5) GEOMETRIE METRIQUE DE LA SPHERE

Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les propriétés géométriques de la sphère «pour elle-même», c.-à-d. les propriétés qui ne dépendent que de la métrique naturelle de la sphère, et non de son plongement dans l'espace euclidien de dimension 3.

Ces propriétés sont extrêmement voisines de celles du plan euclidien. En particulier, les groupes d'isométrie respectifs de ces deux espaces se ressemblent beaucoup. Localement, la différence est imperceptible.

Nous commençons par des définitions qui ont une certaine part d'arbitraire, mais qui sont justifiées par les analogies qu'elles induisent avec le plan euclidien. Nous étudions quelques figures simples. Nous terminons par l'étude du groupe des isométries.

a) Propriétés élémentaires de la distance

Notations et définitions

La sphère pour elle-même

On considère une sphère $\mathcal{S}$ de rayon R et de centre O dans un espace euclidien de dimension 3 $\mathcal{E}$. Notre but est d'étudier $\mathcal{S}$ pour elle-même, abstraction faite de son plongement dans l'espace. De ce point de vue, la sphère ressemble beaucoup à un plan : possibilité de glisser sur elle-même avec trois degrés de liberté, de tourner autour d'un de ses points etc... Ce chapitre vise à préciser cette ressemblance.

Une étude similaire pourrait être faite avec une sphère «de dimension 3» ensemble des points équidistants d'un point donné dans un espace euclidien de dimension 4. Cette étude ne présenterait pas de difficulté technique supérieure à celle de $\mathcal{S}$, l'avantage est ici cependant que nous avons une intuition immédiate de la sphère de dimension 2.

Nous commençons par préciser la terminologie que nous utiliserons. Elle semblera arbitraire au départ et sera justifiée dans les paragraphes suivants.

Plan sphérique

Tout d'abord nous considérerons $\mathcal{S}$ comme une «surface» (c.-à-d. quelque chose de dimension 2) suffisamment régulière pour mériter le nom de **plan**, ou de **plan sphérique** par opposition à plan euclidien. Ici, le mot plan s'oppose au mot plat, seul le plan euclidien est plat. Nous parlerons donc du plan $\mathbb{S}$. Lorsque nous voulons parler d'un plan de l'espace euclidien, nous expliciterons «plan de $\mathbb{E}$».

Points antipodaux

Deux points de $\mathbb{S}$ sont dits antipodaux sur $\mathbb{S}$ lorsqu'ils sont diamétralement opposés dans l'espace euclidien.

Droite de la sphère

Nous appellerons droite de $\mathbb{S}$ un grand cercle, c.-à-d. l'intersection de $\mathbb{S}$ avec un plan passant par O. On obtient immédiatement :

- Une droite qui passe par un point passe par son antipode.
- Par deux points non antipodaux il passe exactement une droite.
- Deux droites distinctes se coupent en deux points antipodaux.
- Par deux points antipodaux, il passe une infinité de droites.

Étant donnés deux points non antipodaux, on notera (AB) la droite de $\mathbb{S}$ passant par A et B. Si exceptionnellement on doit considérer la droite de $\mathbb{E}$ passant par A et B on la notera $(AB)_{\mathbb{E}}$. Si A et B sont antipodaux et C est un troisième point on notera (AB_C) la droite passant par A, B et C.

Droite orientée, demi-plan, axe pointé, drapeau

On dit qu'on a orienté une droite de $\mathbb{S}$ lorsqu'on a défini un sens de parcours sur cette droite. Pour donner une définition correcte correspondant à cette intuition, il faudrait pas mal se fatiguer. Nous reviendrons sur cette question au chapitre 7 section c).

Une droite du plan $\mathbb{S}$ le partage en deux. Chacune des deux parties, bord compris, est une demi-sphère de $\mathbb{E}$, et nous l'appellerons un **demi-plan** (de $\mathbb{S}$.)

Un axe pointé est par définition, comme dans le plan euclidien, un couple (A,Δ) où A est un point, et Δ une droite orientée passant par ce point. Un drapeau, de même, est un triplet (A,Δ,Π) où (A,Δ) est un axe pointé et Π est un demi-plan de bord Δ.

Segment [AB]

Étant donnés deux points non antipodaux A et B, la droite (AB) est séparée en deux morceaux par les points A et B. Le plus court des deux arcs du grand cercle (AB) d'extrémités A et B est appelé le segment d'extrémités A et B. On le note [AB]. Si exceptionnellement on doit considérer le segment de $\mathbb{E}$ d'extrémités A et B on le notera $[AB]_{\mathbb{E}}$. Si A et B sont antipodaux et C est un troisième point on notera $[AB_C]$ la moitié de droite dont les extrémités sont A et B et qui passe par C.

Partie convexe

Une partie P du plan est dite **convexe** lorsqu'elle n'est pas réduite à deux points antipodaux, et que pour tout couple de points A et B non antipodaux de P le segment [AB] est contenu dans P. Un demi-plan est convexe. Toute intersection de parties convexes est convexe.

On a intuitivement le résultat suivant : une partie *convexe fermée* qui n'est pas le plan tout entier est l'intersection des demi-plans qui la contiennent. Une preuve rigoureuse du résultat n'est pas très facile.

Distance de deux points sur la sphère

D'un point A à un point B non antipodal, un plus court chemin, unique, est obtenu en suivant le segment [AB]. Lorsque les points sont antipodaux, «le» plus court chemin suit n'importe quel arc de grand cercle joignant A à B. Nous ne démontrerons pas tout de suite ces résultats, (on attendra le chapitre suivant) mais nous poserons autoritairement :

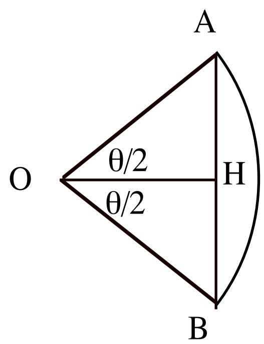
Définition Étant donnés deux points A et B de $\mathcal{S}$, on appelle distance de A à B dans $\mathcal{S}$ et on note $d_{\mathcal{S}}(A,B)$, ou encore AB, le réel :

$$\text{longueur du segment } [AB] = R \times \theta,$$

où θ est la mesure, comprise entre 0 et π, de l'angle géométrique ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$).

On notera que le deuxième membre de l'égalité de la définition est toujours bien défini (contrairement au premier membre, où il faut supposer A et B non antipodaux). Nous démontrerons bientôt qu'il s'agit bien d'une distance. En attendant nous mettrons des guillemets.

On notera $d_{\mathcal{E}}(A,B)$ la longueur de la corde $[AB]_{\mathcal{E}}$.



On a les relations suivantes entre θ, R, $d_{\mathcal{S}}(A,B)$ et $d_{\mathcal{E}}(A,B)$:

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = R^2.\cos\theta,\quad d_{\mathcal{S}}(A,B) = R\,\theta$$

$$\sin\left(\frac{d_{\mathcal{S}}(A,B)}{2\,R}\right) = \frac{d_{\mathcal{E}}(A,B)}{2\,R}$$

d'où $d_{\mathcal{E}}(A,B) \leq d_{\mathcal{S}}(A,B) \leq \frac{\pi}{2}\, d_{\mathcal{E}}(A,B)$

On en déduit aussi, puisque la fonction sinus est strictement croissante sur l'intervalle $[0,\pi/2]$:

$$d_{\mathcal{S}}(A,B) \leq d_{\mathcal{S}}(C,D) \Leftrightarrow d_{\mathcal{E}}(A,B) \leq d_{\mathcal{E}}(C,D)$$

La dernière relation montre que $d_{\mathcal{S}}$ et $d_{\mathcal{E}}$ définissent les mêmes «isométries» et la même «relation de plus grande proximité» sur $\mathcal{S}$.

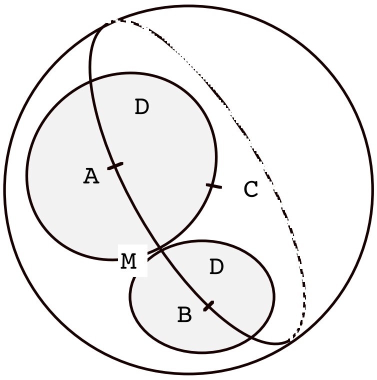
Cercles et disques

Avec cette «distance» sur $\mathcal{S}$ on a immédiatement :

- Un cercle de rayon strictement supérieur à $\pi.R$ est vide. Le disque correspondant est $\mathcal{S}$ tout entier. Les cercles non vides de $\mathcal{S}$ sont ceux de rayon $\leq \pi.R$.
- Le cercle de centre A et de rayon $\pi.R$ est réduit au point A' antipode de A. Le disque correspondant est $\mathcal{S}$ tout entier.
- Les cercles de $\mathcal{S}$ non vides ni réduits à un point sont les intersections dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{S}$ avec les plans de $\mathcal{E}$ qui coupent $\mathcal{S}$. Ce sont des cercles de $\mathcal{E}$. Les disques correspondants, vus dans $\mathcal{E}$, sont des calottes sphériques, intersections dans $\mathcal{E}$ de $\mathcal{S}$ avec des demi-espaces de $\mathcal{E}$.

- Deux cercles distincts de $\mathcal{S}$ ont pour intersection : 2 points, ou un point, ou le vide. Dans le deuxième cas, les deux cercles ont la même tangente dans $\mathcal{E}$ à leur point de contact, on dit qu'ils sont tangents.
- Les cercles de rayon $\pi.R/2$ sont les droites de $\mathcal{S}$. Les disques correspondants sont des demi-plans. Un disque est convexe si et seulement si son rayon est $\leq \pi.R/2$.
- Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $r \in]0,\pi.R[$ est égal au cercle de centre A' (antipode de A) et de rayon $\pi.R - r$. Les deux disques correspondants ont pour réunion $\mathcal{S}$ et pour intersection $\mathcal{C}$.

Proposition 1 : La fonction $d_{\mathcal{S}}$ définit bien une distance sur $\mathcal{S}$.



preuve> Soient trois points A, B, C avec $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$. On veut montrer $c \leq a + b$. Si $b \geq c$ la chose est claire. De même si les trois points sont alignés, en particulier si deux d'entre eux sont antipodaux. Supposons donc les points non alignés avec $b < c$.
Soit D le disque de centre A et de rayon b, et D' le disque de centre B et de rayon $c - b$. Ces deux disques sont tangents en le point M de [AB] qui vérifie $AM = b$, $BM = c - b$. Le point C est sur le cercle $\mathcal{C}$, bord du disque D, et se trouve donc à l'extérieur de D', c.-à-d. $a = BC \geq c - b$. ❑

Médiatrice de deux points

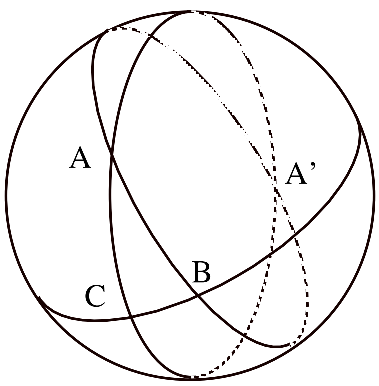
Étant donnés deux points fixes distincts A et B et un point variable M dans $\mathcal{S}$, on sait qu'on a l'équivalence : $d_{\mathcal{S}}(A,M) = d_{\mathcal{S}}(B,M) \Leftrightarrow d_{\mathcal{E}}(A,M) = d_{\mathcal{E}}(B,M)$

Donc l'ensemble des points équidistants de A et B dans $\mathcal{S}$ est une droite, puisque dans $\mathcal{E}$ c'est l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan médiateur de A et B.

Pôle, polaire, points conjugués

Une droite Δ de $\mathcal{S}$ est donc un cercle, dont les deux centres sont deux points antipodaux, appelés **les pôles** de Δ. Inversement, étant donné un point A, le cercle de rayon $\pi.R/2$ dont il est le centre est appelé **la polaire** de A. Deux points A et B sont dits **conjugués** si chacun est sur la polaire de l'autre, c.-à-d. encore si leur distance est $\pi.R/2$.

