GÉOMÉTRIES ÉLÉMENTAIRES (I)

Présentation

Ce fascicule comprend les 9 premiers chapitres d'un cours sur les géométries élémentaires.
Le découpage à la fin du chapitre 9 est un peu arbitraire, ce dont le lecteur voudra bien nous excuser.

Nous entendons par géométries élémentaires des géométries qui peuvent se traiter au moyens d'outils essentiellement algébriques et pas trop sophistiqués d'une part, et qui présentent une grande régularité d'autre part.

La grande régularité se traduit par l'existence de groupes de transformations assez gros qui conservent la structure géométrique.

Nous ne ferons donc que quelques brèves excursions dans un domaine comme la géométrie d'une surface à courbure variable.

Les géométries élémentaires comprennent tout d'abord les différentes géométries métriques planes régulières : euclidienne, sphérique (et elliptique), hyperbolique (plan de Lobatchevski, Bolyai, Beltrami, Klein, Poincaré et Cie).

Elles comprennent aussi les géométries affine, projective et circulaire.

Enfin, elles comprennent les géométries d'espace-temps, galiléennes ou einsteiniennes.

Toutes ces géométries ont des relations étroites entre elles. Par exemple la géométrie circulaire de dimension 2 (géométrie des cercles de la sphère) est une géométrie qui englobe les trois géométries métriques planes, mais qui est aussi la géométrie du ciel de la relativité restreinte.

Nous accordons une place assez importante aux commentaires, au sens, à la discussion des définitions, aux preuves intuitives. Nous énonçons beaucoup de théorèmes avec seulement un schéma de la preuve.

Nous invitons la lectrice à considérer les nombres qui numérotent les pages comme de vrais nombres mathématiques, et les cercles et droites dessinés ici ou là comme de vrais cercles et droites mathématiques. Les trop nombreuses pages sans figures sont uniquement imputables à la paresse de l'auteur et absolument pas à son désir de faire des démonstrations justes sur des figures inexistantes.

Nous nous limitons presque systématiquement aux dimensions 1, 2, 3 (quelquefois 4) en procédant des petites vers les grandes. Ceci n'a rien à voir avec le fait que tout nombre entier est somme de 4 carrés, ni avec le fait que les équations de degré strictement supérieur à 4 ne sont pas en général solubles par radicaux. Par contre, cela a à voir avec le fait que nous attribuons ordinairement la dimension 3 à l'espace ambiant et la dimension 4 à notre espace temps.

L'auteur sera très heureux des appréciations critiques de ce travail qui lui seront adressés. Ne comptez pas cependant recevoir un dollar en échange d'une erreur que vous auriez signalée.

Henri LOMBARDI

Table des matières

Géométries élémentaires (I)

Introduction générale

1) Géométrie euclidienne plane. Le plan euclidien comme espace métrique.

2) Géométrie affine plane réelle

3) Géométrie affine de dimension n sur un corps commutatif

4) Géométrie euclidienne dans l'espace (de dimension 3)

5) Géométrie métrique de la sphère

6) Espaces géométriques

7) Droite projective réelle, homographies

INTRODUCTION GÉNÉRALE

a) Remarques générales sur ce cours

Les méthodes en géométrie élémentaire

Malgré l'intuition immédiate des problèmes posés en géométrie euclidienne classique, donnée par le dessin des figures, certains résultats sont parfaitement inattendus, et les démonstrations peuvent sembler souvent mystérieuses.

Le but de ce cours n'est pas de donner un grand nombre de résultats inattendus et de belles démonstrations (inattendues elles aussi d'ailleurs en général), mais d'essayer de fournir un certain nombre de méthodes et de principes organisateurs, de les mettre à l'épreuve sur des problèmes typiques, et de les étendre à d'autres géométries élémentaires que la géométrie euclidienne.

On considérera trois grandes méthodes :

- les groupes de transformation
- le calcul vectoriel et barycentrique
- le calcul sur les coordonnées (encore appelé «géométrie analytique»).

La géométrie d'Euclide était basée sur la notion de figures égales. Il y avait donc, en filigrane, l'utilisation des isométries du plan.

Le point de vue moderne consiste à faire des isométries un objet d'étude à part entière. Cela apporte souvent une plus grande clarté dans les démonstrations.

En fait, c'est surtout l'utilisation de *différents* groupes de transformation qui permet une réelle organisation du matériau «géométrie».

Les groupes de transformation le plus directement liés à la géométrie élémentaire sont le groupe affine, le groupe des similitudes, le groupe des isométries et certains de leurs sous groupes. C'est malheureusement trop peu pour que se manifeste réellement la puissance de la méthode. C'est pourquoi, nous aborderons d'autres transformations : les transformations projectives (ou homographies), et les transformations circulaires.

De très nombreux problèmes de géométrie se traitent facilement par le calcul vectoriel, ou par un calcul sur les coordonnées. L'utilisation de «repères» (une origine et 2 vecteurs non colinéaires pour un repère cartésien en géométrie plane affine) permet en principe de ramener tout problème de géométrie à un calcul sur les coordonnées. En un sens donc, la géométrie, c'est du calcul algébrique. Tel est le programme de Descartes, qui reste d'actualité.

Mais bien souvent le calcul peut s'avérer «trop compliqué» (même s'il est théoriquement faisable). Donc ce n'est pas la panacée universelle.

Si on choisit de traiter un «petit problème» de géométrie par un calcul sur les coordonnées, on prêtera donc la plus grande attention au choix du repère : un repère bien adapté à une figure peut conduire à un calcul très simple, un repère mal adapté à un calcul infaisable.

L'importance cruciale des groupes de transformation peut être comprise en disant qu'ils permettent de mettre «de la structure géométrique» dans les calculs algébriques.

Par exemple le calcul vectoriel peut être compris de 2 manières.

La 1ère est de dire qu'il s'agit d'un calcul sur les coordonnées «simplifié» par le fait qu'on traite toutes les coordonnées en même temps dans un seul calcul : de ce point de vue l'écriture

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{W}$$

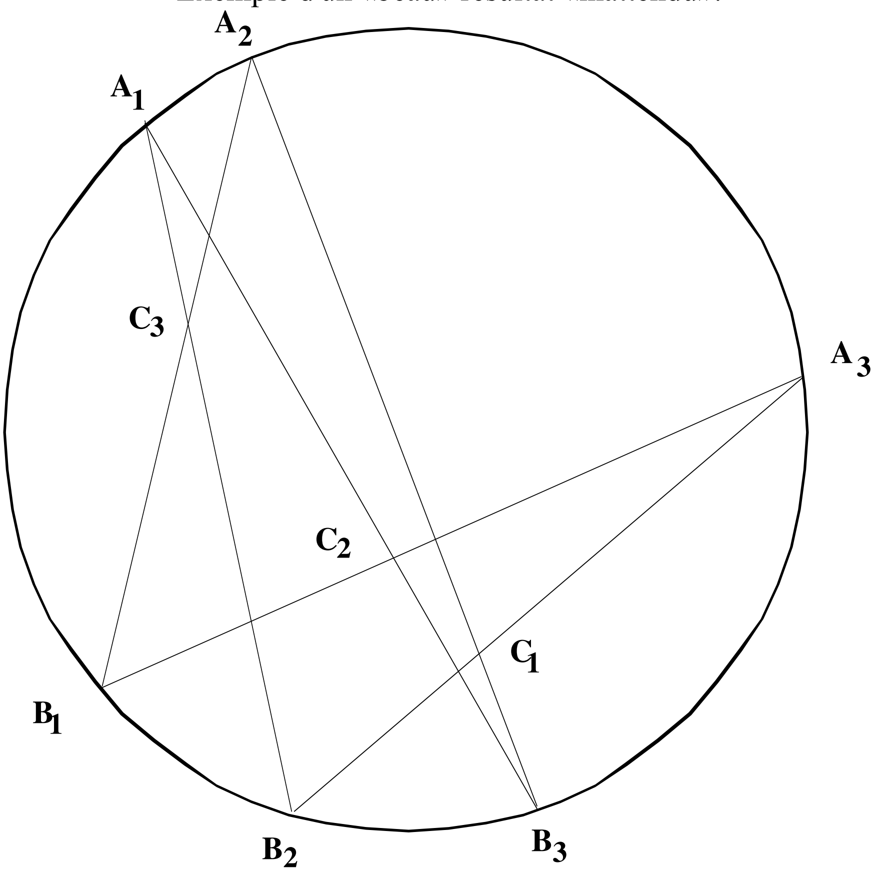
n'est que l'abréviation de : $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$, $u_3 = v_3 + w_3$; et l'écriture

$$\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = 0,$$

n'est que l'abréviation de : $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

La 2ème est de dire que les vecteurs sont des objets «vraiment» géométriques (contrairement aux coordonnées, qui dépendent du repère choisi) et que donc le calcul vectoriel est la forme «géométrique» du calcul algébrique sur les coordonnées.

Exemple d'un «beau» résultat «inattendu».



Théorème de Pascal : les 3 points C_1, C_2, C_3 sont alignés

Un but de ce cours est de rendre concrètes ces quelques méthodes géométriques ainsi que les rapports qui les relient.

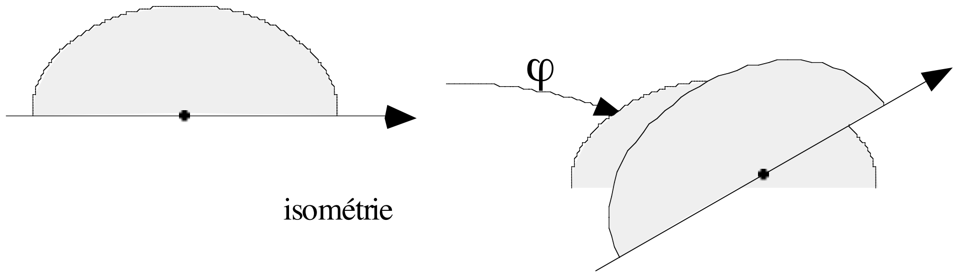
Les géométries non euclidiennes

Dans l'histoire des mathématiques, les géométries non euclidiennes ont une importance fondamentale, parce quelles introduisent une rupture dans le statut de la vérité. Avant les géométries non euclidiennes, il y avait *une* géométrie, qui était considérée comme l'étude d'une vérité extérieure à l'esprit humain, par les seuls moyens de l'esprit humain. C'était un peu comme la *découverte* de l'Amérique. Après, il s'agit bien plutôt d'*inventer*, de proposer différents modèles mathématiques plus ou moins approximatifs, pour une réalité extérieure fuyante et incertaine.

La géométrie élémentaire classique, ou géométrie euclidienne, extrêmement rigide, reste néanmoins importante comme modèle local et imparfait d'une géométrie plus malléable, plus conforme à la réalité expérimentale.

Sans vouloir décrire de telles géométries dans toute leur généralité, nous avons voulu donner néanmoins le parfum et le goût de la chose, en introduisant les géométries sphérique, elliptique et hyperbolique, qui ont de très grandes ressemblances avec la géométrie euclidienne mais qui présentent néanmoins des différences significatives faciles à appréhender.

Une ressemblance importante entre ces géométries planes est l'identité de leur comportement local, en ce sens que le groupe des isométries d'un petit disque est le même (on tourne autour du point, ou on fait une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par le point) que celui de la géométrie euclidienne plane. Une autre ressemblance est la propriété dite de libre mobilité selon laquelle une isométrie est complètement caractérisée par l'image d'un «drapeau».



Comme nous n'avons qu'une appréhension locale de l'espace qui nous entoure, il est clair que les différentes géométries proposées sont des candidates aussi valables les unes que les autres comme modèles de l'espace «réel», candidates à départager sur une base expérimentale.

En outre ces différentes géométries apparaissent comme des «sous-géométries» d'une seule «super-géométrie», la géométrie circulaire de la sphère. La géométrie circulaire est donc un cadre unificateur tout à fait intéressant. Elle peut en outre être traitée au moyen des inversions (qui rajoutent un point à l'infini unique à un espace euclidien), ou au moyen des transformations projectives (qui rajoutent un point à l'infini dans chaque direction de droite d'un espace affine).

L'appareillage mathématique nécessaire n'est pas extraordinaire puisqu'il s'agit essentiellement d'algèbre linéaire en dimension finie sur les réels et/ou les complexes. Les difficultés plus importantes (appel aux fonctions logarithme et exponentielle) sont tout à fait comparables à celles inhérentes à la géométrie euclidienne classique (appel aux fonctions sinus et cosinus).

Les géométries d'espace-temps

Ce sont les grandes oubliées des cours classiques de géométrie. Nous espérons montrer qu'il s'agit là d'une injustice tout à fait injustifiée... Mais ne vendons pas la peau de l'ours avant de l'avoir écrit.

b) Remarques diverses

Outillage

On ne peut faire de géométrie sans dessins. Le mieux est de ne pas garder ses dessins dans la tête mais de les mettre sur papier. Il est donc indispensable d'avoir toujours avec soi : du papier blanc, du papier quadrillé, une règle longue, un compas, un instrument quelconque pour tracer des parallèles (carolette, ou règle + équerre), des stylos de couleurs, des crayons, gommes, des mains propres etc. etc.

Bibliographie

Une documentation historique est importante. Nous recommandons donc particulièrement les trois premiers livres de la bibliographie suivante.

Géométrie supérieure	Efimov	MIR
Introduction à la géométrie	Lehmann, Bkouche	PUF
Mathématiques au fil des ages	Groupe Inter Irem Epistémologie	Gauthier-Villars
Algèbre Géométrique	Artin E.	Gauthier-Villars
Géométrie projective	Samuel P.	PUF
Le programme d'Erlangen	Klein F.	Gauthier-Villars
Leçons de Géométrie (I, II)	Postnikov	MIR
Les fondements de la Géométrie	Lelong-Ferrand	PUF
Géométrie	Berger	Nathan
Introduction to Geometry	Coxeter H.	Wiley Intersc.
Geometries and Groups	Nikulin, Shafarevich	Springer
Euclidean and non euclidean geometries	Greenberg M.	W. H. Freeman

Points de repère historique (géomètres, astronomes)

Euclide	vers 300 av. J.-C.	Leibniz	1646 - 1716	Cayley	1821 - 1895
Galilée	1564 - 1642	Euler	1704 - 1783	Weierstrass	1825 - 1897
Kepler	1571 - 1630	Gauss	1777 - 1855	Riemann	1826 - 1866
Desargues	1591 - 1661	Poncelet	1788 - 1867	Beltrami	1835 - 1899
Descartes	1596 - 1650	Cauchy	1789 - 1857	Klein	1849 - 1925
Pascal	1623 - 1662	Lobatchevski	1792 - 1856	Poincaré	1854 - 1912
Newton	1642 - 1727	Hamilton	1805 - 1865	Hilbert	1862 - 1943

c) Groupe opérant sur un ensemble, sur un groupe

Nous donnons ici quelques rappels élémentaires concernant l'opération d'un groupe sur un ensemble et l'opération d'un groupe sur un autre groupe. Nous complétons par quelques exercices.

Groupe opérant sur un ensemble

Pour un ensemble $\mathcal{E}$, nous noterons $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ le groupe des bijections de $\mathcal{E}$. La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 1 : *(groupe opérant sur un ensemble, axiomes)*

Soit $\mathcal{G}$ un groupe et $\mathcal{E}$ un ensemble. Il revient au même de se donner :

- ou bien, un homomorphisme τ de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{S}(\mathcal{E})$
- ou bien, une loi de composition externe : $\mathcal{G} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$: $(g,x) \mapsto g * x$

vérifiant :

$g * (g' * x) = (g \,.\, g') * x$, $1 * x = x$ (1 est le neutre de $\mathcal{G}$)

On dit alors qu'on a défini une opération de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$.

Notation : $\tau(g)$ se note encore τ_g ou $\tilde{g}$ de sorte que : $\tau(g)(x) = \tau_g(x) = \tilde{g}(x) = g * x$

NB: lorsque le groupe est commutatif et noté additivement, la loi externe est en général aussi notée additivement, les deux axiomes deviennent alors :

$$g + (g' + x) = (g+ g') + x,\ \ 0 + x = x \ \ (0 \text{ est le neutre de } \mathcal{G})$$

ou, en notant la loi externe dans l'autre sens :

$$(x + g') + g = x + (g'+ g),\ \ x + 0 = x \ \ (0 \text{ est le neutre de } \mathcal{G})$$

Remarque Le plus souvent, un ensemble $\mathcal{E}$ est considéré avec une structure additionnelle (espace vectoriel, ou distance par exemple). Dans ce cas, on considère le groupe des automorphismes de $\mathcal{E}$ (pour cette structure additionnelle) plutôt que $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. Dans la formulation «loi de composition externe», il faut alors rajouter des axiomes pour dire que la bijection $x \mapsto g * x$ est un isomorphisme de la structure.

