enfin on en déduit le :



Théorème de Pascal

Étant donnés six points A, B, C, A', B', C' sur une conique non décomposée, on pose A" = (BC') ∩ (B'C), B" = (CA') ∩ (C'A), C" = (AB') ∩ (A'B) (s'ils existent) ; alors A", B", C" sont alignés.

Si A" et C" existent et B" n'existe pas (c.-à-d. (CA') / / (C'A)), alors (A"C") / / (AC') / / (A'C).

Si A" et B" n'existent pas, C" n'existe pas non plus.

preuve> Nous traitons le cas où (AB') coupe (BA').

D'après l'hypothèse, il n'y a aucun alignement de 3 points parmi A, B, C, A', B', C'.

En particulier C" n'est ni sur la droite (A'C) ni sur la droite (B'C).

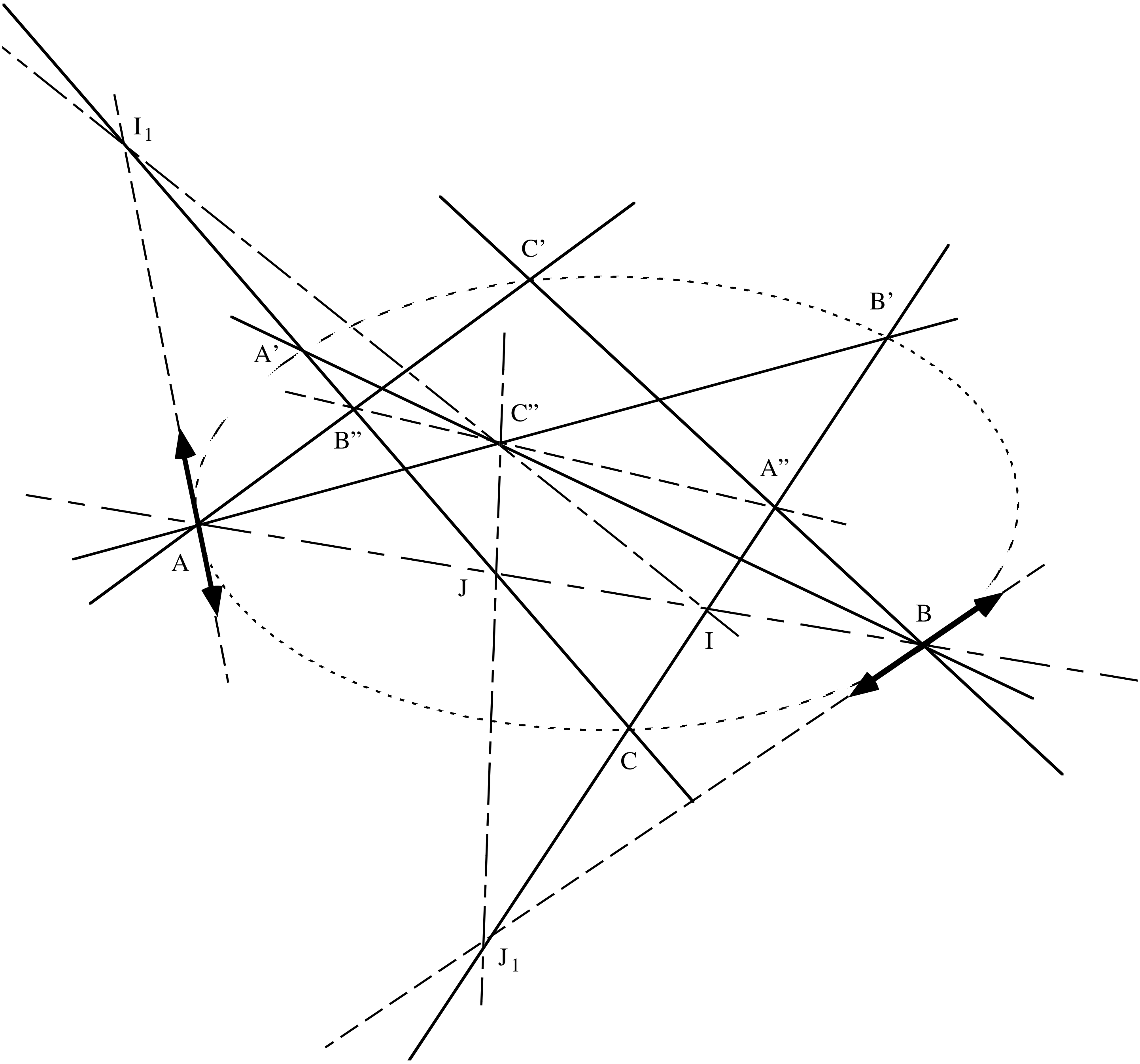
Considérons alors les 2 homographies suivantes.