Biangle, angle (AB,AC)**, droites orthogonales**



Soient trois points A, B, C, (B et C non antipodes de A). Si on considère l'intersection du demi-plan de $\mathcal{S}$ limité par la droite (AB) et contenant C, avec le demi-plan limité par (AC) contenant B, on obtient un **fuseau** ou **biangle**, dont les bords sont obtenus en prolongeant les segments [AB] et [AC] au delà de B et C jusqu'à l'antipode A' de A. On note ce biangle : (AA'_B,AA'_C).

On appelle angle des segments [AB] et [AC] et on note (AB,AC) la mesure comprise entre 0 et π de l'angle de la rotation de $\mathcal{E}$, d'axe (AA'), qui envoie le bord $[AA'_B]$ du biangle sur le bord $[AA'_C]$. On peut aussi définir le réel (AB,AC) par la formule :

$$\text{Aire}\ (\ \text{biangle}(AA'_B,AA'_C)\ ) = 2\ .\ (AB,AC)\ .\ R^2$$

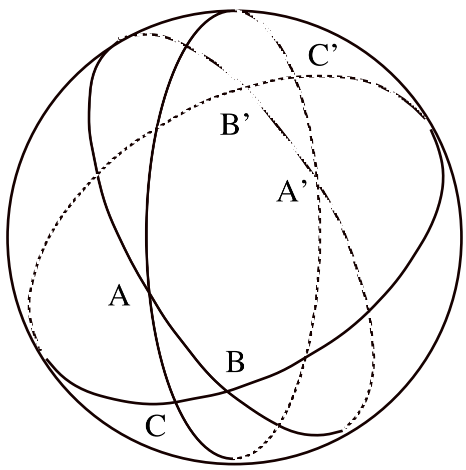
Deux droites distinctes définissent quatre biangles dont la réunion est le plan tout entier, et deux à deux d'intersection réduite à une moitié de droite.

Deux droites dont l'angle est égal à $\pi/2$ sont dites **orthogonales**. Deux droites sont orthogonales si et seulement si les plans qu'elles définissent dans $\mathcal{E}$ sont orthogonaux. On en déduit que si le point A n'est pas un pôle de la droite Δ, il y a exactement une perpendiculaire à Δ passant par A. Par contre, si A est un pôle de Δ toute droite passant par A est orthogonale à Δ. Réciproquement toute droite orthogonale à Δ passe par A. Deux points sont conjugués si et seulement si leurs polaires sont orthogonales. Deux droites orthogonales à une droite Δ se coupent selon les pôles de Δ.

Exercice 1 : (réservé aux angoissés de la rigueur et aux passionnées du calcul algébrique) Prouvez que ce que vous voyez sur la figure de la proposition 1 est bien vrai : les disques D et D' ont bien M comme seul point commun, ils sont dans les deux demi-plans limités par la perpendiculaire à la droite (AB) au point M.

Triangle ABC

Étant donnés trois points A, B, C, non deux antipodaux, on appelle triangle ABC la figure formée par **les trois segments** [AB], [BC], [CA]. Un triangle est dit **vrai** si les trois points ne sont pas alignés. On peut alors définir **la surface limitée par le triangle** : intersection du demi-plan limité par (AB) contenant C et des deux autres demi-plans analogues. C'est aussi le plus petit ensemble convexe contenant A, B et C. Les trois droites (AB), (BC), (CA) définissent alors huit triangles dont la réunion des surfaces est le plan tout entier, et deux à deux d'intersection réduite à un segment. Ils sont deux à deux antipodaux. Un triangle est dit **triorthogonal** si ses trois angles sont droits. Sa surface remplit alors le huitième du plan, qui admet un pavage régulier par huit triangles triorthogonaux.



Lorsque les trois points sont alignés, on a deux typologies bien distinctes. Un triangle est dit **aplati** si l'un des segments est la réunion des deux autres. Il est dit **étalé** lorsque la réunion des trois segments est une droite. Dans le premier cas, la surface du triangle doit être considérée limitée à un segment (deux angles du triangle sont nuls et le troisième est plat). C'est le plus petit convexe contenant A, B et C. Dans le second, ça peut être, au choix, un des deux demi-plans limités par la droite (AB) (les trois angles du triangle sont plats). C'est un convexe minimal contenant A, B, C et un point extérieur à (AB). Ce deuxième cas correspond à la position limite d'un triangle contenu dans un demi-plan fixé et qui grossit jusqu'à remplir tout le demi-plan.

Remarque Le fait de n'admettre que les *petits* arcs de grand cercle comme étant des segments est une pure convention, qui présente beaucoup d'avantages et quelques inconvénients. Si on avait choisi la convention contraire (deux segments joignant A et B non antipodaux, une infinité de segments joignant A et B antipodaux), on aurait en général 8 triangles ayant trois sommets A, B, C donnés (qui n'ont pas grand chose à voir avec les huit triangles définis plus haut par les trois cotés).

Somme des angles d'un triangle

Nous admettons la notion d'aire d'un triangle, ou de toute surface raisonnable contenue dans le plan $\mathbb{S}$, comme non problématique. Nous verrons plus loin qu'il n'y a qu'une manière raisonnable de définir l'aire d'une surface raisonnable : nous entendons par «manière raisonnable» le fait que l'aire doit être invariante par les isométries du plan et que l'aire de la réunion «presque disjointe» de deux surfaces raisonnables doit être la somme de leurs aires. Nous en tenant à ces conceptions un peu informelles, nous obtenons :

Théorème 1 : Soit un triangle vrai ABC. On a la formule:

$$(AB,AC) + (BC,BA) + (CA,CB) = \pi + \text{Aire}(ABC)/R^2$$

preuve> Notons α l'angle (AB,AC), A_1 le biangle (ABA',ACA') et A_2 le biangle antipodal. Définissons de la même manière β, γ, B_1, B_2, C_1, C_2. On a

$$\text{Aire}(A_1) = \text{Aire}(A_2) = 2.\alpha.R^2$$

Par ailleurs en prenant la «réunion» des 6 biangles considérés, on recouvre toute la sphère, avec cette précision que la surface du triangle ABC et celle de son antipodal sont obtenues 3 fois chacune, c.-à-d. 2 fois de trop, tandis que la surface de chacun des six autres triangles n'est obtenue qu'une fois. Ainsi :

$$2.\text{Aire}(A_1) + 2.\text{Aire}(B_1) + 2.\text{Aire}(C_1) = \text{Aire}(\mathbb{S}) + 4.\text{Aire}(ABC)$$

soit :

$$4.\alpha.R^2 + 4.\beta.R^2 + 4.\gamma.R^2 = 4.\pi.R^2 + 4.\text{Aire}(ABC) \qquad \square$$

Si nous supposons vivre dans un univers «sphérique de dimension 3» non plongé dans un espace euclidien[1] de dimension 4, nous pouvons obtenir R et donc le «diamètre» $\pi.R$ de notre univers en mesurant avec grande précision la somme des angles et la surface d'un très grand triangle et en appliquant la formule du théorème. Cette méthode n'est malheureusement guère «directement» praticable : si la mesure des angles peut être obtenue par visée avec une bonne précision, on ne connaît pas de méthode précise pour mesurer directement les aires des grandes surfaces. Si par contre on sait mesurer avec précision les longueurs des cotés de notre grand triangle, les formules de la géométrie du triangle sphérique, nous permettront de retrouver son aire. (à suivre)

---

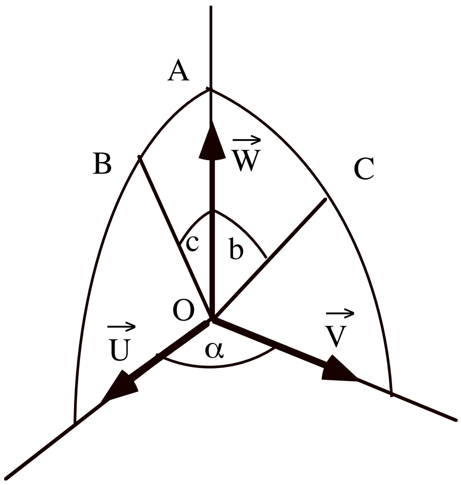
[1] Ou encore : plongé dans un espace euclidien de dimension 4 qui nous soit inaccessible.

Remarque La formule reste valable pour un triangle aplati (2 angles nuls et un angle plat, aire nulle) et pour les triangles étalés (trois angles plats, et l'aire d'un demi-plan).

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique

Notations : Les formules de la géométrie du triangle sphérique sont couramment utilisées par les astronomes qui étudient «la sphère céleste» (idéale et de rayon indéterminé) qui est l'ensemble des demi-droites issues d'un point O (l'observateur). Il est dans ce cadre plus naturel de considérer l'angle $c = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ plutôt que la distance $AB = R \times c$. Ainsi les «cotés» du triangles sont notés a, b, c compris entre 0 et π dans le cas où la sphère a pour rayon R = 1), tandis que ses angles (AB,AC), (BC,BA), (CA,CB) sont notés α, β, γ.

Théorème 2 : Soit un triangle ABC. Avec les notations précédentes, on a :
$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$



preuve> On se place dans $\mathcal{E}$. On considère un vecteur unitaire $\overrightarrow{W}$ sur $\overrightarrow{OA}$ de O vers A, un vecteur unitaire $\overrightarrow{U}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ dans le plan (OAB), du même coté que B par rapport à la droite (OA), et un vecteur unitaire $\overrightarrow{V}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ dans le plan (OAC), du même coté que C par rapport à la droite (OA). On a alors :

$$\overrightarrow{OB} = R\,(\cos c \,.\, \overrightarrow{W} + \sin c \,.\, \overrightarrow{U})$$
$$\overrightarrow{OC} = R\,(\cos b \,.\, \overrightarrow{W} + \sin b \,.\, \overrightarrow{V})$$
$$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC} = R^2 .\cos a, \quad \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \cos \alpha,$$

d'où le résultat annoncé. ❑

D'où une nouvelle preuve de la proposition 1 avec l'énoncé précis suivant.

Théorème 3 : Ce qu'on a appelé «distance» sur $\mathbb{S}$ est bien une distance.
Si C et B sont deux points non antipodaux, l'égalité BA + AC = BC a lieu exclusivement pour les points A du segment [BC] de $\mathbb{S}$.
Si C et B sont antipodaux, l'égalité a lieu pour tout point A.

preuve> Considérons un triangle ABC, avec par exemple $AC \geq AB$.
1er cas : si $AB + AC > \pi.R$, on a évidemment $BC < AB + AC$.
2ème cas : sinon, fixons A, C, AB et faisons varier B sur un cercle de centre A et de rayon c. Dans la formule fondamentale du théorème 2, cela revient à fixer b et c, avec $b \geq c$ et à faire varier α entre 0 et π. On voit que $\cos \alpha$ décroît de 1 à -1, cos a décroît de $\cos(b - c)$ à $\cos(b+c)$ et a croît de $b - c$ à $b+c$. On a donc toujours $c + b \geq a$, c.-à-d. $BA + AC \geq BC$ et l'égalité n'a lieu que pour $\alpha = \pi$, c.-à-d. lorsque A est

sur le segment [BC]. De même, on ne peut avoir $a = |b - c|$ que pour $\alpha = 0$, c.-à-d. lorsque B est sur le segment [AC]. ❑

Proposition 2 : Trois réels a.R, b.R, c.R représentent les distances de trois points non alignés de $\mathcal{S}$ si et seulement si on a les inégalités :

$$a, b, c \in]0,\pi[,\ a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b,\ a + b + c < 2\pi$$

preuve> On reprend la preuve du théorème 3, 2ème cas, mais sans supposer $b + c \leq \pi$. On conclut que a croît de $b - c$ à $e = \mathrm{Arccos}(\cos(b+c))$. Donc $e = b+c$ si $b+c \leq \pi$ et $e = 2\pi - (b+c)$ si $b+c > \pi$. Puisque la fonction cos établit une bijection entre $]0,\pi[$ et $]-1,1[$, chaque valeur de a sur l'intervalle $]|b - c|, e[$ est obtenue pour exactement une valeur de α. ❑

Question à la lectrice : Que se passe-t-il si on remplace l'une des inégalités strictes dans la proposition précédente par une égalité ?