Rappel de définitions

Pour $x \in \mathcal{E}$, **l'orbite** de x, notée $\mathcal{O}_x$, est l'ensemble des $g * x$ pour $g \in \mathcal{G}$; le **stabilisateur** de x, noté $\mathcal{G}_x$, est l'ensemble de $g \in \mathcal{G}$ tels que $x = g * x$.

Le groupe $\mathcal{G}$ opère **fidèlement** sur $\mathcal{E}$ si l'homomorphisme τ est injectif.

Le groupe $\mathcal{G}$ opère **simplement** sur $\mathcal{E}$ si : $\forall x \in \mathcal{E}$ $x = g * x \Rightarrow g = 1$.

Le groupe $\mathcal{G}$ opère **transitivement** sur $\mathcal{E}$ si : $\forall x, y \in \mathcal{E}$ $\exists g \in \mathcal{G}$ $y = g * x$.

Exemples

1) Si $\mathcal{E}$ est un ensemble et $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe de toutes les bijections de $\mathcal{E}$, il opère de manière naturelle sur $\mathcal{E}$: on pose $g * x = g(x)$. C'est une opération fidèle.
2) Tout groupe $\mathcal{G}$ (noté multiplicativement) opère sur lui-même par «translations à gauche», c.-à-d. si on définit $g * x := g.x$. Cette opération est à la fois simple et transitive.
3) Tout groupe $\mathcal{G}$ (noté multiplicativement) opère sur lui-même par «translations à droite», c.-à-d. si on définit $g * x := x.g^{-1}$. Cette opération est à la fois simple et transitive.
4) Soit $\mathcal{H}$ un sous groupe de $\mathcal{G}$ et considérons l'opération de $\mathcal{H}$ sur l'ensemble $\mathcal{G}$ par les translations à droite. L'orbite de $g \in \mathcal{G}$ pour cette action est l'ensemble

$g\mathcal{H} = \{ gh : h \in \mathcal{H} \}$.

Cet ensemble est appelé une classe à gauche modulo $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$. L'ensemble des classes à gauche modulo $\mathcal{H}$ est noté $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Le groupe $\mathcal{G}$ opère naturellement par «translations à gauche» sur l'ensemble $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, il suffit de poser : $k * g\mathcal{H} := (kg)\mathcal{H}$ (on vérifie que le résultat ne dépend pas du g choisi dans la classe).

Proposition 2 : On considère un groupe $\mathcal{G}$ opérant sur un ensemble $\mathcal{E}$.

a) Les orbites des $x \in \mathcal{E}$ forment une partition de $\mathcal{E}$.

b) Pour $x \in \mathcal{E}$ le stabilisateur $\mathcal{G}_x$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, et l'application $h\mathcal{G}_x \longleftrightarrow h * x$ établit une bijection entre $\mathcal{G}/\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{O}_x$.

Exercice 1 : On utilise la notation multiplicative. On demande de démontrer la proposition 2 et plus précisément :

a) Montrer que les orbites des $x \in \mathcal{E}$ forment une partition de $\mathcal{E}$. Explicitez la relation d'équivalence correspondant à cette partition.

b) Pour $x \in \mathcal{E}$ montrer que $\mathcal{G}_x$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ et décortiquez la bijection naturelle entre $\mathcal{G}/\mathcal{G}_x$ et $\mathcal{O}_x$.

c) Si $y = g * x$ explicitez $\mathcal{G}_y$ en fonction de g et $\mathcal{G}_x$.

d) Montrez que le stabilisateur de $g\mathcal{H}$ pour l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ par translations à gauche est $g\mathcal{H}g^{-1} = \{ ghg^{-1} : h \in \mathcal{H} \}$.

Exercice 2 : *Il est fondamental d'avoir assimilé les mécanismes suivants*

a) Si $\mathcal{G}$ opère sur $\mathcal{E}$, il opère alors de manière naturelle sur $\mathcal{E} \infty \mathcal{E}$. Explicitez le, et montrez que cette opération n'est pas transitive si $\mathcal{E}$ a au moins deux éléments.

b) Soit maintenant $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application. Soit ϕ son graphe et notons $g * \phi$ l'image de ce graphe «par $\tilde{g}$» (puisque $\mathcal{G}$ opère sur $\mathcal{E} \infty \mathcal{E}$). Montrez que $g * \phi$ est le graphe de $\tilde{g} \circ \varphi \circ \tilde{g}^{-1}$. On notera $g * \varphi := \tilde{g} \circ \varphi \circ \tilde{g}^{-1}$.

c) Montrer que pour x dans $\mathcal{E}$ on a :

x est fixe par φ (c.-à-d. $\varphi(x) = x$) / $g * x$ est fixe par $g * \varphi$

d) Supposons que $\mathcal{E}$ soit un ensemble fini et φ une bijection de $\mathcal{E}$. Montrez que si φ est un cycle d'ordre k il en est de même pour $g * \varphi$. (commencez avec $k = 3$ par exemple, et généralisez).

Plus généralement : disons que la géométrie d'une bijection φ est donnée par le type de sa décomposition en produit de cycles disjoints (exemple d'un type de décomposition : la bijection est produit de cycles disjoints parmi lesquels 3 sont d'ordre 2, 1 est d'ordre 5 et 2 sont d'ordre 8). Montrer que φ et $g * \varphi$ ont la même géométrie.

Groupe opérant sur un groupe, produit semi-direct

Pour un groupe $\mathcal{K}$, nous noterons **Aut**($\mathcal{K}$) le groupe des automorphismes de $\mathcal{K}$.

Proposition (et définition) 3 : *(groupe opérant sur un groupe, axiomes)*

Soit $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{K}$ deux groupes (notés multiplicativement).

Il revient au même de se donner :

– ou bien, un homomorphisme τ de $\mathfrak{G}$ vers $\mathbf{Aut}(\mathfrak{K})$

– ou bien, une loi de composition externe : $\mathfrak{G} \times \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{K}$: $(g,k) \longmapsto g * k$ vérifiant : (pour tous g, g' dans $\mathfrak{G}$ et k, k' dans $\mathfrak{K}$)

$g * (g' * k) = (g \,.\, g') * k$,

$1 * k = k$ (1 est le neutre de $\mathfrak{G}$) et

$g * (k \,.\, k') = (g * k).\,(g * k')$

On dit alors qu'on a défini une opération de $\mathfrak{G}$ sur le groupe $\mathfrak{K}$.

Exercice 3 : Démontrer la proposition 3.

Proposition (et définitions) 4 : *(automorphismes intérieurs d'un groupe)*

Dans un groupe $\mathfrak{G}$ on note $g * h := g.h.g^{-1}$, et on l'appelle **le conjugué de** h **par** g. L'application $\tilde{g} : h \longmapsto g * h$ est un automorphisme de $\mathfrak{G}$ qu'on note $\tau_{\mathfrak{G}}(g)$ et qu'on appelle **automorphisme intérieur**.

L'application $\tau_{\mathfrak{G}} : g \longmapsto \tau_{\mathfrak{G}}(g)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans le groupe $\mathbf{Aut}(\mathfrak{G})$, autrement dit on obtient ainsi une opération de $\mathfrak{G}$ sur lui-même en tant que groupe.

Le noyau de $\tau_{\mathfrak{G}}$ est le centre de $\mathfrak{G}$.

L'image de $\tau_{\mathfrak{G}}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbf{Aut}(\mathfrak{G})$.

Exercice 4 : Démontrer la proposition 4.
Montrer d'abord que l'application $\tilde{g} : h \longmapsto g * h$ est un homomorphisme de $\mathfrak{G}$ dans lui même, et ensuite que : $\tau_{\mathfrak{G}}(g \circ h) = \tau_{\mathfrak{G}}(g) \circ \tau_{\mathfrak{G}}(h)$ et $\tau_{\mathfrak{G}}(1) = \mathrm{Id}$.

Exercice 5 : On considère un groupe $\mathfrak{G}$ qui opère fidèlement sur un ensemble $\mathfrak{E}$. Dans ce cas, l'homomorphisme τ injectif donne un isomorphisme de $\mathfrak{G}$ sur son image dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{E})$. Pour g et h dans $\mathfrak{G}$, on peut donc considérer $g * \tau(h)$ (au sens donné à l'exercice 2b). Montrez que cette bijection de $\mathfrak{E}$ est égale à $\tau(g.h.g^{-1})$.
La «morale» de cet exercice est que l'opération «naturelle» de $\mathfrak{G}$ sur lui-même en tant que groupe est l'opération par automorphismes intérieurs.

Remarque Il est clair qu'un sous-groupe distingué de $\mathfrak{G}$ n'est autre qu'un sous-groupe conservé par tous les automorphismes intérieurs. Les classes d'équivalence correspondant à l'action de $\mathfrak{G}$ sur lui-même par automorphismes intérieurs s'appellent des **classes de conjugaison**.

Définition 4 : *(produit semi-direct interne)*

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe (noté multiplicativement), $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ deux sous-groupes, avec $\mathfrak{H}$ distingué dans $\mathfrak{G}$. On dit que $\mathfrak{G}$ est **produit semi-direct interne** de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{K}$ si l'application $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{G}$: $(h,k) \longmapsto h \,.\, k$ est bijective.

On note alors $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \rtimes \mathfrak{K}$.

Remarque Avec la notation de la proposition 4, on obtient :

$$(h \,.\, k) \,.\, (h' \,.\, k') = h \,.\, k \,.\, h' \,.\, k^{-1} \,.\, k \,.\, k' = (h \,.\, \tau_{\mathfrak{G}}(k)(h')) \,.\, (k \,.\, k')$$

Ceci conduit à définir un produit semi-direct de manière abstraite (proposition et définition 7).

Proposition 5 : Soit $\mathfrak{G}$ un groupe, $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ deux sous-groupes. Si $\mathfrak{H}$ est distingué dans $\mathfrak{G}$, le sous-groupe engendré par $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{K}$ est l'ensemble $\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}$ des produits $h \,.\, k$ où h parcourt $\mathfrak{H}$ et k parcourt $\mathfrak{K}$.

Proposition 6 : Pour que $\mathfrak{G}$ soit produit semi-direct interne du sous-groupe $\mathfrak{H}$ par le sous-groupe $\mathfrak{K}$ il faut et suffit qu'on ait les conditions suivantes réalisées :

$\mathfrak{H}$ est distingué dans $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} \leftrightarrow \mathfrak{K}$ est réduit au neutre, $\mathfrak{H} \approx \mathfrak{K}$ engendre $\mathfrak{G}$.

Lorsque $\mathfrak{G}$ est fini, on peut remplacer la dernière condition par :

$$\#(\mathfrak{G}) = \#(\mathfrak{H}).\#(\mathfrak{K}).$$

Exercice 6 : Donner les preuves des propositions 5 et 6.

Proposition (et définition) 7 : *(produit semi-direct abstrait)*

Soit $\mathfrak{B}$ un groupe opérant sur un autre groupe $\mathfrak{A}$ et θ l'homomorphisme correspondant de $\mathfrak{B}$ dans le groupe **Aut**($\mathfrak{A}$). On munit le produit cartésien $\mathfrak{A} \infty \mathfrak{B}$ d'une loi de groupe en posant :

$$(h, k) \bullet (h', k') = (h \,.\, \theta(k)(h'), k \,.\, k')$$

On appelle le groupe obtenu le **produit semi-direct abstrait** de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ et on le note $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \infty_{\theta} \mathfrak{B}$.

Exercice 7 : Montrez la proposition 7.

Proposition 8 : Si $\mathfrak{G}$ produit semi-direct interne de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{K}$, il est canoniquement isomorphe au produit semi-direct abstrait de $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{K}$ défini au moyen de l'homomorphisme $\tau_{\mathfrak{G}}$ «restreint à $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{H}$» : $\tau_{\mathfrak{G}}(k)(h) = k \,.\, h \,.\, k^{-1}$.

Exercice 8 : Démontrer la proposition 8.

Exercice 9 : Démontrer «la réciproque de la proposition 8», c.-à-d. qu'un produit semi-direct abstrait de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ est produit semi-direct interne de deux sous-groupes respectivement isomorphes à $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Exercice 10 : On note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$. On note (a,b,c,d) le cycle $a \longleftrightarrow b \longleftrightarrow c \longleftrightarrow d \longleftrightarrow a$.

a) Montrez que dans S_5 le cycle $\varphi = (1,2,3,4,5)$ et le produit de cycles $\sigma = (1,5)(2,4)$ engendrent un groupe $\mathfrak{G}$ d'ordre 10 produit semi-direct interne du sous groupe engendré par φ et du sous-groupe engendré par σ. Explicitez tous les éléments de ce produit semi-direct. Si on numérote les sommets d'un pentagone régulier en suivant les sommets régulièrement, montrez que les substitutions précédemment définies correspondent à des isométries du pentagone, et explicitez ces isométries (rotations ou symétries orthogonales) sous forme géométrique. Établir quelles sont les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{G}$.

b) Montrez que dans $\mathfrak{S}_6$ le cycle $\varphi = (1,2,3,4,5,6)$ et le produit de cycles $\sigma = (1,6)(2,5)(3,4)$ engendrent un groupe $\mathfrak{H}$ d'ordre 12 produit semi-direct interne du sous groupe engendré par φ et du sous-groupe engendré par σ. Finir le b) de manière analogue au a).

c) Montrez que dans $\mathfrak{S}_6$ le produit de cycles $\psi = (1,2,3)(4,5,6)$ et le produit de cycles $\tau = (1,4)(2,6)(3,5)$ engendrent un groupe $\mathfrak{K}$ d'ordre 6 produit semi-direct interne du sous groupe engendré par ψ et du sous-groupe engendré par τ. Explicitez tous les éléments de ce produit semi-direct. Montrez que $\mathfrak{K}$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathfrak{H}$ (question b) engendré par φ^2 et σ.

Exercice 11 : Soit $\mathfrak{F}$ un groupe cyclique d'ordre 5, engendré par un élément a. Soit $\mathfrak{A}$ le produit direct de $\mathfrak{F}$ par lui-même.

a) Montrez que l'application $\sigma : (x,y) \longleftrightarrow (x,x.y)$, est un automorphisme de $\mathfrak{A}$. Soit $\mathfrak{B}$ le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{A}$ engendré par σ. Quel est l'ordre de $\mathfrak{B}$?

b) Montrez que le produit semi-direct abstrait $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{A}$ par $\mathfrak{B}$ est un groupe à 125 éléments (on fait opérer $\mathfrak{B}$ sur $\mathfrak{A}$ par $\varphi * x = \varphi(x)$).

c) Montrez que le centre de $\mathfrak{G}$ est isomorphe à $\mathfrak{F}$ et que tout élément de $\mathfrak{G}$ distinct du neutre est d'ordre 5.

1) GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE. LE PLAN EUCLIDIEN COMME ESPACE MÉTRIQUE.

a) Introduction

La démarche suivie dans ce chapitre

Le fait d'avoir placé ce chapitre en premier, avant celui sur les espaces affines réels, est contraire à l'exposition moderne habituelle, selon laquelle un plan euclidien s'obtient en rajoutant un produit scalaire sur un plan affine réel. Historiquement cependant, la structure affine a été inventée à partir de la structure euclidienne en faisant abstraction de toutes les propriétés liées à la distance et aux angles pour ne garder que celles liées aux droites et au parallélisme.

Dans la mesure où nous voulons restituer cette démarche pour le plan réel affine, il nous faut introduire d'abord le plan euclidien. Cependant, une introduction ‘à la Euclide’ rigoureuse du plan euclidien (Hilbert a montré que c'était possible[1]) réclame des efforts quasiment surhumains. Nous avons alors le choix entre une présentation informelle à la Euclide, relativement naturelle et vraiment pas rigoureuse, ou une présentation efficace, plus rigoureuse, mais pas du tout naturelle, basée sur le calcul algébrique via les coordonnées. Nous avons opté pour le second choix, après une introduction informelle pour ne pas rentrer directement dans l'eau froide du calcul sur les coordonnées à la Descartes.