φ : <A> $\longrightarrow$ <C''> définie comme à la proposition 1, et via la droite (A'C)

ψ : <C''> $\longrightarrow$ <B> définie comme à la proposition 1, et via la droite (B'C)

En composant on obtient une homographie $\theta : \psi \circ \varphi$: <A> $\longrightarrow$ <B> : les points d'intersection $\Delta \cap \theta(\Delta)$, pour 5 positions particulières de $\Delta \in$ <A> faciles à identifier sont : A, B, C, A', B'.

Pour la position de $\Delta \in$ <A> : Δ = (AC'), on doit avoir $\theta(\Delta)$ = (BC') cela démontre



l'alignement des 3 points A'', B'', C''.

Toujours en gardant A, B, C, A', B' fixes et en considérant A''B''C' comme variables, voyons se passe lorsque (AC') / / (A'C) : B'' n'existe plus et (C''A'') devient parallèle à (A'C).

Enfin si C'' existe on voit qu'on ne peut pas avoir à la fois : A'' et B'' n'existent pas ; donc : si A'' et B'' n'existent pas, alors C'' n'existe pas non plus. ❏

On remarquera sur le dessin la construction des tangentes en A et B obtenues comme positions limites de sécantes dans le cas réel. On peut également donner une preuve algébrique qu'il s'agit de tangentes en A et B au sens algébrique, c.-à-d. que la restriction du polynome du second degré à la droite affine considérée possède le point considéré comme racine multiple.

Classification des coniques non décomposées dans un plan affine

Nous supposons ici que le corps de base **K** est de caractéristique $\neq 2$.
Nous rappelons que dans notre définition les coniques ont toujours au moins deux points distincts dans le plan affine considéré.

Nous donnons les préalables nécessaires à la classification des coniques pour un corps commutatif arbitraire, mais nous ne faisons le travail en entier que pour le cas réel.

On a vu que les coniques non décomposées ayant au moins deux points sont les courbes qui, dans un repère cartésien convenable, admettent une équation de la forme :

$$aY^2 - X^2 - bXY - aY = 0 \text{ avec } a \neq 0 \qquad (1)$$

Le changement de variable $X' = X + bY/2$, $Y' = Y$ nous ramène à une équation de la forme :

$$(a+b^2/4)Y'^2 - X'^2 - aY' = 0 \text{ avec } a \neq 0 \qquad (2)$$

Si $(a+b^2/4) = 0$, on considère le changement de variable $y = X'$, $x = -aY'$ et on obtient :

$$y^2 - x = 0 \qquad (3)$$

Une conique qui possède une telle équation est appelée une **parabole**. On vérifie facilement «la réciproque», à savoir que l'équation (3) est bien celle d'une conique non décomposée.
Si $(a+b^2/4) = c \neq 0$, on considère le changement de variable $x' = X'$, $y' = Y' - a/2c$ et on obtient :

$$cy'^2 - x'^2 + e = 0$$

avec $-ce = a^2/4 \neq 0$, $(a+b^2/4) = c$
c.-à-d. encore $\qquad 4c^2y'^2 - 4cx'^2 - a^2 = 0$
En posant $x = 4cy'/a$, $y = x'$, $f = -4c/a^2$ on obtient l'équation :

$$x^2 + f\,y^2 - 1 = 0 \text{ avec } f \neq 0 \qquad (4)$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que pour $f \neq 0$, l'équation (4) est bien celle d'une conique non décomposée (avec au moins les deux points (1,0) et (–1,0)).
Par changement de variable, on peut remplacer f par fu^2 pour $u \neq 0$.
Remarquons aussi qu'une parabole n'a pas de centre de symétrie tandis qu'une conique d'équation (4) est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autre centre de symétrie, et on parle alors de **conique à centre**.
Résumons les résultats obtenus :

Théorème 4 : Toute conique non décomposée est une parabole ou une conique à centre. Leurs équations respectives, dans des repères cartésiens convenables sont :

– $y^2 - x = 0$ (parabole), et
– $x^2 + f\,y^2 - 1 = 0$ avec $f \neq 0$ (coniques à centre)

Lorsque $-f$ est un carré, on est ramené à l'équation :

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \qquad (4a)$$

ou encore à une équation $$X.Y - 1 = 0 \qquad (4a')$$

On dit alors que la conique est une **hyperbole**. Les droites $X = 0$ et $Y = 0$ sont appelées les **asymptotes** de l'hyperbole.