Le théorème 3 justifie les définitions qui suivent. La première est une définition mathématique, ou formelle, qui nous parle d'objets mathématiques bien définis : les espaces métriques, les isométries, l'espace euclidien. La deuxième est informelle et métamathématique : elle parle d'objets vagues mal définis («une notion») et en termes non internes la théorie mathématique («peut être définie»). On ne peut pas faire de mathématiques efficaces sans définitions formelles. On ne peut pas réfléchir à ce qu'on fait en mathématiques sans définitions informelles.

Définition On appellera **plan sphérique** tout espace métrique isométrique à une sphère $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ munie de la distance $d_{\mathcal{S}}$.

Deux plans sphériques quelconques sont donc, *à un changement d'unité de longueur près*, isométriques. Notez qu'avec cette définition, un plan sphérique est un objet qui n'a plus besoin d'être un sous ensemble de $\mathcal{E}$.

Définition informelle Une notion définie sur $\mathcal{S}$, qui peut être définie dans tout plan sphérique et qui ne dépend pas du choix de l'unité de longueur sera dite intrinsèque (pour les plans sphériques).

On pourra comparer à la définition page 16 et à la convention page 17 données dans le cadre euclidien. L'étude des propriétés intrinsèques du plan sphérique est, selon la définition informelle de Klein dans le programme d'Erlangen, l'étude de la géométrie métrique de la sphère.

A priori, pour étudier le caractère intrinsèque d'une notion, la méthode systématique à utiliser est de vérifier l'invariance par isométrie et l'indépendance par rapport au choix de l'unité de longueur. Par exemple la notion de droite peut être prouvée intrinsèque de cette manière. Mais même avant d'avoir étudié le groupe des isométries de $\mathcal{S}$, certaines notions peuvent être prouvées intrinsèques par des arguments plus directs.

Exercice 2 : Montrer que les notions suivantes sont intrinsèques : points antipodaux, points conjugués, droite, segment, pôle d'une droite, isométrie d'un plan, demi-plan, droite orientée, drapeau, cercle, disque, médiatrice.

Topologie d'un plan sphérique

La topologie d'un plan sphérique $\mathcal{S}$ peut être définie à partir de la métrique $d_{\mathcal{S}}$.
Cette métrique est lipschitzienne par rapport à celle induite sur $\mathcal{S}$ par la métrique de $\mathcal{E}$ (c.-à-d. que le rapport des deux distances reste compris entre deux nombres strictement positifs). Il s'ensuit que les notions d'applications continue, uniformément continue, lipshitzienne de $\mathcal{S}$ vers un espace métrique sont les mêmes si l'on considère la métrique de $\mathcal{S}$ ou celle induite par $\mathcal{E}$.
En tant que sous-espace fermé borné de $\mathcal{E}$, l'espace $\mathcal{S}$ est compact. Un disque fermé de $\mathcal{S}$ (de rayon non nul et inférieur à πR) a la même topologie qu'un disque fermé d'un plan euclidien (il y a même équivalence lipshitzienne entre les deux disques, c.-à-d. existence d'une bijection lipschitzienne dans les deux sens). Comme $\mathcal{S}$ est la réunion des deux disques fermés limités par un même cercle, cela fournit une description «colle et ciseaux» de la topologie de $\mathcal{S}$. Prendre deux disques fermés de même rayon dans un plan euclidien et les recoller selon leur bord. Si on prive $\mathcal{S}$ d'un point, on obtient un espace topologique homéomorphe au plan euclidien $\mathcal{P}$: du point de vue topologique, l'espace $\mathcal{S}$ est donc le «compactifié à un point» de l'espace localement compact $\mathcal{P}$.

Exercice 3 : Il s'agit d'un exercice de «topologie métrique», vous pourrez le faire en raison directe de vos connaissances de cette matière. L'exercice est le suivant : démontrez rigoureusement les affirmations du paragraphe précédent qui ne vous semblent pas découler de théorèmes déjà établis.

Cercles et disques

Proposition 3 : *circonférence et aire d'un disque de rayon* r $(<\pi R)$.

On pose $\rho = r / R$

La circonférence d'un cercle de rayon r est :

$$C(r) = 2\,\pi\, r.\big(\,(\sin \rho\,)\,/\,\rho\,\big) = 2\,\pi\, R \sin \rho$$

L'aire d'un disque de rayon r est :

$$A(r) = \pi\, r^2\ \big(\,(\sin \rho/2\,)\,/\,\rho/2\ \big)^2 = 4\,\pi\, R^2.(\sin \rho/2\,)^2$$

preuve> Il suffit d'appliquer les formules connues dans $\mathcal{E}$. (on admet implicitement que la métrique propre de $\mathcal{S}$ définit le même périmètre et la même aire pour une calotte sphérique que celui et celle qu'on calcule «dans $\mathcal{E}$», nous reviendrons sur ces questions dans la suite).

❏

Exercice 4 :

1) Établir les formules de la proposition 3.

2) Donner les premiers termes des développements limités de $C(r)$ et $A(r)$ en fonction de ρ considéré comme infinitésimal.
3) En déduire de nouvelles formules qui permettent de définir R de manière locale dans l'espace métrique $\mathbb{S}$, c.-à-d. en ayant recours à des notions à la fois purement locales et ne dépendant que de la métrique de $\mathbb{S}$. En d'autres termes la connaissance précise de la métrique d'un petit disque de $\mathbb{S}$, aussi petit soit-il, permet de retrouver R.
4) Supposons que $R/r \approx 10^{20}$. quelle précision faut-il mesurer $A(r)/r^2 \approx 3{,}14159$ pour connaître R/r avec une précision de 50% ?

Géométrie élémentaire du triangle

Le vocable «élémentaire» signifie qu'il n'est fait appel qu'aux notions élémentaires de distance, angle et aire, et non pas que les résultats sont faciles à établir. Notez aussi que les preuves, mêmes ardues, ne font pas appel à des mathématiques très compliquées.

Triangles polaires ou conjugués

Étant donné un triangle vrai ABC, il y a un pôle de (BC) situé du même coté que A par rapport à (BC). Notons le A_1 et définissons de la même manière B_1 et C_1. On dit que le triangle $A_1B_1C_1$ est le **triangle polaire** ou encore **triangle conjugué** de ABC.
Dans $\mathbb{E}$ le point A_1 de $\mathbb{S}$ est caractérisé par les relations suivantes :

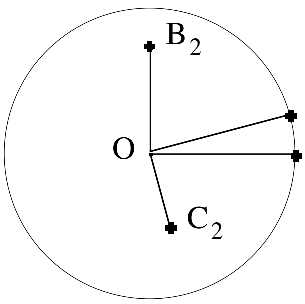
$$\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA_1} = 0,\quad \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OA_1} = 0,\quad \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA_1} \geq 0$$

En effet les deux premières égalités signifient que A_1 est un des deux pôles de (BC), et la troisième relation signifie que A est du même coté que A_1 par rapport au plan (OBC).
En écrivant les relations caractéristiques analogues pour B_1 et C_1 on obtient en tout 9 relations qui établissent une symétrie complète entre ABC et $A_1B_1C_1$. Donc ABC est aussi le triangle conjugué de $A_1B_1C_1$.

Proposition 4 : Nous considérons deux triangles conjugués ABC et $A_1B_1C_1$. Nous notons $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ comme au théorème 2. Nous notons a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1 les analogues de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ on a :

$$a + \alpha_1 = b + \beta_1 = c + \gamma_1 = a_1 + \alpha = b_1 + \beta = c_1 + \gamma = \pi.$$

preuve> Il suffit par exemple de démontrer $a + \alpha_1 = \pi$.



On projette orthogonalement B_1 et C_1 en B_2 et C_2 sur le plan (OBC). On a alors les égalités d'angles géométriques (entre 0 et π) :

$$(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OC_2}) = \alpha_1,\quad (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = a$$

et les égalités de produits scalaires :

$$\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OB_1} = 0,$$
$$\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC_1} > 0$$
$$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC_1} = 0,\quad \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB_1} > 0$$

ce qui permet de conclure. ❏

Corollaire :

a) Pour tout triangle vrai ABC on a :

$$\cos\alpha = -\cos\beta\ \cos\gamma + \sin\beta\ \sin\gamma\ \cos a$$

b) Trois réels α, β, γ de $]0,\pi[$ sont les angles d'un triangle vrai si et seulement si : $\alpha + \pi > \beta + \gamma$, $\beta + \pi > \alpha + \gamma$, $\gamma + \pi > \beta + \alpha$, $\alpha + \beta + \gamma < 3.\pi$

preuve> Appliquer la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique et la proposition 2 au triangle conjugué. ❑

Triangles en géométries euclidienne et sphérique: formulaire minimum comparé

Nous noterons a, b, c les mesures des cotés du triangle. Pour le triangle sphérique, on aurait a = R.a etc... donc on peut remplacer dans les formules a, b, c par a/R, b/R, c/R. Nous notons r le rayon du cercle circonscrit. Nous reprenons α, β, γ, pour les angles (géométriques) du triangle.

Nous donnons un formulaire minimum

triangle euclidien	**triangle sphérique**
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$	$\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b\ \cos c}{\sin b\ \sin c}$ et la formule duale : $\cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\ \cos\gamma}{\sin\beta\ \sin\gamma}$
$2\,r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$	$\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$

Nous voyons que dans un triangle du plan sphérique, la mesure précise des angles α, β, γ permet de retrouver a, si on mesure également a, cela permet de retrouver R de manière intrinsèque.

Pour le triangle sphérique la formule : $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$

peut être démontrée dans $\mathcal{E}$ à partir de :

$$\left|\ \det(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB}\ ,\overrightarrow{OC}\ )\right| = 2\,R^3 \sin\alpha\ \sin b\ \sin c$$

Exercice 5 :

a) Montrer que dans un plan sphérique $\mathcal{S}$, les médianes d'un triangle vrai sont concourantes. On fera une figure dans $\mathcal{E}$ et on comparera avec situation du triangle de $\mathcal{E}$ ayant les mêmes sommets.

b) Que représente la polaire du milieu de [AB] pour le triangle conjugué de ABC ?

c) Que représentent les pôles des médianes de ABC pour le triangle conjugué de ABC ?

Exercice 6 :

a) Établir une comparaison la plus systématique possible entre les «éléments» d'un triangle de $\mathcal{S}$ et ceux du triangle de $\mathcal{E}$ qui possède les mêmes sommets.

b) Établir une comparaison la plus systématique possible entre un triangle de $\mathcal{S}$ et le triangle conjugué.

Exercice 7 : Donner les formules reliant l'aire, la hauteur, le coté, les angles et le rayon du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral dans un plan sphérique.

Exercice 8 : Donner les formules reliant l'aire, la hauteur, le coté, les angles et le rayon du cercle circonscrit d'un «carré» (quadrilatère régulier à 4 cotés: c.-à-d. dont les sommets sont obtenus en faisant tourner un point 3 fois de un quart de tour autour d'un centre).

Exercice 9 : Montrer que dans un plan sphérique, les hauteurs d'un triangle vrai sont concourantes. Que se passe-t-il pour un triangle aplati ou étalé ?

Exercice 10 : Préciser en général et par des exemples l'idée informelle suivante : toutes les formules vraies de la géométrie du triangle d'un plan sphérique deviennent des formules vraies de la géométrie du triangle d'un plan euclidien lorsqu'on fait $R = \infty$.

Exercice 11 : Soient ABCD quatre points, non trois alignés, dans un plan sphérique ou euclidien $\mathcal{P}$. Soient A'B'C'D' quatre points, non trois alignés, dans un autre plan sphérique ou euclidien $\mathcal{P}'$. Montrer que si les deux figures ont les segments analogues deux à deux de même longueur, alors le rayon de $\mathcal{P}$ et celui de $\mathcal{P}'$ sont égaux (le rayon d'un plan euclidien est pris par convention égal à ∞). En particulier il n'existe pas de carte plane euclidienne exacte rendant compte, à un changement d'échelle près, de la situation respective de quatre points non trois alignés d'un plan sphérique.