Dans la suite de l'introduction, nous présentons une preuve géométrique classique du théorème de Pythagore et examinons les conditions de sa validité. Nous montrons le lien naturel qui unit le théorème de Pythagore et le produit scalaire.

Dans la section b) nous examinons le plan euclidien du point de vue du calcul sur les coordonnées, sur le modèle $\mathbb{R}^2$.

Dans la section c), nous voyons comment les résultats du b) se transportent du modèle $\mathbb{R}^2$ à un espace métrique *isomorphe* au modèle (c.-à-d. isométrique à $\mathbb{R}^2$).

Dans tout le chapitre, nous avons essentiellement en vue les propriétés structurelles liées au groupe des isométries. Les choses vraiment difficiles, concernant la mesure des

---

[1] On pourra consulter : D. Hilbert. Les fondements de la Géométrie. chez Gauthier-Villars

angles, (c.-à-d. concernant la structure du groupe des rotations), relèvent de l'analyse et non de l'algèbre et ne peuvent être traitées ‘proprement’ dans le volume restreint de ce cours. Nous avons néanmoins essayé de situer exactement les difficultés.

Démonstration du Théorème de Pythagore avec des puzzles

Soit ABC un triangle rectangle en C et notons a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB. Considérons les pièces suivantes d'un puzzle :

– quatre triangles égaux à ABC
– un carré de côté a
– un carré de côté b
– un carré de côté c

Nous pourrons remplir un cadre carré de côté (b + a) de deux manières différentes avec certaines de ces pièces, conformément à la figure 1.

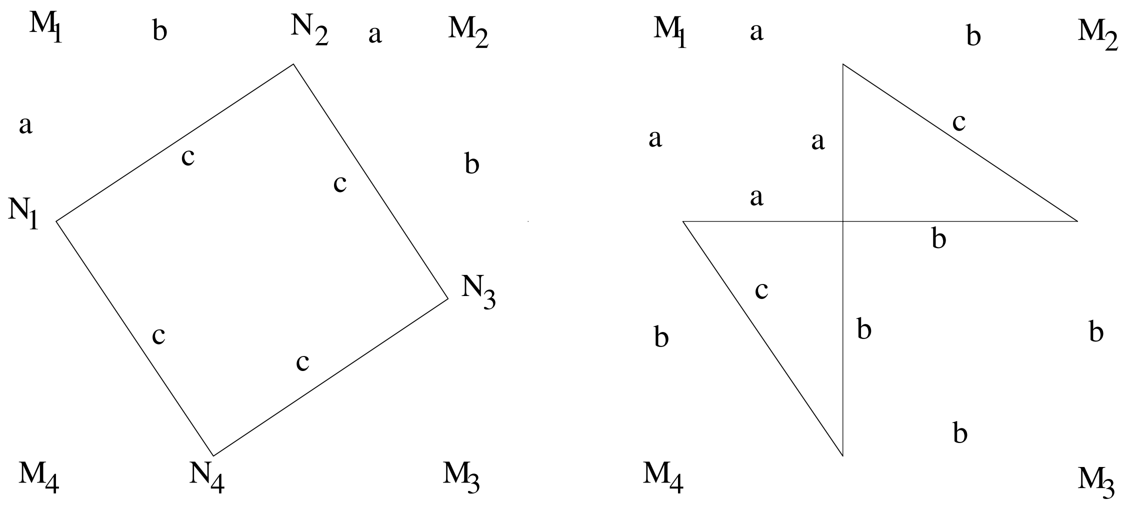


figure 1α Figure 1 figure 1β

On en déduit le fameux théorème de Pythagore :

Aire du carré de côté c = Aire du carré de côté b + Aire du carré de côté a

Cette démonstration est un peu rapide : il est nécessaire de l'examiner en détail. Et tout d'abord : pourquoi les carrés existent-ils ? (question saugrenue ? voire : essayez de dessiner un carré à la surface d'une sphère : il est bien difficile d'obtenir un quadrilatère avec quatre angles droits).

Petite parenthèse

Exercice 1 : Deux points A et B étant donnés, construire le carré de côté AB avec une règle et un compas rouillé.

Une fois que vous avez résolu cet exercice, imaginez ce que donnerait la même construction à la surface d'une sphère (en remplaçant les «droites» par des «grands cercles», plus courts chemins d'un point à un autre sur la sphère).

fin de petite parenthèse.

Dans le plan ordinaire, les carrés existent «parce que» la somme des angles d'un triangle est 180°. D'où on déduit que la somme des angles d'un quadrilatère convexe fait 360° : donc un quadrilatère convexe avec trois angles droits a son quatrième angle droit. D'où l'existence des rectangles et des carrés.

Ensuite, dans la figure 1α pourquoi le quadrilatère $N_1N_2N_3N_4$ est-il un carré ? c'est-à-dire : pourquoi ses angles sont-ils droits ? De nouveau parce que la somme des angles du triangle $N_1N_2M_1$ est égale à deux droits, ce qui montre que l'angle $N_4N_1N_2$ (par exemple) est égal à l'angle en M_1 du triangle $N_1N_2M_1$, etc...

En conclusion : nous voyons que la preuve parfaitement convaincante du théorème de Pythagore par les puzzles comporte pas mal d'hypothèses cachées, avec comme point crucial la fait que la somme des angles d'un triangle est un angle plat.

Exercice 2 : Deux points A et B étant donnés, construire avec une règle et un compas un point C tel que $AC = \sqrt{13}\,AB$.

Le produit scalaire : discussion informelle

Soit $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ un repère du plan avec $OI = OJ$, $\overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{OJ}$. On peut choisir OI comme unité de longueur. Le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est alors appelé un **repère orthonormé**. Notons $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.

Soit $\overrightarrow{W}$ un vecteur du plan, que nous écrivons $\overrightarrow{W} = b\,\overrightarrow{U} + c\,\overrightarrow{V}$ ($b, c \in \mathbb{R}$).

Notons enfin $\| \overrightarrow{W} \|$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{W}$, c'est-à-dire la longueur d'un segment [AB] tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{W}$ (Nous supposons donc déjà que la longueur est inchangée par translation).

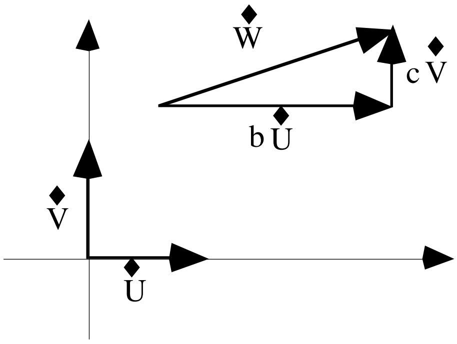


Figure 2

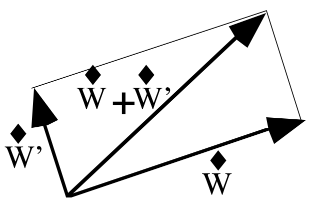


Figure 3

On a : $\| b\,\overrightarrow{U} \| = |b|$, $\| c\,\overrightarrow{V} \| = |c|$ et donc, d'après Pythagore $\| \overrightarrow{W} \|^2 = b^2 + c^2$

Soit maintenant $\overrightarrow{W'} = b'\,\overrightarrow{U} + c'\,\overrightarrow{V}$ un deuxième vecteur du plan.

La condition d'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{W'}$, exprimée via Pythagore, est la suivante :

$\| \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} \|^2 = \| \overrightarrow{W} \|^2 + \| \overrightarrow{W'} \|^2$

Comme on a : $\| \overrightarrow{W} \|^2 = b^2 + c^2$,

$\| \overrightarrow{W'} \|^2 = b'^2 + c'^2$

et $\| \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} \|^2 = (b + b')^2 + (c + c')^2$

$= \| \overrightarrow{W} \|^2 + \| \overrightarrow{W'} \|^2 + 2(bb' + cc')$

on obtient l'équivalence :

$\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{W'}$ / $bb' + cc' = 0$

De plus $2(bb' + cc') = \| \overrightarrow{W} + \overrightarrow{W'} \|^2 - \| \overrightarrow{W} \|^2 - \| \overrightarrow{W'} \|^2$

On obtient donc les résultats suivants :

- le réel bb’ + cc’ ne dépend pas du choix du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, mais seulement du choix de l'unité de longueur utilisée.
- la condition bb’ + cc’ = 0 exprime l'orthogonalité de $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{W}’$.

Une unité de longueur étant choisie, on appelle **produit scalaire** de $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{W’}$, et on note $\overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W’}$ le réel bb’ + cc’.

On obtient : $\| \overrightarrow{W} \|^2 = \overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W}$, d'où la notation $\overrightarrow{W}^2$.

De plus les identités suivantes sont vérifiées par un calcul immédiat sur l'expression analytique bb’ + cc’ :

symétrie : $$\overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W’} = \overrightarrow{W’} \bullet \overrightarrow{W}$$

linéarité : $$\overrightarrow{W} \bullet (\overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W_2}) = \overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W_1} + \overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W_2}$$
$$\overrightarrow{W} \bullet \alpha\overrightarrow{W_1} = \alpha(\overrightarrow{W} \bullet \overrightarrow{W_1})$$

Discussion : Nous avons qualifié d'informelle l'introduction au produit scalaire développée dans cette section dans la mesure où nous n'avons pas précisé ce qui était considéré comme donné a priori, et ce qui résultait de ces données par des constructions particulières. Par exemple nous avons parlé de vecteurs, de segments, de triangles, de longueur d'un segment, d'orthogonalité de deux droites, d'angles d'un triangle sans en donner de définition préalable.

Le but était seulement de montrer comment, à partir de quelques hypothèses élémentaires acceptables (la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, et de nombreuses hypothèses non explicitées concernant les droites, les triangles, les déplacements), ou aboutit naturellement à la notion de produit scalaire.

En fait, la notion de distance n'est pas une notion a priori en géométrie expérimentale. C'est une notion *construite* à partir de la notion de déplacement : une longueur de 10 mètres s'obtient en mettant bout à bout 10 règles de un mètre, c.-à-d. en *déplaçant* 9 fois une règle de un mètre. Dans le même ordre d'idées : qu'un mètre vertical soit «égal» à un mètre horizontal n'a de sens que via la notion d'objet solide (qui ne se déforme pas lorsqu'on le déplace), donc de déplacement[2].

On pourrait faire une présentation de la géométrie euclidienne basée sur le groupe des déplacements. Présentation qui aurait l'avantage d'être naturelle, en ce sens qu'elle mimerait, abstraitement, la démarche pratique des géomètres arpenteurs.

---

2 Histoire belge (pour un Français..., car pour un Belge, c'est une histoire française) : – pourquoi dressez-vous ce poteau avant de le mesurer ? – vous m'avez demandé de mesurer sa hauteur, non sa longueur.
Cette réponse n'est absolument pas stupide a priori, bien qu'elle fasse rire. Car a priori l'étalon de solide indéformable ce n'est pas le poteau, mais le mètre à ruban (qui, par ailleurs, est très déformable...). Et d'ailleurs, si tous les objets qualifiés de solides avaient été deux fois plus courts verticalement qu'horizontalement, personne ne s'en serait jamais rendu compte avant les voyages dans l'espace. Lesquels ont plutôt donné raison au "bon sens". Le mot de la fin sur cette question n'est sûrement pas écrit, car le raccourcissement peut ne pas être actuellement mesurable : ça ne fait pas bien longtemps qu'on a pu mesurer expérimentalement la différence, infime, de rapidité de l'écoulement du temps en haut et en bas d'un immeuble de 10 étages.

Il se trouve que, du point de vue de l'efficacité immédiate, il est beaucoup plus simple de considérer la distance comme donnée a priori. Et que les propriétés géométriques de la distance sont particulièrement simples lorsqu'elles sont vues à travers le produit scalaire.

Ainsi, on peut réduire les propriétés de la géométrie plane élémentaire ordinaire à un calcul algébrique dans un espace vectoriel réel de dimension 2 où a été défini un produit scalaire. C'est sans doute Descartes (1596-1650) qui a formulé très clairement une idée semblable pour la première fois[3]. Cependant la notion d'espace vectoriel comme bon cadre de calcul n'a été dégagée qu'au 19ème siècle.

b) Le modèle standard de plan euclidien et son groupe d'isométries

Une définition laborieuse

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R} \infty \mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{U'} := xx' + yy' \text{ où } \overrightarrow{U} = (x,y),\ \overrightarrow{U'} = (x',y')$$

On note $\| \overrightarrow{U} \| = \sqrt{\overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{U}}$ (norme du vecteur $\overrightarrow{U}$) (1)

On rappelle que $\| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \| \_ \| \overrightarrow{U} \| + \| \overrightarrow{V} \|$ (2)

avec, si $\overrightarrow{V} \_ \overrightarrow{0}$:

$$\| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \| = \| \overrightarrow{U} \| + \| \overrightarrow{V} \| \ / \ \exists\, \lambda \_ 0 \ \ \overrightarrow{U} = \lambda . \overrightarrow{V} \quad (3)$$

c.-à-d. encore, modulo un petit calcul:

$$\| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \| = \| \overrightarrow{U} \| + \| \overrightarrow{V} \| \ / \ \exists\, \lambda \ \square\ [0,1] \ \ \overrightarrow{U} = \lambda .(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) \quad (4)$$

L'égalité $2\ \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{V} = \| \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \|^2 - \| \overrightarrow{U} \|^2 - \| \overrightarrow{V} \|^2$

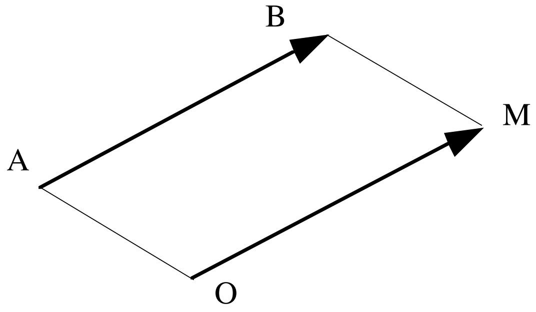
permet de retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Un résultat essentiel est celui-ci : Étant donné un couple $(\overrightarrow{U} , \overrightarrow{V})$ de vecteurs orthogonaux et de norme 1 de $\mathbb{R}^2$ tout vecteur $\overrightarrow{W}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{W} = x.\overrightarrow{U} + y.\overrightarrow{V}$, et les coordonnées x et y peuvent être retrouvées à partir du produit scalaire :

$$x = \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{W},\ y = \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{W}$$

Nous allons maintenant introduire une composante schizophrénique dans notre perception de $\mathbb{R}^2$: tantôt nous le voyons comme un ensemble de **points** et nous le notons $\mathcal{E}_2$, tantôt nous le voyons comme un ensemble de **vecteurs** et nous le notons $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$. Un point sera noté par une majuscule, du genre A, B, C ou M, tandis qu'un vecteur devra être surmonté d'une flèche, comme on a fait jusqu'à maintenant. Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}_2$ égaux respectivement à (a,a') et (b,b'), nous noterons $\overrightarrow{AB}$ le vecteur (b – a,b' – a').

---

[3] Voir le texte de M.-F. Roy sur l'actualité du programme de Descartes : «Démonstration automatique en géométrie, une approche par l'algèbre», dans la brochure «La démonstration mathématique dans l'histoire» publiée par la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (1990).



Le même élément de $\mathbb{R}^2$ qui est noté M dans $\mathcal{E}_2$ est donc noté $\overrightarrow{OM}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ où O désigne ici «l'origine» (0,0).
Lorsque nous dessinons, nous désignons un point par un point et un vecteur par une flèche joignant deux points. Des flèches distinctes peuvent représenter le même vecteur.

Si $A \in \mathcal{E}_2$ et $\overrightarrow{U} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ nous notons $A + \overrightarrow{U}$ le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{U}$.
Si $A = (a,a')$ et $\overrightarrow{U} = (u,u')$ alors $A + \overrightarrow{U} = (a+u, a'+u')$.
Pour A, B dans $\mathcal{E}_2$ on appelle **distance** de A à B et on note $d(A,B)$ ou plus simplement AB la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Par ailleurs, on appelle **segment** d'extrémités A et B, et on note $[AB]$ l'ensemble :

$$\{\, M \in \mathcal{E}_2 \mid \exists\, t \in [0,1] \;\; M = A + t.\overrightarrow{AB} \,\}$$

On déduit immédiatement de (2) et (4) la proposition suivante.