Exercice 11 : Montrez que les asymptotes d'une hyperbole sont définies sans ambiguïté.

Étudions maintenant plus en détail le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$.
Lorsque $-f$ n'est pas un carré, f est positif, et on se ramène à une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

on dit que la conique d'équation (4b) est une **ellipse**. Il est facile de voir qu'une ellipse n'est pas une hyperbole, par exemple en remarquant que les coordonnées des points d'une ellipse, dans n'importe quel repère, sont bornées, ce qui n'est pas le cas des hyperboles. On obtient donc :

Théorème 5 : *(classification affine des coniques réelles non décomposées)*
Toute conique réelle non décomposée est une parabole ou une ellipse ou une hyperbole. Modulo les transformations affines du plan, cela donne exactement trois types distincts.

Remarque La classification reste clairement valable pour un corps euclidien (corps ordonné où tous les positifs sont des carrés). Sur le corps des complexes, toute conique à centre est une hyperbole (i.e., elle admet une équation $xy = 1$ dans un repère cartésien convenable).

Exercice 12 : Pour un corps commutatif arbitraire de caractéristique $\neq 2$ montrez que la classification des coniques à centre est donnée par la classe d'équivalence multiplicative de f modulo les carrés (on se reporte à l'équation générale (4)).

e) Théorèmes structurels

Thème d'étude Il serait intéressant de caractériser «géométriquement», parmi les groupes qui opèrent exactement trois fois transitivement sur un ensemble donné, ceux qui sont isomorphes à un groupe d'homographies $\mathbf{PGL_2(K)}$ (pour un corps commutatif $\mathbf{K}$.) Par exemple le sous groupe des éléments qui fixent deux points donnés doit être commutatif.

Nous proposons ici seulement deux théorèmes structurels concernant le cas réel.

Théorème 1 : Une bijection d'une droite projective réelle qui conserve les divisions harmoniques est nécessairement une homographie.

preuve> Considérons le modèle : $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On peut supposer que 0, 1 et ∞ sont fixes par la bijection φ considérée. Alors -1 est fixe à cause de la division harmonique

$[0,\infty,1,-1]$. Plus généralement $\varphi((a+b)/2) = (\varphi(a)+\varphi(b))/2$ cause de la division harmonique :

$$[(a+b)/2,\infty,a,b].$$

En remplaçant a par 0 et b par $(a+b)$ dans l'égalité précédente, il vient :

$$\varphi((a+b)/2) = \varphi(a+b)/2.$$

D'où en juxtaposant les deux égalités : $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$. En particulier $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

De plus la relation $(a+b)(c+d) = 2(ab + cd)$ est invariante par φ. En prenant $c = 1$, $b = -a$, $d = a^2$, on obtient $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$. Enfin en remplaçant a par $a+b$ dans cette égalité et en utilisant la stabilité pour l'addition :

$$\varphi((a+b)^2) = (\varphi(a+b))^2 = (\varphi(a)+\varphi(b))^2 = \varphi(a)^2+\varphi(b)^2+2\varphi(a).\varphi(b)$$
$$\varphi((a+b)^2) = \varphi(a^2+b^2+2ab) = \varphi(a^2)+\varphi(b^2)+\varphi(ab)+\varphi(ab)$$

D'où $\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$.

Et on conclut en remarquant que $\mathbb{R}$ n'admet qu'un seul automorphisme : l'identité. ❑

Exercice Formulez et démontrez un théorème du même goût avec une droite projective sur un corps arbitraire de caractéristique $\neq 2$.

Théorème 2 : Tout automorphisme du groupe des homographies d'une droite projective réelle est intérieur.

Nous donnerons la preuve de ce théorème lorsque nous interpréterons ce groupe comme groupe des isométries d'un plan hyperbolique (cf. chapitre 9, section d)).