Exercice 12 : Montrer que dans un plan sphérique, deux triangles vrais qui ont leurs angles égaux ont aussi leurs cotés égaux.

Exercice 13 : Définir l'homothétie de centre A et de rapport t peu différent de 1 (le point objet ne devra pas être trop près de l'antipode de A. Pour B et C fixés, non alignés avec A, considérer les images B_t et C_t par cette homothétie. Étudier le développement limité de B_tC_t pour t au voisinage de 1. Commentez les résultats de cet exercice et du précédent en terme d'impossibilité de similitudes de rapport différent de 1.

L'aire d'une figure sphérique

On considère les polygones du plan sphérique et on se pose la question suivante : est-ce que l'aire calculée au moyen du calcul intégral classique sur $\mathcal{S}$ considérée comme plongée dans $\mathcal{E}$ est la notion d'aire inévitable et légitime si on se situe d'un strict point de vue interne à $\mathcal{S}$? L'inexistence d'homothéties de $\mathcal{S}$ rend la chose légèrement plus compliquée que pour le plan euclidien.

Proposition 5 : Il existe exactement une fonction «aire d'un polygone» qui ait les trois propriétés suivantes :

1) additivité : l'aire de la réunion presque disjointe de deux polygones est la somme de leurs aires
2) l'aire est invariante par les isométries de $\mathcal{S}$ (c.-à-d. les aires de deux triangles égaux sont égales)

3) le rapport de l'aire d'un petit «carré» (un quadrilatère régulier) avec le carré de la longueur de son coté tend vers 1 lorsque la longueur du coté tend vers 0.

preuve> La propriété d'additivité implique que la fonction doit être croissante (si un polygone est inclus dans un autre son aire est plus petite). La formule liant l'aire d'un fuseau à son angle, puis celle liant l'aire d'un triangle à ses angles ont été obtenues en utilisant uniquement les propriétés d'additivité et d'invariance par isométrie, et l'aire du plan complet. Elle est donc, à un facteur multiplicatif près, inévitable. Ainsi (1) et (2) fixent, à un facteur près, les aires des polygones. La condition (3) revient à préciser le facteur multiplicatif. On a donc l'unicité si existence. Reste donc à prouver l'existence.

Ici, on a deux manières de continuer la démonstration :

Ou bien on fait confiance à la théorie de l'intégration et on admet qu'elle nous donne une aire pour les polygones qui vérifie les propriétés (1), (2), (3).

Ou bien on reconstruit, de manière «complètement élémentaire» (sans théorie de l'intégration) la notion d'aire de polygone en raisonnant comme suit.

Primo) pour un triangle on utilise comme définition de l'aire ce qui intervient dans la formule liant l'aire à la somme des angles (seule définition raisonnable a priori).

Secundo) on démontre l'additivité dans le cas des triangles (preuve immédiate).

Tertio) on en déduit qu'on peut définir par additivité l'aire de n'importe quel polygone (ça ne dépendra pas de la décomposition du polygone en triangles, vue l'additivité sur les triangles, et vu qu'à partir de deux décompositions, je peux en construire une troisième plus fine que les deux premières).

Quarto) les propriétés (1) et (2) sont maintenant évidentes.

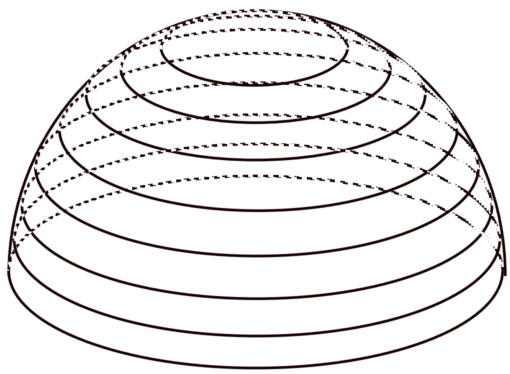
Quinto) reste à démontrer la propriété (3) ce qui revient grosso modo à dire que les angles d'un très petit carré sont presque droits. ❑

Remarques

1) Une démarche complètement analogue peut être suivie dans le cas du plan euclidien, bien que dans ce cadre, l'existence des homothéties pousse à définir directement les aires via les quadrillages (et l'existence des transformations affines pousse à traiter les rapports d'aires dans un cadre affine).

2) L'aire des figures raisonnables est également inévitable par additivité si on entend par «figure raisonnable» une figure qui se laisse squeezer entre deux polygones dont la différence des aires peut être rendue arbitrairement petite. Ainsi par exemple les disques. Cette théorie n'est rien d'autre que celle de l'intégrale de Riemann.

3) Pour l'aire de figures moins raisonnables, on peut passer par une théorie de l'intégration avec σ-additivité, à la Lebesgue. Ceci réclame néanmoins a priori d'avoir construit une notion d'aire raisonnable pour des figures élémentaires, qu'on prolonge ensuite par σ-additivité.



4) La théorie des aires des figures sphériques développée par Archimède n'est aucune des deux théories proposée dans la preuve ci-dessus. Pour les géomètres grecs, la notion d'aire d'une figure raisonnable[2] (notion non définie), est a priori non problématique. Ils raisonnent donc librement à partir des propriétés (1) et (2). Mais en fait, ce qu'utilise Archimède, c'est une sorte de passage à la limite[3] où l'aire d'un tronc de sphère par exemple, est approchée par l'aire d'une surface formée de troncs de cônes.

5) Dans la théorie contemporaine usuelle permettant de calculer l'aire d'une surface[4] de $\mathcal{E}$ au moyen d'un calcul d'intégrale où intervient «un élément d'aire infinitésimal» de la surface (traité comme un parallélogramme plat infinitésimal) c'est en fait le même passage à la limite qui est opéré. Or cette théorie est plus problématique qu'il n'y paraît vu paradoxe suivant : l'aire d'une surface de $\mathcal{E}$ *n'est pas* la limite des aires des triangulations (dans $\mathcal{E}$) de cette surface lorsqu'on fait tendre les cotés des petits triangles vers 0. Il faut en effet en plus que la normale à chaque petit triangle tende uniformément vers la normale à la surface, de manière à ce que le polyèdre de $\mathcal{E}$ «approchant» la surface ne soit pas trop froissé. Ceci est à relier au phénomène suivant : si, sur une surface lisse dans l'espace, on considère trois points M, N, P et si on les fait tendre vers un même point A de la surface, le plan (MNP) ne tend pas forcément vers le plan tangent en A à la surface ; pour obtenir le résultat il faut imposer que le triangle MNP garde ses trois angles supérieurs à un minimum fixé a priori. On notera que la situation est donc radicalement différente de celle des courbes lisses.

b) Les isométries de la sphère

Une première approche, externe

Nous noterons **Is**($\mathcal{S}$) le groupe des isométries de $\mathcal{S}$ (bijections qui conservent la distance). On sait déjà que les isométries de $\mathcal{E}$ qui conservent $\mathcal{S}$ induisent des isométries de $\mathcal{S}$. (cf. dans la section a) les formules reliant $d_{\mathcal{E}}$ et $d_{\mathcal{S}}$). Inversement, si on considère une isométrie τ de $\mathcal{S}$ quatre points A, B, C, D de $\mathcal{S}$ non coplanaires dans $\mathcal{E}$ (c.-à-d. non

---

2 Ou plutôt la notion de rapport des aires de deux figures raisonnables.

3 Le «passage à la limite» proprement dit est interdit chez les Grecs. Il doit être remplacé par une procédure d'encadrement. S'il est facile d'encadrer l'aire enfermée par une courbe dans le plan, par des aires de polygones respectivement intérieurs et extérieurs à la courbe, la question de la longueur d'un arc de courbe ou de la surface d'une portion de sphère est plus délicate. Archimède doit donc demander qu'on admette que dans le cas des surfaces convexes, une surface intérieure à une autre a forcément une aire plus petite. Pour un exposé remarquablement clair des techniques d'Archimède, on pourra consulter la brochure de B. Bettinelli, parue à l'IREM de Besançon «Le Trésor d'Archimède».

4 Ou le flux d'un champ de vecteurs à travers cette surface.

cocycliques dans $\mathbb{S}$) leurs images par τ sont quatre points A', B', C', D' et les deux tétraèdres sont isométriques dans $\mathcal{E}$ car isométriques dans $\mathbb{S}$. Si alors φ est l'isométrie de $\mathcal{E}$ qui envoie A, B, C, D en A', B', C', D', on voit que φ conserve $\mathbb{S}$ (sphère circonscrite à ABCD), puis, qu'elle coïncide avec τ sur $\mathbb{S}$, parce que dans l'espace euclidien, un point est caractérisé par ses distances à 4 points non coplanaires (s'il y en avait deux leur plan médiateur contiendrait les quatre points). Enfin, une isométrie de $\mathcal{E}$ conserve une sphère si et seulement si elle fixe son centre. D'où :

Théorème 1 : *(isométries de la sphère plongée dans l'espace euclidien)*

a) Toute isométrie de $\mathbb{S}$ est induite par une isométrie de $\mathcal{E}$ qui conserve le centre de $\mathbb{S}$, et réciproquement. Le groupe des isométries de $\mathbb{S}$ est isomorphe au groupe $\mathbf{O}(3,\mathbb{R})$ des matrices réelles orthogonales 3×3.

b) Les isométries de $\mathcal{E}$ fixant O sont : les rotations d'axe passant par O, la symétrie de centre O, les symétries par rapport à des plans passant par O et les symétries planes tournées dont l'axe et le plan passent par O.

On notera que la **symétrie antipodale** de $\mathbb{S}$, notée $\sigma^{\mathbb{S}}$, induite par la symétrie-point de centre O, commute avec toutes les autres isométries de $\mathbb{S}$.

Théorème 2 : *(symétries de la sphère plongée dans l'espace euclidien)*

a) Les éléments d'ordre 2 de $\mathbf{Is}(\mathbb{S})$ sont appelés les **symétries** de $\mathbb{S}$. Une telle symétrie est induite par :
   un demi tour autour d'une droite passant par O, ou
   une symétrie orthogonale par rapport à un plan passant par O, ou
   la symétrie-point de centre O.

b) Le centre du groupe $\mathbf{Is}(\mathbb{S})$ est $\{\mathrm{Id},\sigma^{\mathbb{S}}\}$.

preuve> Le (a) est clair d'après la classification des symétries de $\mathcal{E}$. Voyons le (b) et faisons la preuve dans $\mathcal{E}$. Une isométrie qui commute avec une symétrie par rapport à une droite Δ conserve cette droite Δ. Un élément du centre de $\mathbf{Is}(\mathbb{S})$ est donc induit par une isométrie qui fixe toutes les droites passant par O. Seules la symétrie-point de centre O et l'identité conviennent.❑

Nous allons dans la suite de la section b) essayer de développer une théorie des isométries de $\mathbb{S}$ du seul point de vue de $\mathbb{S}$. Nous ferons référence au théorème 1 essentiellement pour la preuve de l'existence des symétries-point et symétries orthogonales, et développerons dans la mesure du possible le reste à partir de ce résultat. On peut cependant considérer que l'ensemble de la section b) n'est qu'un exercice de traduction dans $\mathbb{S}$ de résultats démontrés dans $\mathcal{E}$, le théorème 1 légitimant cette traduction.

Symétries points, symétries orthogonales et symétrie antipodale

Si nous décalquons dans $\mathbb{S}$ la construction d'une symétrie-point du plan euclidien, nous obtenons ce qui suit. Étant donnés deux points A et J non antipodaux, il existe exactement un point A_1 distinct de A sur la droite (AJ) tel que $JA = JA_1$: la droite (AJ) coupe le cercle de rayon AJ et de centre J en les deux points A et A_1.