Proposition 1 : Le distance sur $\mathcal{E}_2$ définie ci-dessus vérifie les axiomes de la distance pour un espace métrique. En outre, pour deux points A et B distincts, on a pour tout point M : $AB = AM + BM \;/\; M \in [AB]$

Désormais, nous considérons $\mathcal{E}_2$ comme un espace métrique, avec la distance définie ci-dessus. La proposition 1 constitue un bon encouragement pour la définition laborieuse qui va suivre. En effet, le premier membre de l'implication ne fait intervenir que la métrique de $\mathcal{E}_2$ tandis que dans le second membre apparaît le segment $[AB]$, c.-à-d. une notion très géométrique, avec de l'espace vectoriel caché dedans.
Rappelons que deux espaces métriques sont dits isométriques, s'il existe une isométrie (bijection qui conserve les distances) du premier sur le second.

Définitions

a) On appelle **plan euclidien** un espace métrique isométrique à $\mathcal{E}_2$.
b) Deux figures d'un plan euclidien sont dites **égales** s'il existe une isométrie (du plan tout entier) qui transforme l'une en l'autre.
c) Le plan euclidien $\mathcal{E}_2$ est appelé le **modèle standard** de plan euclidien.

Discussion Cette définition laborieuse peut être considérée comme l'aboutissement d'un long processus historique. Au début, chez Euclide, les notions de droite, plan, égalité de deux figures étaient considérées comme intuitivement évidentes, données a priori et n'avaient pas besoin d'être justifiées par un modèle mathématique basé sur les nombres. En outre, les nombres réels, en tant qu'êtres mathématiques construits, sont une création très récente (une centaine d'années), et leur manipulation courante ne s'est imposée qu'avec le calcul infinitésimal au 18ème siècle.

Les systèmes de coordonnées qui permettent de représenter un point du plan par deux nombres réels ont, grosso modo, été introduits par Descartes. Le but n'était sûrement pas à l'époque de justifier le plan euclidien par une construction mathématique abstraite, car la «réalité» de l'espace euclidien était considérée comme une donnée incontestable. Le but était beaucoup plus de donner une méthode systématique d'étude des problèmes géométriques, là où la géométrie des Grecs rassemblait une somme mirifique d'astuces dans laquelle ne se présentait aucun ordre visible et appréciable. Ainsi, pour Descartes, les preuves géométriques peuvent être ramenées à des calculs sur des équations algébriques. De plus, une classification des problèmes, selon le degré des équations impliquées, permet de mettre de l'ordre dans le chaos de la géométrie grecque.

C'est de ce même point de vue (celui défendu par Descartes), qu'on procède ici. Le désavantage est qu'on démarre sur un plan très abstrait, alors que la géométrie est très intuitive dès qu'on manipule régulièrement des figures.

Signalons aussi le caractère vraiment peu naturel de la définition donnée pour l'égalité de deux figures, qui tient au fait que l'égalité de deux triangles par exemple, fait appel à une isométrie du plan tout entier.
Par exemple, les géomètres grecs n'utilisent jamais en tant que telles des figures infinies telles que la droite ou le plan. De la même manière, une isométrie du plan tout entier sur lui même n'est pas pour eux un concept légitime. Euclide utilise en fait dans quelques démonstrations une notion d'égalité «locale»: deux figures qu'on peut amener l'une sur l'autre en superposition ont tous leurs «éléments» (segments de droites, angles de droites, aires...) homologues égaux. Le déplacement de la figure qu'on amène en superposition avec l'autre n'implique alors que le déplacement d'une petite partie finie d'un plan.

Signalons enfin que le choix d'une unité de longueur particulière est implicite dans la définition que nous avons donnée puisque nous avons une métrique sur $\mathcal{P}$. Ceci n'est pas non plus très naturel lorsqu'on a vraiment comme propos la structure géométrique.
Si par exemple on introduit une distance pour étudier la topologie d'un espace, on considérera que deux distances distinctes sont équivalentes (du point de vue de la topologie) dès que les applications continues pour l'une sont les mêmes que les applications continues pour l'autre. Ce qui revient à dire

structure de topologie métrisable = structure métrique à une équivalence topologique près.

De même deux métriques peuvent être équivalentes du point de vue des applications uniformément continues, ce qui conduit à la notion de *structure uniforme métrisable*; ou encore du point de vue des applications lipshitziennes et dans ce cas on pourra dire

structure lipschitzienne = structure métrique à une équivalence lipschitzienne près.

De la même manière, nous poserons :

Convention Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, on considérera qu'une notion est vraiment partie intégrante de la structure de plan euclidien seulement dans le cas où elle se laisse définir sans référence à une unité de longueur précisée. Autrement dit, on considère que toute distance proportionnelle à celle de $\mathcal{P}$ définit la même structure de plan euclidien.

Par exemple, la notion d'isométrie de $\mathcal{P}$, celle de cercle, font manifestement partie de la structure euclidienne du plan $\mathcal{P}$, mais celle de «cercle de rayon 1» n'en fait pas partie.

Thème de réflexion

Imaginez comment définir une structure topologique métrisable sur l'ensemble des droites d'un plan. Avec votre définition, comment pouvez-vous caractériser les suites convergentes ? Si cette caractérisation vous semble bonne (celle que vous désiriez réaliser a priori), passez à la suite, sinon changez votre métrique et reprenez au début.
Avec votre définition, les rotations et les translations sont-elles continues, uniformément continues, lipschitziennes ? L'intersection de deux droites faisant entre elles un angle géométrique supérieur à un réel donné, est-elle une application continue, uniformément continue, lipschitzienne ?
L'espace topologique que vous avez défini a-t-il la même topologie qu'une bande de Moebius sans bord ?
Y a-t-il d'autres propriétés relatives à la continuité que vous voudriez voir vérifier ?

Quelques notions de base

Droites, parallélisme, orthogonalité

Nous nous contenterons d'affirmer les résultats, bien connus et faciles à établir par le calcul algébrique.

Une **droite** de $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des points $A + t.\overrightarrow{U}$ où t parcourt $\mathbb{R}$ (avec $\overrightarrow{U}$ non nul). On dit que la droite ainsi définie est parallèle à $\overrightarrow{U}$. Elle est alors parallèle à tout vecteur colinéaire non nul. Réciproquement deux vecteurs parallèles à une même droite sont colinéaires. Une droite est aussi l'ensemble des (x,y) vérifiant une équation $f(x,y) = a.x + b.y + c = 0$ avec (a,b) _ $(0,0)$. Une telle fonction f est appelée une **forme affine** non constante (vu (a,b) _ $(0,0)$). Deux formes affines non constantes définissent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Deux droites sont dites **parallèles** si elles sont parallèles à un même vecteur non nul. Le parallélisme est une relation d'équivalence sur les droites. On dit encore que deux droites parallèles ont **la même direction.** Par un point extérieur à une droite donnée D, il passe exactement une parallèle D' à la droite D, et elles n'ont aucun point commun. Deux droites parallèles ayant un point en commun sont confondues. Deux droites qui ont exactement un point en commun sont dites **sécantes** : une propriété caractéristique est qu'elles sont parallèles à deux vecteurs indépendants, c.-à-d. encore qu'elles ne sont pas parallèles.

Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul. Deux vecteurs orthogonaux non nuls sont indépendants. Deux droites sont dites **orthogonales** si elles sont parallèles à des vecteurs orthogonaux. Deux droites orthogonales à une même troisième sont parallèles entre elles. Toute direction possède exactement une direction orthogonale. La droite d'équation $a.x + b.y + c = 0$ est orthogonale au vecteur (a,b).

Le **milieu** d'un segment [AB] est l'unique point I du segment équidistant des extrémités : il vérifie l'égalité : $I = A + (1/2) . \overrightarrow{AB}$
La **médiatrice** d'un segment [AB] est l'ensemble des points équidistants des extrémités : c'est la droite orthogonale à (AB) passant par le milieu de [AB]. (attention ! il faut que A _ B).

Transformations de $\mathcal{E}_2$

Une **transformation** de $\mathcal{E}_2$ est une bijection $\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ à laquelle on attribue le joli nom de transformation parce qu'on lui trouve des cotés géométriques. Les seules transformations que nous considérerons dans le chapitre 1 sont des isométries : bijections qui conservent la distance. Les isométries forment un groupe.

On dit qu'une transformation φ de $\mathcal{E}_2$ **opère sur les vecteurs** si on a l'implication :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \ \_ \ \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1} \quad \text{(où } A_1 = \varphi(A) \text{ etc...)}$$

On peut alors définir $\varphi(\overrightarrow{U})$ sans ambiguïté et on a immédiatement

$$\varphi(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \varphi(\overrightarrow{U}) + \varphi(\overrightarrow{V})$$

que l'on obtient en écrivant $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sous la forme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Translations

La **translation de vecteur** $\overrightarrow{U}$ est l'application $\tau_{\overrightarrow{U}} : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_2$ définie par

$$A \longleftrightarrow A + \overrightarrow{U}.$$

Les translations, forment, pour la composition des applications, un groupe isomorphe à $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$ (muni de la loi +) : l'isomorphisme est donné, dans un sens, par

$$\overrightarrow{U} \longleftrightarrow \tau_{\overrightarrow{U}},$$

dans l'autre par

$$\tau \longleftrightarrow \overrightarrow{AA_1}$$

où A est arbitraire et $A_1 = \tau(A)$.

Toute translation induit l'identité sur $\overrightarrow{\mathcal{E}_2}$, on dit qu'elle conserve les vecteurs. En particulier, *toute translation est une isométrie.* Nous noterons $\mathcal{T}_2$ le groupe des translations de $\mathcal{E}_2$.

Symétries-point

Lorsque le point I est le milieu du segment [MM'], on dit encore que M et M' sont **symétriques par rapport à** I, ou que M' est le symétrique de M par rapport à I. On a alors les égalités :

$$M' = I - \overrightarrow{IM} , \ \overrightarrow{OM'} = 2 \ \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OM}$$

La **symétrie-point** (on dit aussi **symétrie centrale**) de centre I est par définition la transformation de $\mathcal{E}_2$ qui, à tout point M fait correspondre son symétrique M' par

rapport à I. On la note σ_I. La terminologie «symétrie par rapport à» sera reprise constamment dans d'autres contextes. Il est trivial que : $\sigma_I \circ \sigma_I = \mathrm{Id}$.
Une symétrie point opère sur les vecteurs, plus précisément :

$$\sigma_I(\overrightarrow{U}) = -\overrightarrow{U} \quad \text{pour tout vecteur } \overrightarrow{U}$$

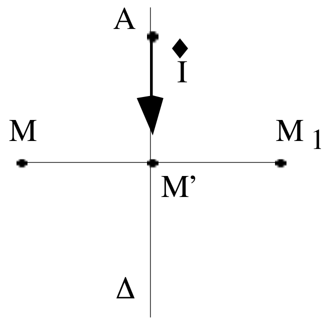
De l'égalité précédente on déduit que *toute symétrie-point est une isométrie*.

Exercice 3 :

a) Démontrer que les symétries-point et translations de $\mathcal{E}_2$ forment un groupe, produit semi-direct interne du sous-groupe des translations et du sous-groupe $\{\sigma_I, \mathrm{Id}\}$. Démontrer qu'il est isomorphe au produit semi-direct abstrait :
$\overrightarrow{\mathcal{E}_2} \propto_\theta \{\pm 1\}$ où $\theta(-1)(\overrightarrow{U}) = -\overrightarrow{U}$

b) Démontrer qu'une transformation φ de $\mathcal{E}_2$ opère sur les vecteurs si et seulement si $\varphi\, \mathfrak{T}_2\, \varphi^{-1} = \mathfrak{T}_2$. On a alors en outre : $\varphi \circ \tau_{\overrightarrow{U}} \circ \varphi^{-1} = \tau_{\varphi(\overrightarrow{U})}$.

Symétries orthogonales



Théorème 1 : Étant donnée une droite Δ il existe une unique isométrie, notée σ_Δ, qui vérifie : tout point de Δ est fixe, et tout point M extérieur à Δ admet pour image le point M_1 tel que Δ soit médiatrice de $[MM_1]$.
Cette isométrie opère sur les vecteurs et vérifie

$$\sigma_\Delta(x\,\overrightarrow{U}) = x\,\sigma_\Delta(\overrightarrow{U})$$

preuve> Voyons l'unicité (si existence) : pour construire $M_1 = \sigma_\Delta(M)$ on mène par M la droite orthogonale à Δ. Elle coupe Δ en un point M', et M_1 est le symétrique de M par rapport à M'. Soit un point A sur Δ. On suppose que la droite Δ porte le vecteur unitaire $\overrightarrow{I} = (u,v)$.
On écrit : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM_1} = 2\,\overrightarrow{AM'}$ avec : $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{I} = \overrightarrow{AM'} \bullet \overrightarrow{I}$ et donc :

$$\overrightarrow{AM_1} = 2\,(\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{I})\,\overrightarrow{I} - \overrightarrow{AM} \qquad (1) \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{M_1N_1} = 2\,(\overrightarrow{MN} \bullet \overrightarrow{I})\,\overrightarrow{I} - \overrightarrow{MN} \qquad (2)$$

L'égalité (1) peut servir à définir l'application $\sigma_\Delta : M \leftrightarrow M_1$ (d'où l'existence, modulo ce qui suit). On a alors immédiatement $\sigma_\Delta \circ \sigma_\Delta = \mathrm{Id}$, et donc σ_Δ est une bijection. En outre l'égalité (2) montre que σ_Δ opère sur les vecteurs. A partir de l'égalité (2), on déduit par un petit calcul : $\overrightarrow{M_1N_1}^2 = \overrightarrow{MN}^2$.
La transformation σ_Δ est donc une isométrie. Et du (2) résulte la dernière affirmation du théorème. ❑

Isométries du modèle standard

Isométries comme produits de symétries orthogonales

La preuve du théorème fondamental qui suit est basée sur les seuls résultats : médiatrice d'un segment, existence des symétries orthogonales.

Théorème fondamental 1 : Soit τ une isométrie de $\mathcal{E}_2$.

a) Si τ fixe trois points non alignés, c'est l'identité Id.
b) Si τ _ Id fixe deux points A et B, c'est la symétrie orthogonale $\sigma_{(AB)}$.
c) Si τ fixe exactement un point A, c'est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites passant par A.
d) Dans tous les cas τ est le produit de zéro[4], une, deux ou trois symétries orthogonales.

preuve> a) Soit A, B, C les trois points non alignés. Si pour un point M on avait $N = \tau(M)$ distinct de M, on aurait MA = NA, MB = NB, MC = NC, puisque τ est une isométrie, et les trois points A, B, C seraient alignés sur la médiatrice de [MN].
b) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, on a comme en a) A et B sur la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède les trois points fixes non alignés A, B, N. Donc d'après a), c'est l'identité. Donc $\tau = \sigma_\Delta$.
c) Soit M avec $N = \tau(M)$ distinct de M, A est sur la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède les deux points fixes A, N. Donc d'après b) c'est l'identité ou la symétrie orthogonale $\sigma_{(AN)}$. Le premier cas est exclu car sinon $\tau = \sigma_\Delta$.
d) On peut supposer que τ n'admet aucun point fixe. Soit M arbitraire et $N = \tau(M)$ distinct de M. On considère la médiatrice Δ de [MN]. Alors $\tau \circ \sigma_\Delta$ possède le point fixe N. Ce qui nous ramène à l'un des cas précédents.

❑

Remarques

1) On n'a pas utilisé le fait que τ est bijective. Il aurait donc suffi de supposer qu'elle conserve les distances. On remarquera a contrario qu'une translation d'une demi-droite dans elle même conserve les distances mais n'est pas bijective.

2) Si une isométrie τ du plan est donnée par un triangle ABC et son image, on peut essayer de construire des symétries orthogonales dont le produit est égal à τ, en suivant la preuve du théorème 1. Le lecteur pourra se convaincre que cette construction est *instable* (c.-à-d. impossible à réaliser localement de manière continue) si le triangle image coïncide presque avec le triangle ABC, c.-à-d. si l'isométrie est voisine de l'identité. On peut par contre obtenir une construction stable si on s'autorise à décomposer les isométries voisines de l'identité en un produit de quatre symétries orthogonales.