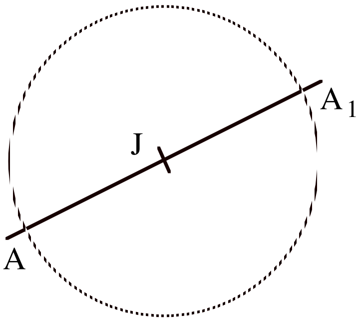


figure locale pour une symétrie de centre J

Dans $\mathbb{E}$ le point A_1 est obtenu à partir du point A en appliquant la symétrie par rapport à la droite $(OJ)_{\mathbb{E}}$.
La transformation $A \mapsto A_1$ de $\mathbb{S}$ est donc une symétrie de $\mathbb{S}$ qui admet comme seuls points fixes J et son antipode. On l'appelle la **symétrie par rapport au point J** et on la note σ_J.
On dit qu'il s'agit d'une **symétrie-point**. Par ailleurs, σ_J est la seule symétrie de $\mathbb{S}$ admettant comme seuls points fixes J et son antipode J'. La symétrie $\sigma_{J'}$ est égale à σ_J, et on ne peut pas vraiment parler *du* centre d'une symétrie-point.

Si nous décalquons dans $\mathbb{S}$ la construction d'une symétrie orthogonale du plan euclidien, nous obtenons ce qui suit. Étant donnés une droite Δ et un point A non sur Δ, il existe exactement un point A_1 tel que Δ soit la médiatrice de $[AA_1]$: si A est un pôle de Δ, A_1 est son antipode ; sinon, on trace la perpendiculaire à Δ passant par A, qui coupe Δ en A' et A_1 est le symétrique de A par rapport à A'.

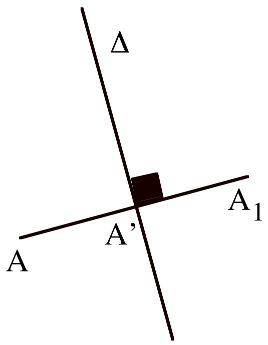


figure locale pour une symétrie par rapport à la droite Δ

Dans $\mathbb{E}$ le point A_1 est obtenu à partir du point A en faisant la symétrie par rapport au plan $(O\Delta)_{\mathbb{E}}$.
La transformation $A \mapsto A_1$ de $\mathbb{S}$ est donc une symétrie de $\mathbb{S}$ qui admet comme seuls points fixes les points de Δ. On l'appelle la **symétrie orthogonale par rapport à Δ** et on la note σ_Δ.
Par ailleurs, σ_Δ est la seule isométrie de $\mathbb{S}$ admettant comme ensemble de points fixes les points de Δ.

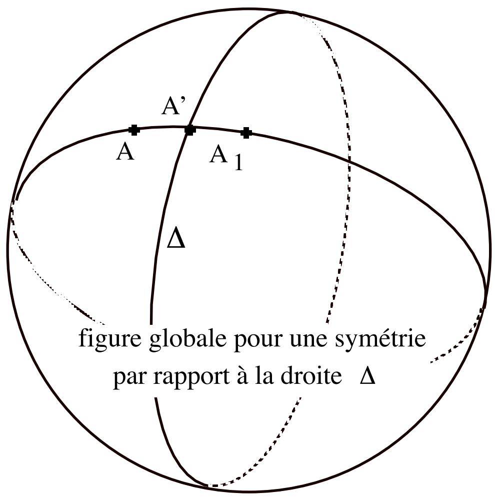


figure globale pour une symétrie par rapport à la droite Δ

La symétrie antipodale de $\mathbb{S}$ joue un rôle tout à fait à part. Elle ne fixe aucun point, mais fixe toutes les droites. Elle n'est l'analogue d'aucune symétrie du plan euclidien.

Exercice 1 :

a) Montrer que deux symétries-point (resp. deux symétries orthogonales) de $\mathbb{S}$ sont conjuguées dans le groupe des déplacements de $\mathbb{S}$.

b) Étudier toutes les configurations géométriques possibles pour les sous-groupes de Klein (c.-à-d. isomorphes à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$) de $\mathbf{Is}(\mathbb{S})$.

Premier théorème fondamental

La preuve du théorème fondamental qui suit est basée essentiellement sur les résultats : médiatrice de deux points, existence des symétries orthogonales. Elle fonctionne exactement comme dans le cas du plan euclidien[5]. Ici, il faut remarquer en outre que pour deux points M et N et deux points A, B sur la médiatrice de [MN] les points A, B, N peuvent être alignés mais seulement si A et B sont antipodaux. Nous avons souligné l'analogie avec le cas euclidien en numérotant de la même manière ((a), (b), (c), (d)) les affirmations analogues.

Théorème fondamental 1 : *(isométries, points fixes, et décomposition en produit de symétries orthogonales)* Soit τ une isométrie de $\mathbb{S}$

z) Si τ fixe un point, elle fixe son antipode et sa polaire.
a) Si τ fixe trois points non alignés, c'est l'identité Id
b) Si $\tau \neq$ Id fixe deux points A et B non antipodaux, c'est la symétrie orthogonale $\sigma_{(AB)}$
c) Si τ fixe exactement un point A et son antipode, c'est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites passant par A
d) Dans tous les cas τ est le produit de zéro, une, deux ou trois symétries orthogonales

preuve> (z) Parce que l'antipode de A est l'unique point situé à la distance $\pi.R$ du point A.
(a) Soit A, B, C les trois points non alignés. Si pour un point M on avait $N = \tau(M)$ distinct de M, on aurait MA = NA, MB = NB, MC = NC, puisque τ est une isométrie, et les trois points A, B, C seraient alignés sur la médiatrice de [MN].
(b) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, A et B sont sur la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède les trois points fixes non alignés A, B, N. Donc d'après (a), c'est l'identité. Donc $\tau = \sigma_\Delta$.
(c) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, le point A est sur la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède les deux points fixes A, N, non antipodaux. Donc d'après (b) c'est l'identité ou la symétrie orthogonale $\sigma_{(AN)}$. Le premier cas est exclu car sinon $\tau = \sigma_\Delta$.
(d) On peut supposer que τ n'admet aucun point fixe. Soit M arbitraire et $N = \tau(M)$ distinct de M. On considère la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède le point fixe N. Ce qui nous ramène à l'un des cas précédents. ❑

La preuve fournit en outre le résultat suivant :

Proposition 1 : *(troisième cas d'égalité des triangles)*
Si deux triangles de $\mathbb{S}$ ont leurs cotés égaux deux à deux, ils sont isométriques

---

[5] Nous aurions pu facilement déduire les résultats de résultats sur les isométries de $\mathbb{E}$ mais il est également intéressant de mener une étude interne à $\mathbb{S}$ aussi proche que possible de celle menée dans le plan euclidien.

Questions d'orientation

Nous traitons cette question difficile de manière plutôt intuitive. Différentes formalisations sont possibles, mais les détails sont toujours fastidieux.
Le plan $\mathbb{S}$ est dit orienté si on a défini de manière cohérente (c.-à-d. invariante par «déplacement continu») un sens de rotation autour de chaque point de $\mathbb{S}$.
On peut procéder de la manière suivante : on se situe dans $\mathbb{E}$, qu'on oriente, on oriente la normale à $\mathbb{S}$ en J vers l'extérieur, et on en déduit un sens de rotation positif dans le plan tangent à $\mathbb{S}$ en J donc pour les rotations de $\mathbb{S}$ autour de J.
La possibilité d'orienter $\mathbb{S}$, regarde de la manière la plus algébrique possible (la moins différentielle possible) repose sur la possibilité de séparer les isométries en **isométries directes** (ou déplacements) et **indirectes**, selon qu'elles se laissent décomposer en un nombre pair ou impair de symétries orthogonales. Ceci repose sur le théorème fondamental 1 et sur le théorème :

> la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales n'est jamais égale à l'identité.

Ce dernier théorème se démontre, vu le théorème 1, à partir du théorème analogue dans $\mathbb{E}$ (un nombre impair de symétries planes orthogonales...). En fin de compte une isométrie de $\mathbb{S}$ est directe ou indirecte selon qu'elle est induite par une isométrie directe ou indirecte de $\mathbb{E}$.
On peut alors définir l'orientation de manière algébrique et plus interne à $\mathbb{S}$: on commence par définir la notion de **demi-plan orienté de** $\mathbb{S}$: c'est un couple (Δ,Π) où Δ est une droite orientée et Π l'un des deux demi-plans de bord Δ. La donnée d'un demi-plan orienté permet d'orienter les rotations autour des points intérieurs au demi-plan.
On définit ensuite la relation «avoir la même orientation que» entre demi-plans orientés : deux demi-plans orientés ont même orientation si et seulement si il y a une isométrie directe qui envoie l'un sur l'autre. On obtient ainsi une relation d'équivalence avec deux classes d'équivalence. Si on spécifie l'une de ces deux classes comme étant celle des demi-plans «positivement orientés» on a orienté $\mathbb{S}$. Qu'on ait orienté $\mathbb{S}$ ou pas, les symétries orthogonales renversent les orientations des demi-plans orientés, et les isométries directes les conservent.

Notez cependant qu'une fois orienté le plan $\mathbb{S}$, une rotation d'un quart de tour positif autour du point J est aussi une rotation d'un quart de tour négatif autour de l'antipode de J. Ainsi, dans un plan orienté $\mathbb{S}$, on peut parler de «rotation d'angle α autour du point J » (avec α réel défini modulo 2π) mais la notion d'«angle d'une rotation» tout court n'est pas très pertinente : c'est un angle géométrique mesuré par un réel entre 0 et π, et deux rotations de même angle qui fixent un même point ne sont pas nécessairement égales. Ce paradoxe peut être considéré comme la traduction du fait suivant : si J et B sont deux points conjugués, si ρ est une rotation autour de J et φ le demi-tour autour de B on a l'égalité

$$\varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1} = \rho^{-1}$$

Ainsi deux rotations inverses l'une de l'autre sont conjuguées dans le groupe des déplacements de $\mathbb{S}$, situation radicalement différente de celle du plan euclidien. Pour voir la chose en mouvement, on peut remplacer le demi-tour φ par une famille continue de rotations autour de B avec l'angle variant de 0 à π. on conjuguée a toujours «le même angle» mais le centre de la rotation se déplace de J jusqu'à son antipode.

Un système naturel de repères

Comme en géométrie euclidienne plane, le deuxième théorème fondamental est celui qui affirme que le groupe des isométries opère simplement transitivement sur les drapeaux. On commence par une proposition reliée de très près à ce théorème.

Proposition 2 :

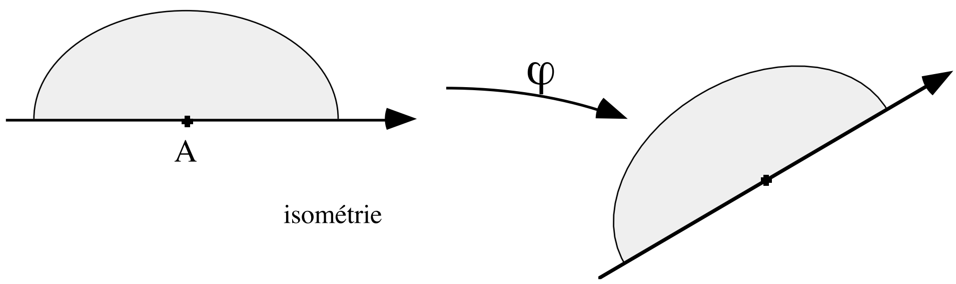
a) Une isométrie directe qui conserve deux points non antipodaux est l'identité.
b) Deux isométries directes (resp. indirectes) qui coïncident en deux points non antipodaux sont égales.
c) Une isométrie indirecte qui conserve un point est une symétrie orthogonale.

preuve> (a) parce qu'une isométrie qui fixe deux points non antipodaux est l'identité ou une symétrie orthogonale.
(b) d'après (a) en composant une isométrie et la réciproque de l'autre.
Pour (c) : notons A le point supposé fixe, on considère l'image N d'un point M non fixe, alors l'isométrie considérée et la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [MN] sont deux isométries indirectes qui coïncident en A et M. ❏

Théorème fondamental 2 : *(propriété de libre mobilité)*

a) Le groupe des isométries opère simplement transitivement sur les drapeaux.
b) Le groupe des déplacements opère simplement transitivement sur les axes pointés.

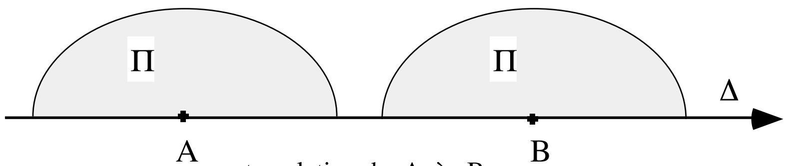
preuve> Voyons d'abord l'existence.
La transitivité en (b) résulte de ce qu'on peut envoyer A sur A’ puis faire une rotation autour de A’. La transitivité en (a) en résulte facilement : si le drapeau image n'est pas le bon, c'est de symétrique par rapport à la droite du drapeau.



Voyons l'unicité. Une isométrie qui fixe un axe pointé fixe deux points sur cet axe (par exemple le point origine et le point à la distance d $(< \pi R)$ en suivant le sens positif sur l'axe). Si l'isométrie est directe, on applique alors la proposition 2(a), si elle est indirecte, on applique 2(b). ❏

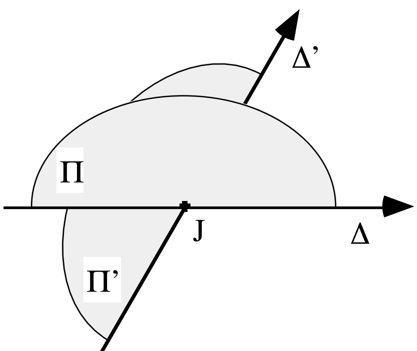
Translations et rotations

Considérons deux points non antipodaux A et B. La **translation de A à B** est définie à partir du théorème fondamental 2 comme suit : c'est la transformation qui envoie le drapeau (A,Δ,Π) sur le drapeau (B,Δ,Π) où Δ est la droite (AB) orientée et Π l'un des deux demi-plans de bord Δ.



translation de A à B

Cela fait quatre choix possibles pour (Δ,Π) mais il est facile de voir que l'isométrie obtenue ne dépend pas de ce choix. Si τ est la translation de A à B, si C est un point de (AB) et si $D = \tau(C)$ alors τ est aussi la translation de C à D (preuve facile). Par contre, ça ne marche plus avec C extérieur à (AB). En effet, τ fixe (AB) et Π, donc τ fixe chaque pôle de (AB), mais aucun autre point (un déplacement qui fixe deux points non antipodaux est l'identité), et en particulier τ ne fixe pas le pôle de (CD). Aussi parle-t-on de **translation le long de** Δ. Si Δ est une droite donnée et deux points antipodaux de cette droite, on peut définir la translation de A à A' le long de Δ, mais on ne peut pas définir sans ambigüité la translation de A à A' tout court.



rotation autour de J

De même, **une rotation autour d'un point** J peut être définie comme une isométrie qui transforme un drapeau centré en J en un autre drapeau, de même orientation, centré en J. Tout déplacement qui conserve J peut évidemment être défini de cette manière. Comme une rotation autour de J est aussi une rotation autour de l'antipode de J, nous ne pouvons parler *du* centre d'une rotation, aussi nous nous en tenons à la terminologie «rotation autour de J ». Rappelons que dans un plan orienté $\mathbb{S}$, on peut parler de «rotation d'angle α autour du point J » (avec α réel défini modulo 2π) mais qu'*on ne peut pas* définir sans ambigüité la «rotation d'angle α admettant J pour point fixe».

Théorème 3 : *(forme géométrique des déplacements)*

a) Une translation de A à B est une rotation qui fixe les pôles de (AB).
b) Une rotation autour de J est une translation le long de la polaire de J.
c) Tout déplacement de $\mathbb{S}$ est une rotation (donc aussi une translation).

d) Un déplacement distinct de l'identité admet exactement deux points fixes, antipodes l'un de l'autre.
e) Un déplacement distinct de l'identité et d'une symétrie point, fixe exactement une droite (la polaire de ses deux points fixes).

Exercice 2 : (Translations comme vecteurs glissants)

a) On peut définir sur les bipoints non antipodaux de la sphère la relation d'équivalence suivante

$$(A,B) \sim (A',B') \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \text{la translation de } A \text{ à } B \text{ est égale à la translation de } A' \text{ à } B'$$

b) raisonnable (précisez pourquoi) d'appeler une classe d'équivalence pour cette relation un *vecteur glissant*. Que pouvez-vous dire au sujet de l'addition de vecteurs glissants ? (définition et domaine de définition, élément neutre, inverse, associativité, commutativité).

c) Montrez que la relation de Chasles ne fonctionne pas avec des vecteurs glissants non colinéaires mis bout à bout.

Le groupe des isométries qui fixent un point

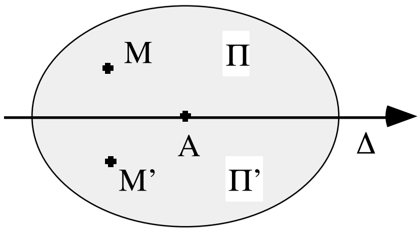
Les isométries de $\mathbb{S}$ qui fixent un point J sont induites par les isométries de $\mathfrak{E}$ qui fixent les points O et J. Une telle isométrie de $\mathfrak{E}$ est caractérisée par sa restriction au plan de $\mathfrak{E}$ passant par O et orthogonal à $(OJ)_{\mathfrak{E}}$. retombe donc sur le groupe des isométries d'un plan euclidien qui fixent un point. D'où le :

Théorème 4 : *(isométries qui fixent un point)*

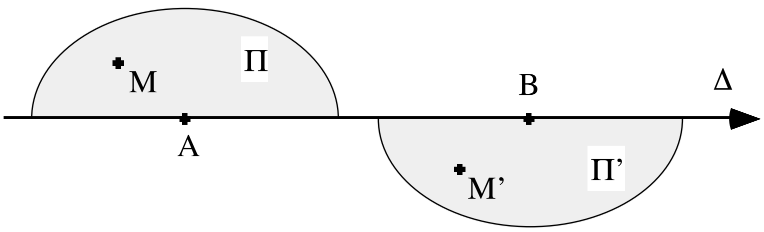
a) Les isométries d'un disque de centre J sont exactement (induites par) les isométries (du plan tout entier) qui fixent J (restreintes au disque considéré).
b) Elles forment un groupe isomorphe à $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$ (groupe des matrices orthogonales 2×2).
c) Les isométries qui fixent J comprennent les rotations autour de J et les symétries orthogonales par rapport aux droites qui passent par J.
Si ρ est une rotation et σ_Δ une symétrie orthogonale avec $\rho(\Delta) = \Delta'$ on a $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta = \rho^2$ (1), $\sigma_\Delta \circ \rho \circ \sigma_\Delta = \rho^{-1}$ (2), $\rho \circ \sigma_\Delta \circ \rho^{-1} = \sigma_{\Delta'}$ (3),
d) Le groupe est produit semi-direct interne du sous-groupe des rotations et d'un sous-groupe $\{\sigma_\Delta, Id\}$. C'est donc un groupe isomorphe au produit semi-direct abstrait $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times_\theta \{\pm 1\}$ où $\theta(-1)(\alpha) = -\alpha$

Symétries glissées

Définition On appelle **symétrie glissée** le produit d'une symétrie σ_Δ par rapport à une droite Δ et d'une translation le long de la droite Δ.



symétrie par rapport à Δ



symétrie glissée de A à B

Une symétrie glissée de $\mathbb{S}$ provient d'une symétrie tournée de $\mathcal{E}$, le plan de la symétrie tournée étant celui du grand cercle Δ dans la définition ci-dessus.

Proposition 3 : *(forme gémétrique des isométries indirectes)* Toute isométrie indirecte distincte de la symétrie antipodale $\sigma^{\mathbb{S}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sigma_\Delta \circ \tau$ où : σ_Δ désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, τ est une translation le long de Δ ou l'identité. En outre $\sigma_\Delta \circ \tau = \tau \circ \sigma_\Delta$. Une isométrie indirecte qui n'est pas une symétrie (orthogonale ou antipodale) admet zéro point fixe et exactement une droite fixe. On peut donc parler sans ambiguïté de l'axe d'une isométrie indirecte distincte de la symétrie antipodale.

Remarque La proposition peut s'interpréter en disant que toute isométrie indirecte de $\mathbb{S}$ distincte de la symétrie antipodale est une symétrie glissée, de manière unique, de «vecteur» éventuellement nul. La symétrie antipodale peut être vue comme une symétrie glissée d'une translation d'un demi-tour, mais l'écriture n'est plus du tout unique. Elle joue ici aussi un rôle tout à fait à part puisqu'elle est la seule isométrie indirecte à fixer toutes les droites, et la seule à ne pas avoir d'axe.

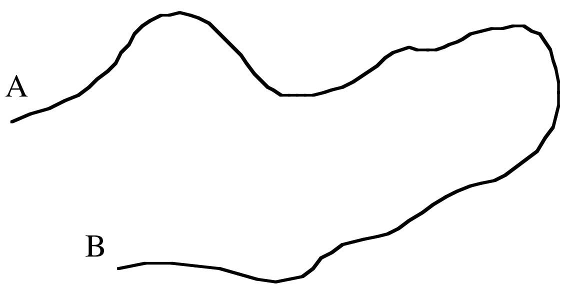
6) ESPACES GEOMETRIQUES

Introduction

Nous donnons dans ce court chapitre une brève introduction à la notion d'espace géométrique. Un espace géométrique est un espace métrique complet où la distance représente la longueur d'un plus court chemin d'un point à un autre. Nous allons voir en particulier que la distance est dans ce cas entièrement caractérisée (au choix de l'unité de longueur près) par la relation de plus grande proximité, qui est une relation liant quatre points : A est plus près de B que C ne l'est de D. Cela revient aussi à se donner les disques et la relation d'équidistance.

Plus court chemin d'un point à un autre dans un espace métrique

Chemin paramétré d'un point à un autre



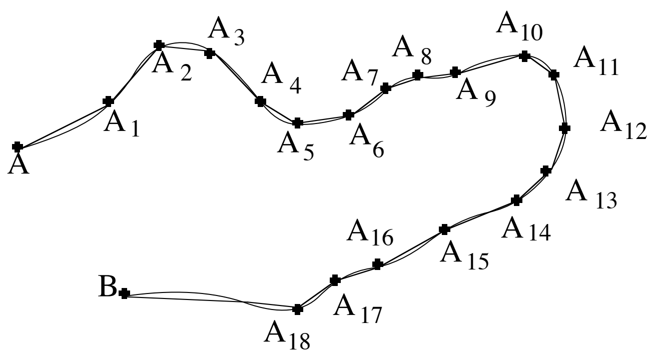
Dans un espace métrique $\mathcal{M}$, un **chemin paramétré de A à B** est par définition une application uniformément continue f de l'intervalle [0,1] vers $\mathcal{M}$ avec f(0) = A et f(1) = B. Intuitivement, la variable représente le temps, et on chemine de A à B. Si elle est injective, l'application f réalise un homéomorphisme de [0,1] sur son image : une application bijective continue d'un espace métrique compact sur un autre espace métrique est toujours un homéomorphisme.

Chemin d'un point à un autre

On dit que deux chemins paramétrés f et g (de A à B) définissent le même **chemin** s'il existe un «changement de variable» $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ bijectif et strictement croissant (donc uniformément continu) tel que $f \circ h = g$.
Il s'agit donc de considérer comme équivalents deux cheminements qui empruntent le même sentier. Tout chemin paramétré équivalent à un chemin paramétré injectif est lui même injectif. On peut donc parler de chemin injectif sans risque de confusion. Deux chemins paramétrés équivalents ont la même image : c'est le «sentier» suivi par le chemin. Il est donc très difficile d'illustrer sur un dessin deux chemins paramétrés distincts qui représentent le même chemin.