---

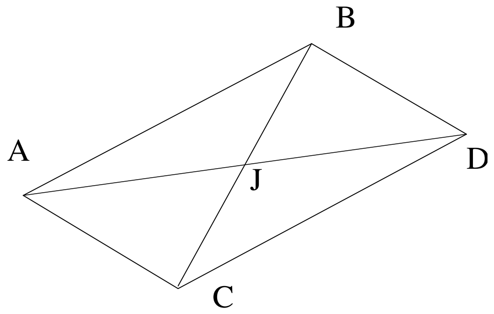
[4] Conventionnellement, dans un groupe (noté multiplicativement), le produit de zéro élément du groupe est le neutre. Vous pouvez trouver de nombreuses justifications à cette convention.

Corollaire 1 : Deux isométries de $\mathcal{E}_2$ qui coïncident en trois points non alignés sont égales (coïncident partout).

Corollaire 2 : Toute isométrie de $\mathcal{E}_2$ est une transformation qui opère sur les vecteurs et conserve le produit scalaire, et donc aussi l'orthogonalité.

preuve> Les symétries orthogonales sont des transformations qui opèrent sur les vecteurs. Donc un produit de symétries orthogonales également. Le fait que le produit scalaire est conservé résulte alors par exemple du fait qu'il peut être défini à partir de la norme et de l'addition des vecteurs. ❑

Remarque On aurait également pu prouver le premier résultat du corollaire 2 directement comme suit :



L'égalité de deux vecteurs peut être caractérisée par l'équivalence :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

/

[AD] et [BC] ont même milieu

Toute isométrie transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image. Donc une isométrie est une transformation qui opère sur les vecteurs.

Corollaire 3 : Dans le plan euclidien $\mathcal{E}_2$ la symétrie orthogonale σ_Δ est l'unique isométrie σ de $\mathcal{E}_2$ qui vérifie :

la droite Δ est l'ensemble des points fixes de σ

Corollaire 4 : Dans le plan euclidien $\mathcal{E}_2$ soit σ une isométrie dont le carré est l'identité. Alors σ admet au moins un point fixe et :

– ou bien σ admet exactement un point fixe, et c'est une symétrie-point,
– ou bien σ _ Id admet au moins deux points fixes, et c'est une symétrie orthogonale,
– ou bien $\sigma = \text{Id}$.

preuve> Si $\sigma(A) = A_1$ alors $\sigma(A_1) = A$ et le milieu de $[AA_1]$ est fixe. Il y a donc au moins un point fixe. S'il y en a exactement un, on voit que σ coïncide avec σ_A. Sinon, on se réfère au théorème fondamental 1 a) et b). ❑

Exercice 4 : En reprenant la preuve du théorème fondamental 1, vérifier qu'on obtient le résultat suivant. Si deux triangles, le premier non aplati, ont leurs cotés égaux, il y a exactement une isométrie qui envoie l'un sur l'autre. (c'est le troisième cas d'égalité des triangles : deux triangles qui ont leurs cotés égaux sont des figures égales).

La forme analytique d'une isométrie dans le modèle standard

Soit τ une isométrie de $\mathcal{E}_2$. Notons $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ les vecteurs (1,0) et (0,1). Si M est le point (x,y) on a : $M = O + x.\overrightarrow{U} + y.\overrightarrow{V}$ c.-à-d. $\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{U} + y.\overrightarrow{V}$.

Les coordonnées x et y de M peuvent être définies à partir du produit scalaire :

$$x = \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{OM}\ ,\ y = \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{OM}$$

Puisque τ opère sur les vecteurs et conserve les produits scalaires, on a des images O_1, M_1, $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ de O, M, $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, les vecteurs $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont orthogonaux et de norme 1, de sorte qu'on peut écrire : $\overrightarrow{O_1M_1} = x'.\overrightarrow{U_1} + y'.\overrightarrow{V_1}$. En outre :

$$x = \overrightarrow{U} \bullet \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{U_1} \bullet \overrightarrow{O_1M_1} = x'$$

et de la même manière $y = y'$, c.-à-d. $M_1 = O_1 + x.\overrightarrow{U_1} + y.\overrightarrow{V_1}$

D'où, si $M_1 = (x_1,y_1)$, après un petit calcul :

$$(1)\ \begin{cases} x_1 = u.x + v.y + a \\ y_1 = u'.x + v'.y + b \end{cases} \quad \text{ou encore sous forme matricielle} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où $O_1 = (a,b)$, $\overrightarrow{U_1} = (u,u')$, $\overrightarrow{V_1} = (v,v')$. Comme $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont orthogonaux et de norme 1, un petit calcul conduit à l'alternative suivante :

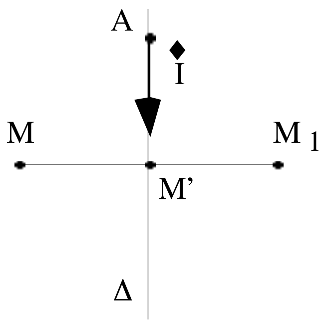
– ou bien $u' = -v$ et $v' = u$ et donc $u.v'-u'.v = u^2 + u'^2 = 1$

– ou bien $u' = v$ et $v' = -u$ et donc $u.v'-u'.v = -(u^2 + u'^2) = -1$

Dans le premier cas l'isométrie est dite **directe**, dans le deuxième cas **indirecte**. Une isométrie directe est encore appelée un **déplacement.** La matrice $2 \infty 2$ dans l'écriture ci-dessus est parfois appelée la **matrice associée** à l'isométrie.

Remarque On dit qu'on a établi la «forme analytique» de l'isométrie τ. En fait, nous venons simplement *d'expliciter* τ : puisque $\mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^2$, il n'y a aucune différence entre τ vue comme isométrie de $\mathcal{E}_2$ et l'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par les formules (1).

Calculons la forme analytique d'une symétrie orthogonale σ_Δ :



On a comme au théorème 1

$$\overrightarrow{AM_1} = 2\,(\overrightarrow{AM} \bullet \vec{I})\,\vec{I} - \overrightarrow{AM} \quad \text{d'où : (avec } \vec{I} = (u,v)\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u^2 - 1 & 2uv \\ 2uv & 2v^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Comme $u^2 + v^2 = 1$, on voit qu'on obtient bien une isométrie indirecte. Comme par ailleurs lorsqu'on compose des isométries, les matrices associées sont multipliées, et qu'une isométrie est directe ou indirecte selon que le déterminant de la matrice associée est $+1$ ou -1, on obtient :

Théorème 2 : *(forme analytique des isométries)* Soit τ une isométrie de $\mathcal{E}_2$.

a) La forme analytique de τ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (1)$$

où (a,b) est l'image de l'origine, (u,u') l'image du vecteur $(1,0)$, et (v,v') l'image du vecteur $(0,1)$. Le déterminant $u\,v' - u'\,v$ est égal à ± 1.
Si c'est $+1$ alors $u = v'$ et $u' = -v$. Si c'est -1 alors $u = -v'$ et $u' = v$.

b) L'isométrie est directe ou indirecte selon qu'elle se laisse décomposer en un nombre pair ou impair de symétries orthogonales. En particulier, le produit d'un nombre impair de symétries orthogonales n'est jamais égal à l'identité.

c) Toute application de $\mathcal{E}_2$ vers $\mathcal{E}_2$ qui s'écrit sous la forme (1) avec $\overrightarrow{U}$ = (u,u') et $\overrightarrow{V}$ = (v,v') orthogonaux et de norme 1, est une isométrie de $\mathcal{E}_2$.

preuve> Le a) et le b) ont déjà été établis. Pour le c) : on vérifie immédiatement que l'application opère sur les vecteurs et que l'image du vecteur (x,y) est le vecteur $x\overrightarrow{U} + y\overrightarrow{V}$ qui est bien de norme égale à $\|(x,y)\|$ (calcul immédiat). Une application de la forme (1) conserve donc les distances. En outre elle est bijective parce que le déterminant de la matrice est non nul. C'est donc bien une isométrie. ❑

c) La géométrie d'un plan euclidien arbitraire

Notions qui peuvent être définies dans un plan euclidien arbitraire

Isométries

Introduisons la notation **Is**($\mathcal{P}$) pour le groupe des isométries d'un espace métrique $\mathcal{P}$. Un plan euclidien $\mathcal{P}$ est en quelque sorte une photocopie de l'espace métrique $\mathcal{E}_2$. On a précisément les résultats suivants, à peu près immédiats. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien et $\varphi : \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{P}$ une isométrie de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{P}$. On a alors :

– toute isométrie de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{P}$ est de la forme $\varphi \circ \tau$ où τ est une isométrie de $\mathcal{E}_2$
– toute isométrie de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{E}_2$ est de la forme $\tau \circ \varphi^{-1}$ où τ est une isométrie de $\mathcal{E}_2$
– toute isométrie de $\mathcal{P}$ est de la forme $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ où τ est une isométrie de $\mathcal{E}_2$
– notation $\varphi * \tau := \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$
– $\tau \leftrightsquigarrow \varphi * \tau$ est un isomorphisme du groupe **Is**($\mathcal{E}_2$) sur le groupe **Is**($\mathcal{P}$)
– toute propriété concernant τ est transportée par φ en une propriété concernant $\varphi * \tau$: par exemple : $\tau^2 = \mathrm{Id}$ _ $(\varphi * \tau)^2 = \mathrm{Id}$
  M est point fixe de τ _ φ(M) est point fixe de $\varphi * \tau$
  Δ est une partie de $\mathcal{E}_2$ invariante par τ _ $\varphi(\Delta)$ est invariante par $\varphi * \tau$

Symétries orthogonales, symétries-point, translations

Rappelons que nous avons demandé qu'une notion euclidienne soit indépendante du choix de l'unité de longueur. Nous avons déjà remarqué que le groupe des isométries de $\mathcal{P}$ ne dépend pas d'un tel choix. Par ailleurs, nous venons de voir qu'il est la copie du groupe des isométries de $\mathcal{E}_2$.

Toute notion qui peut être définie à partir du groupe des isométries de $\mathcal{E}_2$ *est donc une notion euclidienne, qui est valable dans tout plan euclidien* $\mathcal{P}$.

En particulier, vu le corollaire 4 du théorème fondamental 1, les notions de symétrie-point et de symétrie orthogonale sont des notions euclidiennes. On en déduit que les notions de droite, de droites sécantes, de droites parallèles, de droites orthogonales sont des notions euclidiennes. Une translation peut être définie comme le produit de deux symétries-point. La notion de translation est donc elle aussi euclidienne. Les propriétés du groupe des isométries de $\mathcal{E}_2$ énoncées dans le théorème fondamental 1 et ses corollaires sont valables pour le groupe des isométries de $\mathcal{P}$. Enfin, le fait pour une isométrie d'être directe ou indirecte est encore une notion euclidienne, vu le théorème 2.

Segments, demi-droites, demi-plans, vecteurs, produit par un scalaire

Une notion qui se laisse définir en termes de rapports de longueurs est elle aussi euclidienne. Ainsi pour la notion de segment de droite ([A,B] est l'ensemble des points M vérifiant AM + MB = AB). D'où ensuite pour les notions de demi-droite et de demi plan.

La notion de vecteur, quelle que soit la définition qu'on choisisse, se réduit à celle de l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, qui peut être définie à partir des translations ou par la propriété caractéristique : milieu de [AD] = milieu de [BC].

Enfin la notion de produit d'un vecteur par un scalaire se ramène à une question de rapport de longueurs et une question d'orientation sur une droite, donc c'est également une notion euclidienne. Le fait que les vecteurs forment alors un espace vectoriel réel de dimension 2 est une propriété qui se transporte de $\mathcal{E}_2$ à $\mathcal{P}$. On notera $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$.

En bref : on peut pratiquer le calcul vectoriel dans un plan euclidien arbitraire exactement comme dans le modèle standard.

Exercice 5 : On choisit de définir un vecteur comme une classe d'équivalence de couples de points (encore appelés «vecteurs liés» ou «bipoints» ou «segments de droites orientés») pour la relation d'équipollence (c.-à-d. la relation d'égalité pour les vecteurs définis par les deux bipoints). Montrer que si le vecteur $\overrightarrow{U}$ définit la translation τ alors $\overrightarrow{U}$ est égal (au sens ensembliste) au graphe de τ.

Commentaire: La différence entre vecteurs (avec l'addition des vecteurs) et translations (avec la composition des translations) est donc bien mince. Le plus important est psychologique : on a remplacé deux concepts compliqués (translation comme transformation impliquant le plan euclidien tout entier, composition de deux applications) par deux concepts d'apparence plus simples : vecteur défini comme «segment de droite orienté, à une équipollence près», et addition de deux vecteurs comme «mettre bout à bout deux segments orientés».

Repérage d'un plan euclidien

Dans beaucoup de problèmes, on a intérêt à travailler dans $\mathcal{E}_2$ directement, pour transporter ensuite le résultat obtenu dans $\mathcal{P}$, au moyen d'une isométrie φ de $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{P}$.

Ce recours systématique au modèle standard n'est pas très élégant. Il est moins fatigant conceptuellement de se dire qu'on travaille sur des points de $\mathcal{P}$ avec un «système de coordonnées euclidiennes». Toute méthode pour fixer une isométrie de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{E}_2$

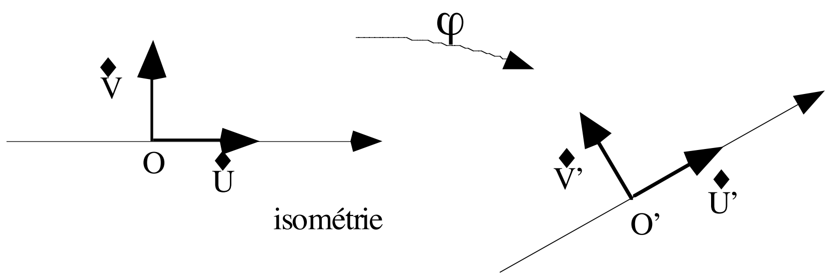
peut être appelée un «système de repérage en coordonnées euclidiennes».

La méthode la plus fréquemment utilisée est la considération d'une famille d'objets sur laquelle le groupe **Is**($\mathcal{P}$) opère de manière simplement transitive et d'un objet du même type donné une fois pour toutes dans $\mathcal{E}_2$. Une telle famille d'objets est appelé une **famille de repères** (sous-entendu pour le groupe **Is**($\mathcal{P}$)) et l'objet du même type donné dans $\mathcal{E}_2$ s'appelle le **repère canonique**.

Par exemple on peut considérer la famille des repères orthonormés de $\mathcal{P}$ (c.-à-d. un triplet $(A, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ où les deux vecteurs sont orthogonaux de norme 1, une unité de longueur ayant été fixée), et dans $\mathcal{E}_2$ le repère canonique

$$(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \text{ avec } O = (0,0),\ I = (1,0),\ J = (0,1).$$

Théorème 3 : Le groupe des isométries opère simplement transitivement sur les repères orthonormés.



preuve> Il suffit de le démontrer pour $\mathcal{E}_2$. Lorsqu'on a établi la forme analytique d'une isométrie dans le modèle standard, on a vu (proposition 3 a) que l'isométrie est entièrement caractérisée par l'image qu'elle donne du repère canonique, image qui doit être un repère orthonormé. Inversement, si on se donne un repère orthonormé arbitraire, la forme analytique proposée définit une transformation de $\mathcal{E}_2$ qui est une isométrie (théorème 2 c). ❑

On pourrait utiliser d'autres familles de repères. Par exemple les triangles équilatéraux dont la longueur des cotés est 1 (en précisant l'ordre des sommets), mais dans ce cas le repère canonique à choisir dans le modèle standard semblera trop arbitraire.

Une autre famille de repères est la famille des cercles orientés de rayon 1 sur lesquels a été choisi un point : on prendra comme repère canonique dans $\mathcal{E}_2$ le fameux cercle trigonométrique, pointé par (1,0).

Le choix de telle ou telle famille de repères est purement conventionnel. C'est une affaire de goût ou de commodité.