L'ordre des points sur le sentier suivi par un chemin injectif ne dépend pas du paramétrage particulier choisi. On peut donc parler sans risque de confusion de l'ordre des points d'un chemin injectif.
Si $c, e \in [0,1]$ et $f(c) = C$, $f(e) = E$, la restriction du chemin entre C et E est définie par le chemin paramétré $g : g(t) := f(c+t/(e-c))$.
On peut démontrer qu'un chemin injectif est caractérisé par son image, c.-à-d. par le sentier suivi, à condition de préciser le point de départ (si vous connaissez un peu de topologie, vous n'aurez pas de mal à trouver la démonstration). Par contre, si vous prenez un huit, même en fixant le point de départ (qui coïncide avec le point d'arrivée) il y aura plusieurs chemins distincts presque injectifs (injectifs avec seulement un nombre fini d'exceptions) pour parcourir ce sentier.
On peut fabriquer des chemins avec un défaut d'injectivité proprement pathologique. Par exemple la courbe de Peano est un chemin qui remplit tout un carré au prix d'un très fort défaut d'injectivité. Rassurez-vous cependant : il ne s'agit pas d'une bizarrerie de la nature, mais d'une bizarrerie des mathématiques. Une notion raisonnable de chemin géométrique devrait exclure les chemins avec un trop grand défaut d'injectivité, mais une telle définition semble de trop peu d'intérêt pratique. Dans les situations mathématiques courantes, ou bien on est dans un cadre purement topologique et on n'a pas du tout envie de restreindre la définition des chemins paramétrés, ou bien on se trouve dans un cadre géométrique et différentiel, et on s'intéresse uniquement aux chemins différentiables par morceaux. La courbe de Peano a bien sûr une longueur infinie.

Longueur d'un chemin



La longueur d'un chemin est définie à partir de la longueur d'un chemin paramétré correspondant à ce chemin. La **longueur** d'un chemin paramétré est la borne supérieure des «distances parcourues» lorsqu'on fait des sauts de puces le long du chemin au lieu de le parcourir en entier.
Il n'est pas bien difficile de donner une définition mathématique précise pour cette notion.
C'est un bon exercice d'entraînement, vivement recommandé au lecteur. Pendant que vous y êtes, vous démontrerez que la longueur d'un chemin peut être définie sans ambigüité, c.-à-d. que deux chemins paramétrés qui définissent le même chemin ont la même longueur. Attention, rien ne dit que la borne supérieure soit finie.
On voit immédiatement que la longueur d'un chemin de A à B (s'il existe un tel chemin) est toujours supérieure ou égale à la distance des deux points.

Si on a un chemin de A à B de longueur finie, et si C et D sont sur le chemin, dans cet ordre, alors le chemin de C à D est également de longueur finie. En outre la somme des longueurs des chemins de A à C, de C à D, et de D à B est égale à la longueur du chemin de A à B (preuves laissées à la lectrice non convaincue, si le chemin n'est pas injectif, raisonnez plutôt avec des valeurs croissantes du paramètre qu'avec des points).

On peut définir un **paramétrage standard** («à vitesse constante») pour un chemin injectif *de longueur finie* a : soit f un paramétrage du chemin et soit $h(t)$ la longueur du chemin parcouru entre les valeurs 0 et t du paramètre. La fonction h est croissante de $[0,1]$ vers $[0,a]$, strictement croissante si le chemin ne comporte pas de pause, en particulier s'il est injectif ou presque injectif. Cette fonction est nécessairement continue, donc surjective. Soit en effet un entier $n > 0$ positif fixé et considérons une subdivision $\{t_0, t_1,\ldots,t_k\}$ de $[0,1]$ telle que

$$\Sigma_{i=0,\ldots,k-1}\ d(f(t_i),f(t_{i+1})) \geq h(1) - 1/n$$

on en déduit que pour $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ on a

$$\Sigma_{i=0,\ldots,j-1}\ d(f(t_i),f(t_{i+1})) + d(f(t_j,t) \leq h(t) \leq \Sigma_{i=0,\ldots,j-1}\ d(f(t_i),f(t_{i+1})) + d(f(t_j,t) + 1/n$$

Le réel $\Sigma_{i=0,\ldots,j-1}\ d(f(t_i),f(t_{i+1})) + d(f(t_j,t)$ peut être considéré comme une fonction $h_n(t)$ définie sur $[0,1]$. Cette fonction est continue, et la suite h_n converge uniformément vers la fonction h.

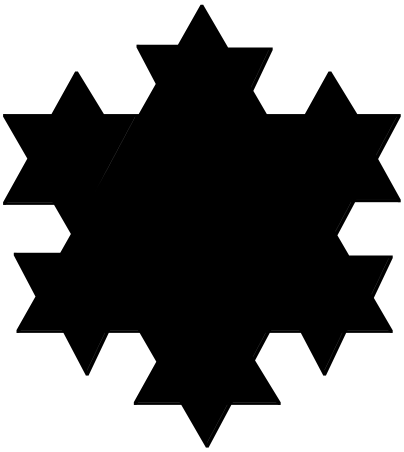
Soit maintenant g la bijection réciproque de h. La fonction $t \longmapsto f(g(a.t))$ est un chemin paramétré «à vitesse constante» définissant le même chemin que f. C'est le paramétrage standard annoncé.

Exercice 1 :

1) Précisez pourquoi le paramétrage standard est qualifié de «à vitesse constante».
2) Montrez la continuité uniforme de la fonction h module de continuité uniforme explicite (calculé à partir de celui de f) c.-à-d. sans utiliser le théorème de continuité uniforme sur les compacts.
3) Si vous êtes particulièrement en forme, essayez de définir proprement ce qu'est une pause sur un chemin, puis montrez que même lorsqu'il y a des pauses sur le chemin f on peut définir la fonction $t \longmapsto f(g(a.t))$ et que cela fournit un chemin f_1 parcouru à vitesse constante, qui, à la suppression des pauses près, est le même chemin que f. (Notez cependant qu'en général le chemin f_1 n'est pas injectif.)

La preuve de la proposition qui suit est facile, et laissée au lecteur.

Proposition 1 : Dans un espace métrique $\mathcal{M}$, pour que la longueur d'un chemin de A à B soit égale a $d(A,B)$ il faut et suffit qu'on ait, pour n'importe quels C, D, E dans cet ordre sur le chemin: $d(C,D) + d(D,E) = d(C,E)$



Les premières constructions de chemins de longueur infinie entre deux points de $\mathcal{E}$ ont causé un certain trouble chez les mathématiciens. Certains en ont déduit qu'il existe dans la réalité des chemins de longueur infinie parcourus en un temps fini. D'autres que la notion mathématique de «chemin» n'était peut-être pas une modélisation fidèle de la notion intuitive correspondante.

Enfin, on a développé la théorie des «fractales» pour rendre compte de choses qui dans la nature ressemblent à un chemin de longueur infinie, comme par exemple «le bord des côtes de l'Atlantique» (bord très fractionné et de «longueur infinie») ou la surface («d'aire infinie») des poumons.

On peut remarquer que, concernant la longueur finie ou infinie d'un chemin, le choix de la métrique est très important. Par exemple, si on prend sur $\mathbb{R}^2$ la distance

$$d(A,B) = \sqrt{AB}$$

tout chemin qui joint deux points distincts est de longueur infinie. Pourtant cette distance est uniformément équivalente à la distance euclidienne, notée ici AB, dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Démontrer l'affirmation précédente pour le chemin $t \longmapsto (0,t)$ qui joint $A = (0,0)$ à $B = (0,1)$.

Plus court chemin d'un point à un autre

On parlera de **plus court chemin de A à B** (dans un espace métrique) pour un chemin injectif de longueur finie et inférieure ou égale à la longueur de tout autre chemin de A à B.
On notera qu'un plus court chemin peut être transformé, en faisant des arrêts en cours de route, en un chemin de même longueur mais non injectif.
Si dans un espace métrique, il y a un chemin injectif de A à B dont la longueur est d(A,B), c'est évidemment un plus court chemin.

Exercice 3 : (suite de l'exercice 1) Démontrer que si un chemin de A à B ne fait pas de pause et si sa longueur est finie et minimale, alors il est injectif.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme Soit f un plus court chemin paramétré de A à B. Si $c, e \in [0,1]$ et $f(c) = C$, $f(e) = E$, la restriction du chemin entre C et E définie par le chemin paramétré $g : g(t) := f(c+t/(e-c))$ est un plus court chemin de C à E.

Théorème 1 : Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, il existe un unique plus court chemin d'un point à un autre, et sa longueur est la distance des deux points. Ce chemin consiste à parcourir le segment [AB] en respectant l'ordre sur [0,1] et [AB].

preuve> On paramètre le segment [AB] par

$$t \longmapsto A + t \,.\, \overrightarrow{AB} \,.$$

D'après la proposition 1, c'est forcément un plus court chemin.
Il reste à voir que c'est le seul. Soit f est un chemin paramétré de longueur AB. On montre que tous les points de l'image de f sont sur le segment $[AB]$: en effet si $f(t) = C$ est en dehors du segment $[A,B]$, la longueur du chemin est supérieure ou égale à $AC + CB > AB$. On montre ensuite que l'application f est strictement croissante, puis qu'elle est surjective (puisque l'image est connexe). D'où enfin le changement de variable réclamé dans la définition de l'égalité des chemins. ❑

Remarque Dans un espace vectoriel normé, le segment $[AB]$ est toujours un plus court chemin de A à B. La preuve de l'unicité donnée ci-dessus s'applique dans tout espace vectoriel normé où est vérifiée l'implication :

$$\| \vec{U} + \vec{V} \| = \| \vec{U} \| + \| \vec{V} \| \Rightarrow \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ colinéaires}$$

Théorème 2 :

a) Sur une sphère $\mathbb{S}$, les chemins ont la même longueur pour la distance propre et pour la distance euclidienne.

b) Étant donnés 2 points A et B non antipodaux, il existe un unique plus court chemin d'un point à un autre, et sa longueur est la distance des deux points. Ce chemin consiste à parcourir le segment $[AB]$ de $\mathbb{S}$ qui passe par ces deux points, en respectant l'ordre sur $[0,1]$ et $[AB]$.
Si A et B sont antipodaux, tout arc de grand cercle joignant A à B (parcouru convenablement) est un plus court chemin de A à B, ce sont les seuls, et leur longueur est la distance de A à B.

preuve> (a) Cela tient à ce que $d_{\mathbb{S}}(A,B)/d_{\mathbb{E}}(A,B)$ tend vers 1 uniformément quand $d_{\mathbb{E}}(A,B)$ tend vers 0. Détails laissés à la lectrice sceptique.
(b) Pour le premier cas, c'est la même preuve que pour le théorème 1. Dans le deuxième cas, il est clair que les arcs de grand cercle conviennent. Pour la réciproque, on considère un plus court chemin de A à B, puis un point C sur ce chemin. Alors, la restriction du chemin entre A et C fournit un plus court chemin de A à C, ce qui nous ramène au premier cas. Idem pour la restriction entre C et B. ❑

Notez qu'au chapitre 5 sur la sphère, on a appliqué sans se poser de question le (a) du théorème ci-dessus lorsqu'on a calculé la longueur d'un cercle tracé sur la sphère.

Espaces géométriques

Définition Un espace métrique où deux points peuvent toujours être joints par un chemin dont la longueur est la distance des deux points est appelé un espace métrique **excellent**. Un **espace géométrique** est par définition un espace métrique complet et excellent.

En langage plus intuitif c'est un espace «sans trous ponctuels», d'un seul morceau, où la distance de deux points est aussi la longueur d'un plus court chemin joignant ces deux points.
On peut considérer que la notion d'espace géométrique constitue une meilleure modélisation mathématique de la notion intuitive de «distance» que ne le fait la notion d'espace métrique.
Le plan euclidien, la sphère munie de sa métrique propre, sont des espaces géométriques.

Théorème 3 : Soit un espace métrique complet $(\mathcal{M},d)$, pour que ce soit un espace géométrique, il faut et suffit qu'on puisse toujours trouver, pour A et B dans $\mathcal{M}$ un point C vérifiant : $d(A,C) = d(C,B) = d(A,B)/2$. Disons dans ce cas que le point C est *un* milieu de $[AB]$.
On a de plus l'unicité du plus court chemin de A à B pour tous A, B vérifiant $d(A,B) \leq r$ *si et seulement si* on a l'unicité du milieu de $[AB]$ pour tous A, B vérifiant $d(A,B) \leq r$.

preuve> Il s'agit de construire un chemin f de A à B de longueur $d(A,B)$.
On pose $f(0) = A$, $f(1) = B$, $f(1/2)$ = un milieu de $[AB]$, $f(1/4)$ = un milieu de $[AC]$, $f(3/4)$ = un milieu de $[CB]$ etc.... On peut comme ça définir $f(x)$ pour $x = k/2^n$ (k entier $\leq 2^n$).
On va vérifier que cette fonction f partiellement définie est uniformément continue : plus précisément

$$d(f(x),f(y)) = d(A,B)\,|x - y|.$$

En effet, notons A_x pour $f(x)$, par construction on a :

$$d(A_x,A_y) = d(A,B)/2^n \text{ si } x = k/2^n \text{ et } y = (k+1)/2^n.$$

Par l'inégalité triangulaire, on en déduit : $d(A_x,A_y) \leq d(A,B)|x - y|$ pour tous x, y de la forme $k/2^n$, et on ne peut avoir d'inégalité stricte puisque, pour $x < y$:

$$d(A,B) \leq d(A_0,A_x) + d(A_x,A_y) + d(A_y,A_1) \text{ et } |x - 0| + |y - x| + |1 - y| = 1$$

On peut donc prolonger la fonction f par continuité à $[0,1]$ tout entier. Et le chemin obtenu vérifie les hypothèses de la proposition 1.
La question de l'unicité est laissée à la lectrice.❏

Théorème 4 : Supposons que dans un espace métrique complet $(\mathcal{M},d)$, deux points arbitraires puissent toujours être joints par un plus court chemin. On définit $d_1(A,B)$:= longueur d'un plus court chemin de A à B.
Alors on obtient :

- $(\mathcal{M},d_1)$ est un espace géométrique,
- les chemins paramétrés de longueur finie dans $(\mathcal{M},d)$ sont les mêmes que ceux dans $(\mathcal{M},d_1)$,
- les chemins de longueur finie dans $\mathcal{M}$ ont la même longueur pour d et pour d_1,
- un plus court chemin dans $(\mathcal{M},d)$ est également un plus un court chemin dans $(\mathcal{M},d_1)$, et la réciproque est aussi valable.

preuve> Il est clair que d_1 vérifie les axiomes d'une distance et que $d_1(A,B) \geq d(A,B)$. Montrons que l'espace est complet. Considérons une suite de Cauchy pour d_1, (A_n). On peut supposer sans perte de généralité que $d_1(A_i,A_{i+1}) \leq 1/2^i$. La suite est également une suite de Cauchy pour la distance d, et converge donc pour cette distance vers un point A. On obtient un chemin paramétré de A_j à A comme ceci :
on met bout à bout les chemins suivants :

- un plus court chemin de A_j à A_{j+1} parcouru à vitesse constante en faisant varier le paramètre de 0 à $1/2$
- un plus court chemin de A_{j+1} à A_{j+2} parcouru à vitesse constante en faisant varier le paramètre de $1/2$ à $1/4$
- un plus court chemin de A_{j+2} à A_{j+3} parcouru à vitesse constante en faisant varier le paramètre de $1/4$ à $1/8$
- et ainsi de suite,... ce qui définit $f(t)$ pour $0 \leq t < 1$
- on pose $f(1) = A$ pour compléter la définition de f

On laisse au lecteur le soin de vérifier que f est bien un chemin paramétré de A_j à A et que sa longueur est majorée par $1/2^{j-1}$. Ceci montre que $d_1(A_j,A) \leq 1/2^{j-1}$. Donc la suite converge vers A au sens de d_1. L'espace $(\mathcal{M},d_1)$ est bien complet.
La distance d_1 majore la distance d, autrement dit l'application identique de $(\mathcal{M},d_1)$ vers $(\mathcal{M},d)$ est lipshitzienne de rapport 1, et a fortiori uniformément continue. La bijection réciproque n'est pas nécessairement continue (on peut construire des contre-exemples un peu tordus, basés sur le principe du coq qui doit faire un long détour pour atteindre le grain pourtant sous son nez de l'autre coté du grillage, voir l'exercice 4).
Néanmoins, on peut montrer que les chemins paramétrés de longueur finie dans $(\mathcal{M},d)$ sont aussi des applications continues dans $(\mathcal{M},d_1)$: si on considère le paramétrage standard f du chemin, supposé de longueur a, on a en effet :

$$d_1(f(t),f(t')) \leq (\text{ longueur pour } d \text{ du chemin } f \text{ entre } t \text{ et } t'\ ) = (t'-t).a$$

et cela montre que f est lipshitzienne de $[0,1]$ vers $(\mathcal{M},d_1)$.
Vous aurez peut être remarqué que le dernier petit morceau de la démonstration s'applique à des chemins sans pause. Il faudrait se fatiguer un peu plus dans le cas général (cf. l'exercice 1). Dans l'espace $(\mathcal{M},d_1)$ deux points arbitraires A et B peuvent être joints par un chemin de longueur $d_1(A,B)$, puisqu'un plus court chemin de A à B pour $(\mathcal{M},d)$ vérifie les hypothèses de la proposition 1 pour la distance d_1. On est donc bien en présence d'un espace géométrique, et les plus courts chemins pour $(\mathcal{M},d)$ sont aussi des plus courts chemins pour $(\mathcal{M},d_1)$.
Il nous reste à vérifier qu'un chemin paramétré f a même longueur pour d et d_1 (ce qui d'ailleurs pourrait nous dispenser de l'alinéa précédent). Puisque d_1 majore d, la longueur pour d_1 majore celle pour d. Pour C et D sur le chemin notons $h(C,D)$ la longueur pour d du chemin f (restreint) entre C et D. On a évidemment $h(C,D) \geq d_1(C,D)$. Si maintenant on a $A = A_0, A_1,..., A_n = B$ dans cet ordre sur le chemin on a :

$$h(A,B) = \sum_{i=0,\ldots,n-1} h(A_i,A_{i+1}) \geq \sum_{i=0,\ldots,n-1} d_1(A_i,A_{i+1})$$

et cela prouve que la longueur de f pour d_1 est inférieure à celle pour d, à savoir $h(A,B)$. (NB : il serait plus rigoureux mais moins clair de raisonner avec les valeurs croissantes du paramètre) ❑

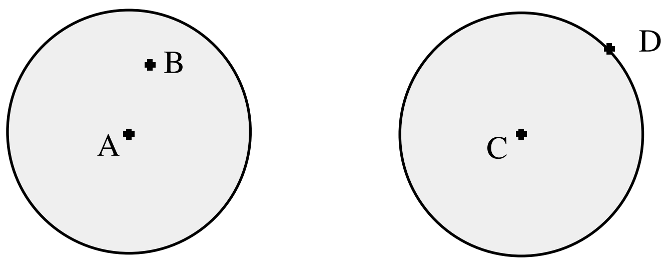
Exercice 4 : Soit dans un plan euclidien $\mathcal{P}$ un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et une suite (A_n) de points sur le cercle qui tend vers un point A de manière monotone. On considère l'espace métrique $(\mathcal{M},d)$ suivant : ses points sont donnés par la réunion des rayons $[OA_n]$ et du rayon $[OA]$. La distance est celle induite par la distance de $\mathcal{P}$. Montrez que deux points de $(\mathcal{M},d)$ sont joints par un chemin de longueur finie mais que l'espace $(\mathcal{M},d_1)$ n'est pas compact, donc non homéomorphe à $(\mathcal{M},d)$. L'espace $(\mathcal{M},d)$ est un espace à la — Zénon–St_Thomas–la curiosité_est_un_vilain_défaut — : la distance de A à A_1 est finie, mais quand on va y voir de près, elle devient infinie.

L'auteur ignore si on peut supprimer «de longueur finie» dans la deuxième affirmation du théorème 4. Par ailleurs il pense que la curiosité n'est pas du tout un vilain défaut, et que le paradoxe de Zénon ne peut pas être évacué avec la simple définition, purement conventionnelle quant au fond, de la somme d'une série convergente.

Le procédé du théorème 4 est un procédé efficace pour construire des espaces géométriques. La métrique propre de la sphère peut être obtenue de cette manière à partir de la métrique de l'espace euclidien.

La relation de plus grande proximité

Dans un espace métrique on peut définir une notion «plus faible» que la distance : étant donnés 4 points A, B, C, D, nous considérons la **relation de plus grande proximité** définie comme suit : est plus proche de B que C ne l'est de D», c.-à-d. $d(A,B) \leq d(C,D)$.



C'est une notion plus faible que celle de distance en ce sens que deux distances très différentes (d et $\sqrt{d}$ par exemple), peuvent définir la même relation de plus grande proximité.

On peut vérifier par ailleurs que beaucoup de notions définies sur les espaces métriques dépendent seulement de la relation de plus grande proximité : exemple important, la notion d'application uniformément continue.

En outre la relation de plus grande proximité est une notion intuitivement beaucoup plus naturelle que celle de distance. On peut en effet difficilement parler de distance sans la notion de nombre réel, qui est une notion difficile et peu intuitive. Par contre, n'importe qui

peut vérifier dans la nature une relation de plus grande proximité entre 4 points donnés dès qu'il a à sa disposition un morceau de ficelle de longueur suffisante.
Dit autrement : il suffit de savoir déplacer un bout de bois assez long pour avoir à sa disposition un bon morceau de la relation de plus grande proximité (le morceau qui concerne les points plus proches entre eux que les extrémités du bout de bois).
Le théorème qui suit est donc tout à fait important, car il nous dit grosso modo que dans un espace géométrique, la distance ne dépend que de la relation de plus grande proximité.

Théorème 5 : Soit d la distance d'un espace géométrique $\mathcal{M}$ et d_1 une autre distance sur l'ensemble sous-jacent à $\mathcal{M}$. On note $\mathcal{M}_1$ l'espace métrique ainsi obtenu. On suppose que d et d_1 définissent la même relation de plus grande proximité, c.-à-d. qu'on a l'équivalence :

$$d(A,B) \le d(C,D) \quad \Leftrightarrow \quad d_1(A,B) \le d_1(C,D)$$

On suppose en outre que $\mathcal{M}_1$ est aussi un espace géométrique
Alors les deux distances d et d_1 sont proportionnelles : il existe un réel positif k tel que l'on ait, pour tous points M et N, $d_1(M,N) = k.d(M,N)$.

preuve> La phrase « J est un milieu de [AB] » peut être définie en termes uniquement de la relation de plus grande proximité, de la manière suivante :

$$d(J,A) = d(J,B) \text{ et, pour tout } M : [\, d(M,A) = d(M,B) \Rightarrow d(M,A) \ge d(J,A) \,]$$

On en déduit que les plus courts chemins sont les mêmes pour d et d_1. En outre le paramétrage construit au théorème 3 est le même. On en déduit que pour C et D sur un plus court chemin de A à B on a : $d(C,D)/d(A,B) = d_1(C,D)/d_1(A,B)$.
On conclut sans difficulté. ❑

Autres formulations du même théorème :

a) Au choix de l'unité de longueur près, la métrique d'un espace géométrique est entièrement caractérisée par la relation de plus grande proximité qu'elle définit.
b) Étant donné une relation à 4 variables définie sur un ensemble $\mathcal{M}$, il existe, au choix de l'unité de longueur près, au plus une distance qui fait de $\mathcal{M}$ un espace géométrique et pour laquelle la relation à 4 variables donnée au départ est la relation de plus grande proximité associée à la distance.
c) Une bijection entre espaces géométriques qui conserve la relation de plus grande proximité est une similitude (c.-à-d. conserve les rapports de longueurs)