Expression analytique d'une isométrie dans un repère orthonormé

Le calcul qui a été fait avec $\mathcal{E}_2$ et le repère orthonormé canonique peut être recopié avec $\mathcal{P}$ (plan euclidien arbitraire) et $\Re$ (repère orthonormé arbitraire) pour donner la forme analytique d'une isométrie de $\mathcal{P}$ dans le repère $\Re$. En fait, il n'est nullement besoin de recopier le calcul et le résultat reste vrai dans $\mathcal{P}$ pour une raison beaucoup plus fondamentale. Expliquons-nous. Se donner un repère $\Re$ de $\mathcal{P}$ revient à se donner l'isométrie $\varphi_{\Re}$ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{E}_2$ qui envoie $\Re$ sur le repère canonique. L'égalité $\varphi_{\Re}(M) = (x,y)$ signifie alors exactement : x et y sont les coordonnées de M dans le repère $\mathfrak{R}$, ce qu'on note encore $M =_{\mathfrak{R}}(x,y)$. Si maintenant τ est une isométrie de $\mathcal{P}$, l'isométrie

$$\psi = \varphi_{\mathfrak{R}} * \tau = \varphi_{\mathfrak{R}} \circ \tau \circ \varphi_{\mathfrak{R}}^{-1}$$

n'est rien d'autre que la forme analytique de τ dans le repère $\mathfrak{R}$: la phrase «si M a pour coordonnées (x,y) alors $\tau(M)$ a pour coordonnées $\psi(x,y)$» n'est jamais qu'une paraphrase de l'égalité : $\psi = \varphi_{\mathfrak{R}} \circ \tau \circ \varphi_{\mathfrak{R}}^{-1}$.

Pour nous résumer : la forme explicite des isométries dans le modèle standard donne ipso facto la forme analytique des isométries dans un plan euclidien arbitraire par rapport à un repère (choisi dans une famille déterminée de repères pour le groupe des isométries).

Le groupe des isométries

Théorème 4 : *(isométries et points fixes)*

a) Une isométrie directe qui conserve deux points est l'identité.
b) Deux isométries directes (resp. indirectes) qui coïncident en deux points sont égales.
c) Une isométrie indirecte qui conserve un point est une symétrie orthogonale.

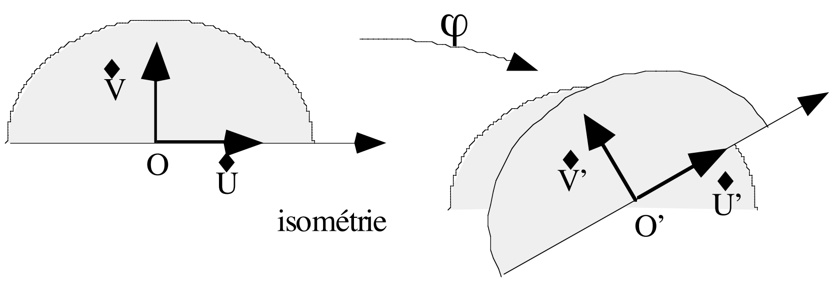
preuve> a) parce qu'une isométrie qui fixe deux points est l'identité ou une symétrie orthogonale. b) d'après a) en composant une isométrie et la réciproque de l'autre.
Pour c) : notons A le point supposé fixe, on considère l'image N d'un point M non fixe, alors l'isométrie considérée et la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de $[MN]$ sont deux isométries indirectes qui coïncident en A et M. ❏

Deuxième théorème fondamental

Nous indiquons maintenant deux familles de repères particulièrement intéressantes, respectivement pour le groupe des isométries et celui des déplacements. On appelle **axe pointé** un couple $(A, \underline{\Delta}_{\rightarrow})$ où A est un point, $\underline{\Delta}_{\rightarrow}$ une droite orientée passant par A. On appelle **drapeau** un triplet $(A, \underline{\Delta}_{\rightarrow}, \Pi)$ où $(A, \underline{\Delta}_{\rightarrow})$ est un axe pointé, Π un demi plan limité par Δ.

Théorème fondamental 2 : *(propriété de libre mobilité)*

a) Le groupe des isométries opère simplement transitivement sur les drapeaux.
b) Le groupe des déplacements opère simplement transitivement sur les axes pointés, ou encore sur les demi-droites.



preuve> Le théorème résulte directement du théorème 3 et du fait qu'il existe exactement un repère orthonormé attaché de manière naturelle à un drapeau, et deux drapeaux correspondants à un axe pointé. On pourrait également utiliser les résultats du théorème 4. ❏

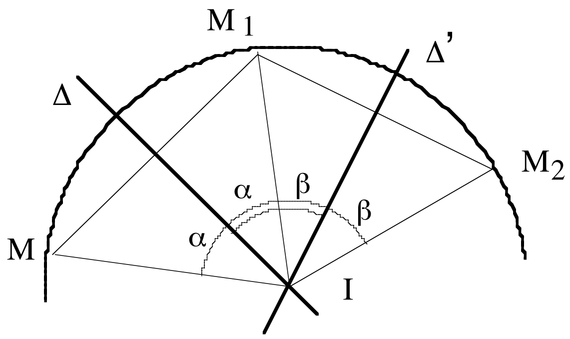
Remarque Ces familles de repère, contrairement aux autres précédemment citées, sont indépendantes du choix de l'unité de longueur.

Rotations et déplacements

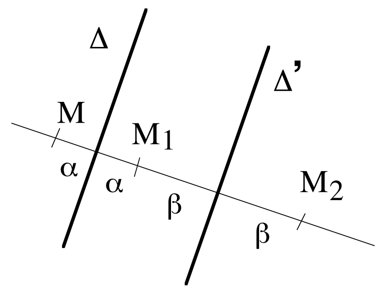
Proposition 2 : *(forme géométrique des déplacements)* Soit τ un déplacement.

a) S'il ne possède pas de point fixe c'est une translation, et c'est le produit $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_{\Delta}$ où Δ et Δ' sont orthogonales à la direction de τ, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement.

b) Si τ _ Id possède un point fixe I, c'est le produit de deux symétries orthogonales autour de droites passant par I, l'une des deux pouvant être choisie arbitrairement. On dit que c'est une **rotation** de centre I.



produit de deux symétries par rapport à des droites concourantes



produit de deux symétries par rap à des droites parallèles

preuve> Un déplacement est produit de 0 ou 2 symétries orthogonales. Le cas a) correspond à celui de droites parallèles distinctes, le b) à celui de deux droites sécantes. Dans le cas b) si σ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par I, les isométries $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$ sont de isométries indirectes qui fixent I, donc des symétries orthogonales. Même type de raisonnement pour le a). ❏

Théorème 5 : Les rotations de centre I fixé forment, avec l'identité, un groupe isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

preuve> Difficile. Très vite dit : établir un tel isomorphisme revient essentiellement à mesurer l'angle de la rotation. On se situe dans $\mathcal{E}_2$ avec I en O. On considère alors l'homomorphisme η de $\mathbb{R}$ vers le groupe **SO**$(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2 orthogonales directes (isomorphe au groupe des rotations de centre O) défini par :

$$\eta : t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

où les fonctions sinus et cosinus sont définies via leurs séries entières. Le fait que l'homomorphisme est surjectif résulte en gros du fait que la fonction $t \longmapsto \sin(2\pi t)$ établit une bijection de $[-1/4,+1/4]$ sur $[-1,1]$. Pour avoir un isomorphisme, on doit passer au quotient par le noyau, qui est le sous-groupe $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. ❑

Remarques

1) L'homomorphisme considéré choisit comme unité d'angle «le tour» qui est l'unité la plus naturelle. Si on supprime le coefficient 2π on a comme unité d'angle le radian et un isomorphisme avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

2) La preuve rigoureuse est difficile, mais surtout elle montre mal le rapport qu'elle entretient avec la preuve intuitive, qui dit qu'on mesure l'angle d'une rotation par la longueur d'un arc de cercle associé, et qu'on doit passer au quotient par $2\pi\mathbb{Z}$ parce qu'un arc de longueur 2π correspond à 1 tour et que 1 tour a le même effet géométrique que 0 tour.

Définition On dit qu'une rotation de centre I et une rotation de centre J ont **le même angle** si elles opèrent de la même manière sur les vecteurs. La transformation qu'elles induisent sur les vecteurs s'appelle une **rotation vectorielle**.

Par extension, l'identité de $\mathcal{P}$ est considérée comme une rotation (de centre arbitraire), et l'identité de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ comme une rotation vectorielle. Cela permet de faire des rotations de centre I un groupe. Idem pour les rotations vectorielles. Les angles de rotation peuvent être définis de différentes manières. L'important est l'égalité de deux angles (qui correspond à l'égalité des rotations vectorielles associées) et la somme de deux angles (qui, par définition, correspond à la composition des rotations vectorielles). Bref, si on compare l'angle d'une rotation et la rotation vectorielle associée, l'essentiel est qu'on passe en notation additive (comparer à «vecteurs» versus «translations»).

Tout déplacement possède un angle, l'angle d'une translation étant nul («nul» ou «zéro» est le nom de l'élément neutre en notation additive). Et l'angle du produit de deux déplacements est la somme de leurs angles.

Exercice 6 : Soient ρ une rotation de centre J, ρ_1 une rotation de centre K, $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{JK}$, τ la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$. Montrer que ρ et ρ_1 ont le même angle si et seulement si on a : $\rho_1 = \tau \circ \rho \circ \tau^{-1}$

Plan euclidien orienté

Il y a deux quarts de tour de centre I, de sens opposés. En termes du groupe isomorphe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (muni de l'addition) on constate : il y a deux éléments opposés d'ordre 4 à savoir $1/4$ et $-1/4$. Cela correspond au fait qu'il y a un automorphisme distinct de l'identité pour $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: l'application $x \leftrightarrow -x$. C'est même le seul automorphisme *continu* distinct de l'identité. (ce résultat est un peu subtil, et nous l'admettrons).

Cela donne deux isomorphismes naturels de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vers le groupe des angles, selon le quart de tour auquel on décide d'attribuer le signe +. Si donc on veut parler de mesure d'un angle (modulo 1 ou modulo 2π selon l'unité choisie), il est indispensable d'avoir choisi une fois pour toutes le quart de tour positif. On dit alors qu'**on a orienté le plan euclidien**. Plus intuitivement : orienter le plan euclidien, c'est indiquer un sens de rotation positif sur les cercles du plan. Notez cependant que «le sens des aiguilles d'une montre» est une expression trompeuse, car un plan euclidien est transparent, et peut être regardé des deux cotés.

Lorsqu'on a un repère orthonormé $(I, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ dans un plan euclidien orienté on dit qu'il est **direct** ou **indirect** selon que l'image de $\overrightarrow{U}$ par le quart de tour positif est égale à $\overrightarrow{V}$ ou à $-\overrightarrow{V}$.

Par convention, lorsqu'on a orienté un plan euclidien, on confond un angle (de rotation) avec sa mesure modulo 2π.

Définition et notation Soit θ un nombre réel défini modulo 2π. Dans un plan euclidien orienté, on appelle rotation de centre J et d'angle θ la rotation qui fixe J et dont la mesure de l'angle est égal à θ. On la note $\boldsymbol{\rho}_{J,\theta}$

Oublions un moment le Théorème 2 et la façon dont nous avons introduit les questions d'orientation. Une autre manière de procéder pour définir «proprement» les questions d'orientation est la suivante : étant donnés deux repères orthonormés $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ de $\mathcal{P}$ ont dit qu'ils ont même orientation si l'isométrie qui envoie $\mathfrak{R}_1$ sur $\mathfrak{R}_2$ est directe, et des orientations opposées sinon. La relation «avoir même orientation que» est manifestement une relation d'équivalence avec deux classes d'équivalence. Dans ce cadre, orienter le plan euclidien $\mathcal{P}$ c'est choisir une des deux classes d'équivalence et lui attribuer le qualificatif de «classe des repères directs», l'autre étant celle des repères indirects. Le fait qu'on puisse mesurer modulo 2π l'angle d'un déplacement une fois qu'on a orienté le plan résulte alors de la proposition suivante :

Proposition 3 : Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien orienté, φ un déplacement de $\mathcal{P}$ et $\mathfrak{R}$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{P}$. La matrice M de la rotation vectorielle définie par φ exprimée dans $\mathfrak{R}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{R}$. Elle s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où θ est défini modulo 2π.

preuve> Un changement de repère direct correspond, pour les matrices associées, au fait de remplacer M par $P.M.P^{-1}$ où M et P sont dans $\mathbf{SO}(2,\mathbb{R})$. Le fait que ce groupe est commutatif, et donc que $M = P.M.P^{-1}$ est facile à établir et ne dépend pas de la construction de l'isomorphisme avec $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le fait enfin de l'existence d'un θ unique modulo 2π est difficile et relève de l'analyse. ❑

Le groupe des isométries qui fixent un point

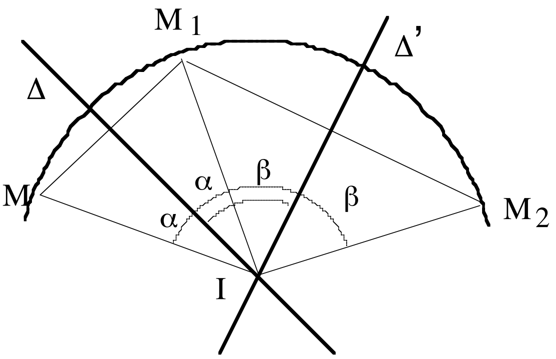
Théorème 6 : *(le groupe des isométries qui fixent un point)*

a) Les isométries d'un disque de centre I sont exactement les isométries du plan qui fixent le point I (restreintes au disque considéré).

b) Elles forment un groupe isomorphe à $\mathbf{O}(2,\mathbb{R})$ (groupe des matrices orthogonales $2 \infty 2$).

c) Les isométries qui fixent le point I comprennent les rotations de centre I et les symétries orthogonales par rapport aux droites qui passent par I.
Si ρ est une rotation et σ_Δ une symétrie orthogonale avec $\rho(\Delta) = \Delta'$ on a : $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta = \rho^2$ (1), $\sigma_\Delta \circ \rho \circ \sigma_\Delta = \rho^{-1}$ (2), $\rho \circ \sigma_\Delta \circ \rho^{-1} = \sigma_{\Delta'}$ (3),

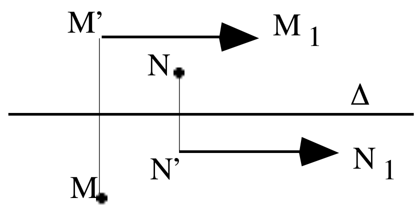
d) Le groupe est produit semi-direct interne du sous-groupe des rotations et d'un sous-groupe $\{\sigma_\Delta, Id\}$. C'est donc un groupe isomorphe au produit semi-direct abstrait $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \infty_\theta \{\pm 1\}$ où $\theta(-1)(\alpha) = -\alpha$



preuve> Le a) est facile. Le b) résulte de la forme analytique des isométries. La première affirmation du c) est dans le théorème 4. L'égalité (2) équivaut au fait que $(\sigma_\Delta \circ \rho)^2 = Id$, or $\sigma_\Delta \circ \rho$ est indirecte donc est une symétrie orthogonale. Le premier membre de (3) est une isométrie qui fixe exactement les points de Δ' donc c'est $\sigma_{\Delta'}$. L'égalité (1) s'obtient à partir de (2) et (3). Le d) résulte facilement de (2) et (3). ❑

Symétries glissées

Définition On appelle **symétrie glissée** le produit d'une symétrie σ_Δ par rapport à une droite Δ et d'une translation de vecteur non nul parallèle à Δ.



Proposition 4 : *(forme géométrique des isométries indirectes)*

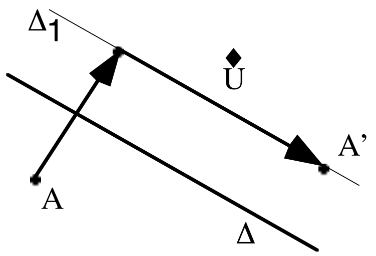
Toute isométrie indirecte s'écrit de manière unique sous la forme $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}}$ où : σ_Δ désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, $\vec{U}$ est un vecteur (éventuellement nul) parallèle à Δ, $\tau_{\vec{U}}$ désigne la translation de vecteur $\vec{U}$. En outre $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}} = \tau_{\vec{U}} \circ \sigma_\Delta$

Remarque La proposition peut s'interpréter en disant que toute isométrie indirecte S est une symétrie glissée, de vecteur éventuellement nul.

preuve>

* La commutativité $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}} = \tau_{\vec{U}} \circ \sigma_\Delta$ lorsque $\vec{U}$ est parallèle à Δ est immédiate

* Unicité de l'écriture $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}}$ (avec $\vec{U}$ // Δ) pour une isométrie indirecte donnée φ : si φ s'écrit $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}}$, Δ est l'ensemble des milieux des segments [MM'] (où M' = φ(M)); donc Δ est déterminée par la donnée de φ.
Ensuite : $\tau_{\vec{U}} = \sigma_\Delta \circ \varphi$, donc $\vec{U}$ est également déterminé par la donnée de φ.



* Existence de l'écriture $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}}$: Soit A un point du plan et A' = φ(A), soit τ_1 la translation qui envoie A en A' ; posons : $\varphi_1 = \varphi \circ \tau_1^{-1}$. Il est clair que φ_1 est une isométrie indirecte possédant un point fixe A'. C'est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ_1. On obtient : $\varphi = \sigma_{\Delta_1} \circ \tau_1$.
Nous pouvons écrire : $\tau_1 = \tau_2 \circ \tau_{\vec{U}}$ où $\vec{U}$ // Δ_1 et τ_2 est une translation orthogonale à Δ_1. On peut donc écrire $\tau_2 = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_\Delta$ avec Δ // Δ_1. D'où :

$$\varphi = \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_{\Delta_1} \circ \sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}},$$

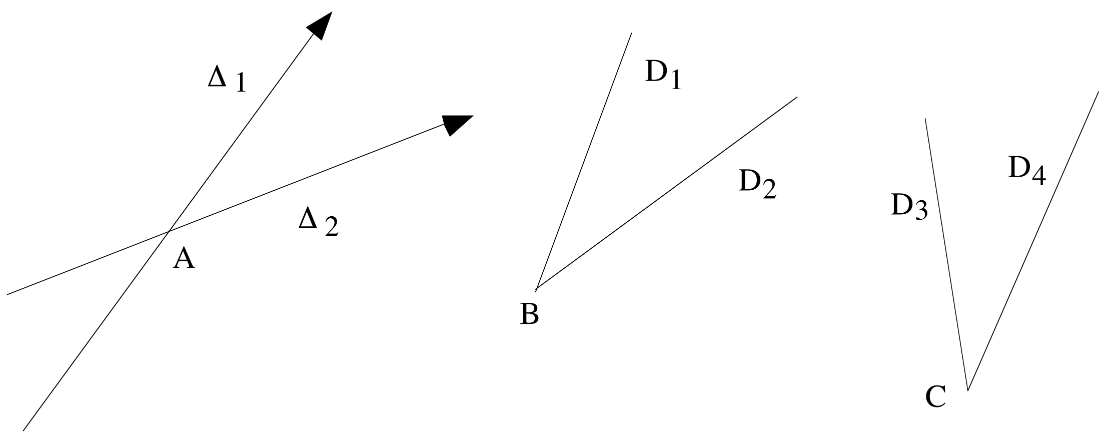
C'est-à-dire: $\varphi = \sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}}$ avec $\vec{U}$ // Δ. ❏

Exercice 7 : Étant données une droite Δ et un vecteur $\vec{U}$ arbitraires montrer qu'on a l'équivalence : $\sigma_\Delta \circ \tau_{\vec{U}} = \tau_{\vec{U}} \circ \sigma_\Delta$ ⁄ $\vec{U}$ // Δ

Angles

Angles de demi-droites, d'axes pointés, d'axes, de vecteurs

Étant données deux demi-droites D_1 et D_2, (ou deux axes pointés Δ_1 et Δ_2) de même origine, il existe exactement une rotation qui envoie la première sur la seconde. Nous appellerons **angle de ces demi-droites**, et nous noterons (D_1,D_2), la rotation vectorielle associée à cette rotation.



Les angles de demi-droites forment donc un groupe commutatif, avec les propriétés suivantes qui caractérisent sa structure :

- deux angles (D_1,D_2) et (D_3,D_4) sont égaux si et seulement si il existe un déplacement qui transforme le premier couple en le second.
- la loi d'addition des angles vérifie : $(D_1,D_2) + (D_2,D_3) = (D_1,D_3)$

On en déduit $(D_1,D_1) = 0$ et $(D_1,D_2) = -(D_2,D_1)$.
Le fait d'interpréter un angle de demi-droites comme une rotation vectorielle est purement conventionnel. L'important, ce sont les propriétés structurelles de groupe décrites au dessus.

On parlera de la même manière d'**angle de deux vecteurs non nuls**. Il s'agit de la rotation vectorielle qui transforme la demi-droite vectorielle définie par le premier en la demi-droite vectorielle définie par le second. La première propriété structurelle donnée dans l'encadré n'est plus valable : on ne demande pas que deux vecteurs aient même norme pour pouvoir définir leur angle.

L'**angle de deux axes** (droites orientées) est défini comme l'angle de deux vecteurs. L'angle de deux axes portés par des droites parallèles est nul si les axes ont même sens, ou égal à un demi-tour sinon.

Les quatre sortes d'«angles de ...» ainsi définis sont, avec les conventions adoptées, des objets de même nature : des rotations vectorielles. Cela permet de dire que l'angle de deux demi-droites est égal à l'angle de deux vecteurs par exemple. Ce qui rend les énoncés plus simples.

Dans un plan euclidien orienté, les angles précédemment définis sont, par convention, confondus avec leur mesure, qui est un réel défini modulo 2π.

Angles de droites

Si on adopte la démarche du paragraphe précédent, on aura envie de définir l'angle de deux droites comme la rotation vectorielle qui transforme les vecteurs de la première en les vecteurs de la seconde. L'inconvénient est que cette rotation vectorielle n'est définie qu'à un demi-tour près. Il faut donc dire qu'un angle de deux droites est un élément du groupe quotient :

Rotations vectorielles / sous groupe contenant le neutre et le demi-tour.

On peut aussi dire que les angles de droites sont définies par les propriétés structurelles suivantes (peu importe alors leur explicitation précise en tant qu'êtres mathématiques) :

- lorsque D_1 coupe D_2 et D_3 coupe D_4, les deux angles (D_1,D_2) et (D_3,D_4) sont égaux si et seulement si il existe un déplacement qui transforme le premier couple en le second.

– les angles de droites forment un groupe noté additivement pour lequel : $(D_1,D_2) + (D_2,D_3) = (D_1,D_3)$, et $(D_1,D_2) = 0 \;/\; D_1 \;//\; D_2$

Dans un plan euclidien orienté, les angles de droites sont, par convention, confondus avec leur mesure, qui est un réel défini modulo π.

La propriété essentielle qui relie les angles de droites et ceux de demi-droites est :

Le double d'un angle de droites est un angle de demi-droites, la moitié d'un angle de demi-droites est un angle de droites.

Cela se voit, dans un plan euclidien orienté en considérant les mesures des angles : le double d'un nombre défini modulo π est défini modulo 2π. Cela se constate aussi sur la définition des angles via le groupe des rotations vectorielles et son groupe quotient.

Cela se traduit dans de nombreux théorèmes de géométrie : la bissectrice d'un angle de demi-droites est une droite (et non pas une demi-droite). Ou encore (cf. théorème 6) : si ρ est une rotation et σ_Δ une symétrie orthogonale avec $\rho(\Delta) = \Delta'$ on a $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta = \rho^2$; on obtient bien une rotation (donc un angle de demi-droites) à partir des deux droites Δ et Δ', mais l'angle de la rotation obtenue est le double de l'angle des deux droites.

Cette dernière propriété est traduite sous forme d'une propriété de figures dans le théorème des angles inscrits.

Théorème 7 : *(théorème des angles inscrits)*

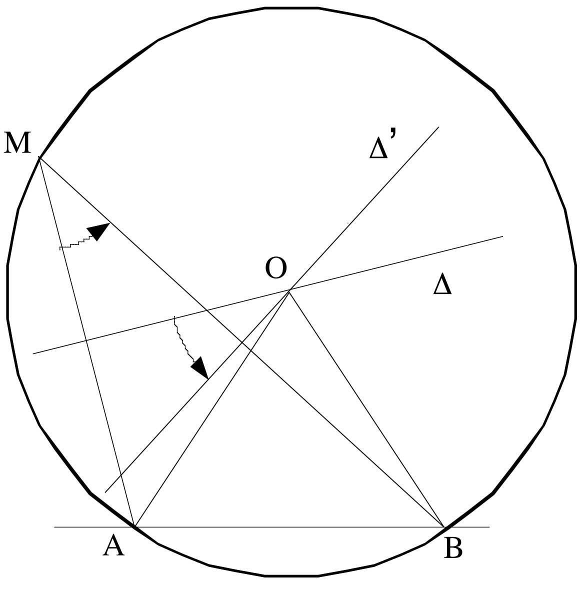
Si un cercle $\mathcal{C}$ de centre O passe par deux points A et B on a l'équivalence suivante pour tout point M distinct de A et B :

M est sur $\mathcal{C}$ / $(MA,MB) = 1/2\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

En outre si T_A et T_B désignent les tangentes en A et B au cercle $\mathcal{C}$ on a :

$(T_A,AB) = (BA,T_B) = 1/2\,(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

preuve> Soit M un point de $\mathcal{C}$. On considère les médiatrices Δ et Δ' de [MA] et [MB]. On a les égalités d'angles de droites :



$(MA,MB) =$

$(MA,\Delta) + (\Delta,\Delta') + (\Delta',MB) =$

$= (\Delta,\Delta') + 2$ droits $= (\Delta,\Delta')$.

Par ailleurs l'isométrie $\sigma_{\Delta'} \circ \sigma_\Delta$ est la rotation de centre O qui envoie A en B. Ainsi :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2\,(\Delta,\Delta') = 2\,(MA,MB)$

Comme tout point M non sur (AB) est sur un cercle passant par A et B on a aussi la réciproque.

Pour l'angle (T_A,AB) on peut raisonner par passage à la limite (M tend vers A sur $\mathcal{C}$) ou faire un calcul d'angles. ❑

Angles géométriques (angles non orientés)

Si on considère l'action du groupe de toutes les isométries sur les couples de demi-droites de même origine (resp. sur les couples de droites ayant au moins un point commun) on obtient la notion d'angle géométrique de demi-droites (resp. de droites). Deux couples forment le même angle géométrique si et seulement si leurs angles (orientés) sont égaux ou opposés.

La mesure d'un angle géométrique de demi-droites est un nombre entre 0 et π, celle d'un angle géométrique de droites est un nombre entre 0 et $\pi/2$.

Mais il n'y a plus de structure de groupe sur l'ensemble des angles géométriques de droites (ni sur l'ensemble des angles géométriques de demi-droites). En pratique, tous les calculs sont compliqués par le fait qu'on n'a plus la relation de Chasles pour les angles géométriques, et il faudrait donc raisonner cas par cas en s'assurant chaque fois que tous les cas possibles ont bien été envisagés.

2) GÉOMÉTRIE AFFINE PLANE RÉELLE

Introduction

La géométrie affine plane réelle est l'étude des propriétés géométriques liées aux droites et au parallélisme, mais ne faisant pas appel aux notions d'angle, d'orthogonalité ou de longueur. Ceci conduit à l'étude des propriétés du groupe des transformations affines. Dans les dessins, il faut bannir le compas, le rapporteur, et ne garder qu'une règle et un moyen de tracer des parallèles.

D'un certain point de vue, le groupe des homothétie-translations est le groupe qui fonde la géométrie affine. C'est un groupe très petit, qui conserve dont beaucoup de choses. En ce sens il ne peut pas être très utile. Néanmoins, la propriété pour trois homothéties η_1, η_2 et $\eta_2 \circ \eta_1$ d'avoir leurs centres alignés permet quelques exercices conduisant à des résultats non triviaux.

Le groupe des transformations affines est beaucoup plus vaste. Il ne révèle cependant sa pleine efficacité que dans le cadre de géométries autres que la géométrie affine. Par exemple, s'il est certes intéressant de voir que deux triangles non aplatis sont toujours «égaux» du point de vue affine, cela n'a de véritable portée que lorsqu'on en déduit que toute propriété affine d'un triangle peut être démontrée en se limitant au cas du triangle équilatéral. Plus spectaculairement : toute propriété affine d'une ellipse peut être démontrée en se limitant au cas du cercle. Mais «cercle» et «triangle équilatéral» ne prennent sens que dans un plan euclidien.

a) Qu'est-ce qui reste dans un plan euclidien quand on a perdu l'unité de longueur ?

Dans toute géométrie où on mesure des longueurs, la définition de l'unité de longueur est chose purement conventionnelle. Ce n'est pas ce non-problème que nous proposons d'aborder.

Dans la géométrie euclidienne, il y a un phénomène tout à fait remarquable, c'est l'existence de déformations qui conservent presque tout, sauf la longueur. Autrement dit encore, aucune longueur n'a un statut privilégié. Cela est passé dans l'inconscient collectif, et une copie du David de Michel-Ange à une échelle triple (sur la Piazza della Signoria par exemple) est «parfaite», aussi belle, elle a exactement les mêmes formes (mais en plus gros, et comme on la regarde de plus loin que l'original situé dans un musée...).

Dans la «réalité vraie» ça ne se passe pas du tout comme ça. Le rayon de l'atome d'hydrogène, ou la longueur d'onde de tel atome excité ne pourraient être modifiées[5] sans bouleverser la structure de l'univers, et il est hors de question de jamais réaliser une copie du David à une échelle trop petite ou trop grande. Bref toutes les longueurs ne s'équivalent pas. Gardons donc bien en tête que nous étudions un joli modèle mathématique, mais qu'une homothétie de rapport 10^{30} n'a pas de signification physique.

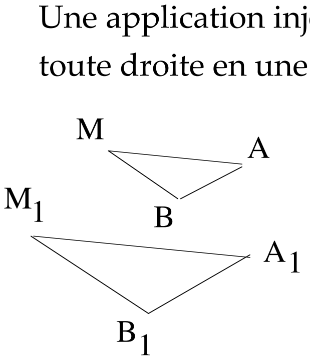
Dans la géométrie sphérique (géométrie métrique de la sphère pour elle-même) il y a au contraire une longueur qui a un statut privilégié, c'est la distance qui sépare deux points antipodaux. Cela interdit qu'une transformation globale de la sphère puisse multiplier toutes les longueurs par 2. Nous verrons d'ailleurs qu'il en va de même pour les transformations locales : deux petits disques sur une sphère ne peuvent être homothétiques l'un de l'autre que dans le rapport 1, (en valeur absolue). Il en ira de même pour la géométrie hyperbolique.

Homothéties et translations

Définitions Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, on appelle **homothétie-translation** (ou **dilatation**) de rapport $k \in \mathbb{R}^\infty$ une transformation τ du plan qui opère sur les vecteurs et qui vérifie $\tau(\overrightarrow{U}) = k.\overrightarrow{U}$ pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$.
On appelle **homothétie** de centre J et de rapport $k \in \mathbb{R}^\infty$ et on note $\eta_{J,k}$ la transformation $M \mapsto M_1$ où $\overrightarrow{JM_1} = k\,.\,\overrightarrow{JM}$.

Proposition 1 : Les homothétie-translations forment un groupe de transformations. Une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie-translation de rapport k, et réciproquement. Une homothétie-translation de rapport $k = 1$ est une translation, et réciproquement.

Théorème 1 : *(propriété caractéristique des homothétie-translations)*
Une application injective du plan euclidien dans lui même qui transforme toute droite en une droite parallèle est une homothétie-translation.



preuves> La proposition est facile. Pour le théorème, on appelle τ l'application considérée. Soient deux points A et B, et leurs images A_1 et B_1. On considère le réel k défini par $\overrightarrow{A_1B_1} = k.\overrightarrow{AB}$.
Alors l'application définie par $M \mapsto M_1$, où $\overrightarrow{A_1M_1} = k.\overrightarrow{AM}$ est une homothétie-translation η. On va montrer $\tau = \eta$. Si M est un point extérieur à (AB) les droites (AM) et (BM) donnent comme images (par τ ou η) deux droites passant respectivement par A_1 et B_1 et parallèles à

---

[5] Accord de genre avec le plus proche cité.

(AM) et (BM), donc se coupant en un point bien défini. Ainsi τ et η coïncident en M. Le cas d'un point sur (AB) se déduit du précédent. ❑

Exercice 1 : Soit Δ une direction de droite et $\mathbb{Q}_\Delta$ l'ensemble des couples de points distincts (A,B) vérifiant (AB) // Δ. Montrer que le groupe des homothétie-translations opère simplement transitivement sur $\mathbb{Q}_\Delta$.

Exercice 2 : Montrer que le groupe des homothétie-translations est produit semi-direct du sous-groupe (distingué) des translations et du sous-groupe des homothéties de centre J fixé. Donner la structure sous forme de produit semi-direct abstrait.

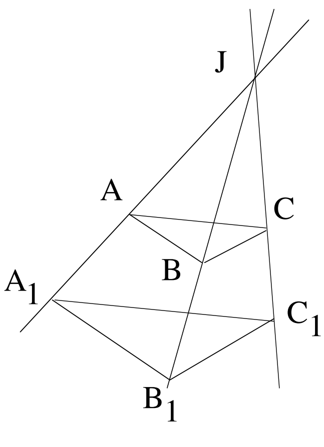
Proposition 2 : Les droites invariantes par une homothétie de centre J et de rapport k _ 1 sont les droites passant par J. Les droites invariantes par une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ _ $\overrightarrow{0}$ sont les droites parallèles à $\overrightarrow{U}$.

Proposition 3 : *(composition d'homothéties et translations)*
Le produit de deux homothéties de centres I et J distincts est une homothétie de centre K aligné avec I et J ou une translation de vecteur colinéaire à $\overrightarrow{IJ}$.
Le produit d'une homothétie de centre I et de la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ est une homothétie de centre J avec $\overrightarrow{U}$ // $\overrightarrow{IJ}$.

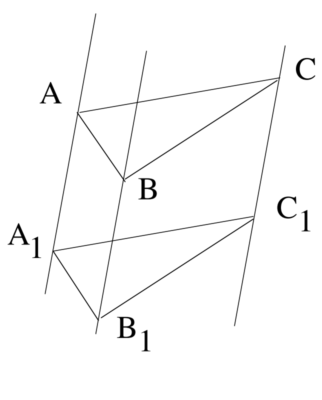
preuve> Au choix : faire un calcul vectoriel, ou utiliser la proposition 2. ❑

Théorème 2 : *(triangles translatés ou homothétiques)*
On considère deux triangles vrais ABC et $A_1B_1C_1$, les six points étant distincts, avec (AB) // (A_1B_1), (CB) // (C_1B_1), (AC) // (A_1C_1).
Alors le deuxième triangle est image du premier par une homothétie-translation. En particulier, les droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont parallèles ou concourantes.
Réciproquement si on considère trois droites parallèles ou concourantes et qu'on prend A _ A_1, B _ B_1, C _ C_1 sur ces trois droites on a l'implication:

$$(AB) // (A_1B_1),\ (CB) // (C_1B_1) \ \_ \ (AC) // (A_1C_1)$$



triangles homothétiques



triangles translatés

preuve> Pour la partie directe on raisonne comme au théorème 1. Pour la réciproque, on peut la faire résulter de la partie directe (le faire en exercice). On peut également raisonner comme suit : cas de trois droites concourantes en J : on considère l'homothétie de centre J et de rapport k défini par

$$k.\ \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JA_1},$$

on démontre que l'image de B est B_1 puis que celle de C est C_1 et on conclut. Preuve analogue dans le cas de droites parallèles. ❑

Similitudes

Définition Une similitude est une transformation du plan euclidien qui conserve les rapports de longueurs. Une similitude multiplie les longueurs par une constante $k \in \mathbb{R}^{+}$, on dit que c'est une similitude de rapport k.

En particulier les isométries sont les similitudes de rapport 1.

Proposition 4 :

a) Le produit de deux similitudes de rapports k et k' est une similitude de rapport $k.k'$.
b) Les isométries et les homothéties sont des similitudes.
c) Les similitudes de $\mathcal{P}$ forment un groupe de transformations.
d) Une similitude de rapport k est le produit d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. Le centre de l'homothétie peut être choisi arbitrairement. Toute similitude conserve l'orthogonalité.
e) Une similitude est une transformation dont l'expression dans un repère orthonormé est de la forme :
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
Le déterminant $u\,v' - u'\,v$ est égal à $\pm k^2$.
Si c'est $+k^2$ alors $u = v'$ et $u' = -v$. Si c'est $-k^2$ alors $u = -v'$ et $u' = v$.
f) Une similitude de rapport $k \neq 1$ possède exactement un point fixe J. Elle est alors le produit commutatif de homothétie $\eta_{J,k}$ et d'une isométrie qui fixe J.
g) Les seules similitudes qui ne possèdent pas de point fixe sont les translations et les symétries glissées.

preuve> Les points a), b), d) sont immédiats. On en déduit c), puis e) en tenant compte de la forme analytique des isométries. Le g) résulte du f) et de l'étude des isométries. Voyons le point f), il résulte d'un simple calcul (résoudre le système de deux équations en x, y obtenu en remplaçant x_1 et y_1 par x et y dans le e)), ce qui fait fonctionner le calcul est que la matrice de la similitude n'admet pas la valeur propre 1. On peut également remarquer que le f) résulte du théorème suivant : *une application lipschitzienne contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède un point fixe et un seul.* On applique alors ce théorème à la similitude elle-même si elle est de rapport < 1 et à la similitude inverse sinon. ❑

Proposition 5 : Une transformation affine du plan qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

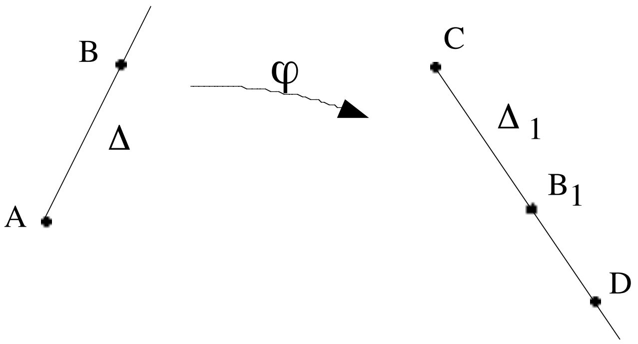
preuve> Voir la définition d'une transformation affine de $\mathcal{P}$ au début de la section b). On montre tout d'abord que l'image d'un carré ABCD (cotés orthogonaux et diagonales orthogonales) est un carré $A_1B_1C_1D_1$. On écrit ensuite un vecteur arbitraire $\overrightarrow{U}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et on en déduit que la norme de son image est multipliée par A_1B_1/AB. ❑

Similitudes directes

Définition Une similitude est dite directe si elle induit sur les vecteurs une transformation linéaire de déterminant positif. Sinon, on dit qu'elle est indirecte.

Une homothétie est une similitude directe. Une isométrie est directe en tant que similitude si et seulement si elle est directe en tant qu'isométrie.

Théorème fondamental : Les similitudes directes forment un groupe qui opère exactement deux fois transitivement sur $\mathcal{P}$: étant donnés deux couples de points (A,B) et (C,D) avec A _ B et C _ D il existe exactement une similitude directe qui envoie A et B respectivement en C et D.



preuve> Existence : on considère la demi-droite Δ d'origine A passant par B et la demi-droite Δ_1 d'origine C passant par D. Il y a une isométrie directe ψ qui envoie Δ sur Δ_1, elle envoie B en B_1. On la compose avec l'homothétie η de centre C qui envoie B_1 en D.

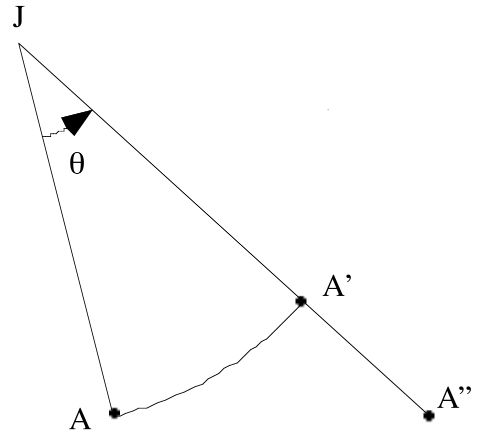
Unicité : si φ est une telle similitude alors $\psi^{-1} \circ \eta^{-1} \circ \varphi$ est une isométrie directe qui conserve la demi droite Δ, donc c'est l'identité❑

La proposition qui suit est à peu près immédiate (le a) résulte de la proposition 4 f))

Proposition 6 :

a) Une similitude directe de rapport k différent de 1 est de manière unique le produit commutatif d'une homothétie de rapport k et d'une rotation de même centre (d'angle éventuellement nul).

b) Toute similitude directe opère sur les directions de demi-droites à la manière d'une rotation. On peut donc parler de l'angle d'une similitude directe.



Définition et notation

Le produit de l'homothétie $\eta_{J,k}$ (avec $k > 0$) et de la rotation $\rho_{J,\theta}$ est appelé la similitude de centre J de rapport k et d'angle θ.

On la notera $\Sigma_{J,k,\theta}$.

b) Applications et transformations affines

Applications affines

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Rappelons qu'on dit qu'une application φ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ **opère sur les vecteurs** si on a l'implication :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1} \quad (\text{où } A_1 = \varphi(A) \text{ etc...})$$

On peut alors définir $\varphi(\overrightarrow{U})$ sans ambiguïté et on a immédiatement

$$\varphi(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \varphi(\overrightarrow{U}) + \varphi(\overrightarrow{V})$$

en écrivant $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sous la forme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Une **application affine** de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ est par définition une application qui opère sur les vecteurs et qui vérifie en outre la propriété de linéarité suivante :

$$\varphi(t\,.\,\overrightarrow{U}) = t\,.\,\varphi(\overrightarrow{U}) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

L'image d'une droite (resp. d'un segment) par une application affine est une droite ou un point (resp. un segment ou un point).

Une **transformation affine** est une application affine bijective. Une transformation affine donne pour image d'une droite une droite, d'un segment un segment, et de deux droites parallèles, des droites parallèles.

Exercice 1 : Montrer qu'une transformation de $\mathcal{E}_2$ qui opère sur les vecteurs et qui est continue est nécessairement affine. On montrera tout d'abord la propriété (1) pour les nombres t rationnels.

Repères cartésiens et affines

Un **repère cartésien** de $\mathcal{P}$ est par définition un triplet $\Re = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ où O est un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ deux vecteurs non colinéaires.

Notation : étant donné un repère cartésien $\Re$ on notera $M =_{\Re} (x,y)$ pour signifier : les coordonnées de M dans le repère $\Re$ sont (x,y), c.-à-d. :

$$\overrightarrow{OM} = x.\,\overrightarrow{U} + y.\,\overrightarrow{V}$$

Un **repère affine** de $\mathcal{P}$ est un triplet (A,B,C) de points distincts et non alignés.

Il existe un système naturel de coordonnées dans un repère affine, appelées coordonnées barycentriques. Nous développerons ce point dans le chapitre suivant, consacré aux espaces affines généraux. Un calcul vectoriel immédiat donne les résultats suivants :

Théorème 1 : Une application affine de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ est caractérisée par l'image d'un repère affine, image constituée de trois points arbitraires, ou par celle d'un repère cartésien, image constituée par un point et deux vecteurs arbitraires.

Proposition 1 : L'expression analytique d'une application affine dans un repère cartésien $\Re = (O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

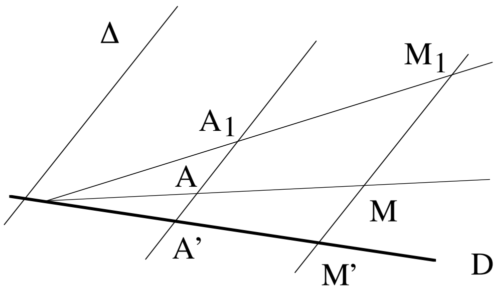
où $O_1, M_1, \overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont les images de O, M, $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ avec $O_1 =_{\Re} (a,b)$, $M =_{\Re} (x,y)$, $M_1 =_{\Re} (x_1,y_1)$, $\overrightarrow{U_1} =_{\Re} (u,u')$ et $\overrightarrow{V_1} =_{\Re} (v,v')$.

Exemples d'applications affines

On a vu que les similitudes sont des cas particuliers de transformations affines. Contrairement aux similitudes, les transformations affines peuvent déformer (au sens intuitif du mot) une figure. Étant donnés un réel k et deux droites sécantes D et Δ, l'**affinité** d'axe D, de direction Δ et de rapport k est l'application affine dont l'expression analytique est :

$$x_1 = x, \; y_1 = k.y$$

dans un repère dont l'axe des x est D et l'axe des y est $// \Delta$.



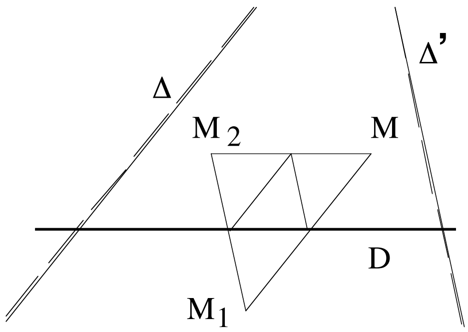
affinité d'axe D et de directiΔn

Il est immédiat que cette application est définie à partir de la droite D, de la direction de Δ et du réel k. Lorsque $k = 0$ on parle de **projection** sur D parallèlement à Δ. On la note $\pi_{D,\Delta}$. Lorsque $k = -1$ on parle de **symétrie** par rapport à D dans la direction Δ. On la note $\sigma_{D,\Delta}$. On parle parfois de symétrie oblique par opposition à symétrie orthogonale. Si D et Δ sont deux droites qui se coupent en C on a : $\sigma_{D,\Delta} \circ \sigma_{\Delta,D} = \sigma_C$.

Une transformation affine qui s'écrit dans un repère cartésien sous forme diagonale :

$$x_1 = h.x, \; y_1 = k.y$$

est parfois appelée une **biaffinité** : elle peut s'écrire comme le produit d'une affinité de rapport h et d'une affinité de rapport k, l'axe et la direction étant échangées.



transvection d'axe D obtenue en compos
la symétrie de directioΔ et celle de directioΔ'

Le produit de deux symétries par rapport à une même droite D dans deux directions distinctes s'appelle une **transvection**. C'est une transformation affine qui s'écrit sous la forme :

$$x_1 = x + k.y, \; y_1 = y$$

dans tout repère cartésien dont D est l'axe des x. Mais k dépend du repère choisi.

Transformations affines d'un plan euclidien

Dans le chapitre 1, on a démontré (partie b théorème 1) qu'une symétrie orthogonale est une transformation affine. Il en résulte que les isométries (produits de symétries orthogonales) et les similitudes (produits d'isométries et d'homothéties) sont des transformations affines.
Nous avons dit dans l'introduction que le groupe des homothétie-translations est le groupe qui fonde la géométrie affine. La proposition qui suit éclaire ce point de vue :

Proposition 2 : Une transformation φ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ est une transformation affine si et seulement si, pour toute homothétie-translation η, la transformation « image de η par φ », c.-à-d. $\varphi \circ \eta \circ \varphi^{-1}$, est une homothétie-translation de même rapport.

preuve> Le fait que l'image d'une translation est une translation revient à affirmer que φ opère sur les vecteurs. Le fait que l'image d'une homothétie-translation de rapport t est une homothétie-translation de même rapport revient à affirmer que :

$$\varphi(t \,.\, \overrightarrow{U}) = t \,.\, \varphi(\overrightarrow{U}) \qquad ❑$$

Exercice 2 : Démontrer qu'une homothétie η de centre J et une homothétie η' de centre K ont même rapport si et seulement si : $\eta' = \tau \circ \eta \circ \tau^{-1}$ où τ est la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$. En déduire une caractérisation du groupe des transformations affines en termes uniquement du groupe des homothétie-translations (tous deux étant vus comme des groupes de transformations).

Théorème 2 : Pour une application affine φ de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ les propriétés suivantes sont équivalentes

– φ est injective – φ est surjective – φ est bijective
– l'image d'un repère affine est un repère affine
– l'image de tout repère affine est un repère affine
– l'image de toute droite est une droite
– l'image d'un repère cartésien est un repère cartésien
– l'image de tout repère cartésien est un repère cartésien
– l'application linéaire de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ vers $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ définie par φ est bijective

Théorème 3 : Les transformations affines de $\mathcal{P}$ forment un groupe. Ce groupe opère simplement transitivement sur les repères cartésiens de $\mathcal{P}$. De même, il opère simplement transitivement sur les repères affines de $\mathcal{P}$.

Le théorème 2 résulte essentiellement de l'équivalence entre injectif, bijectif et surjectif pour un endomorphisme linéaire en dimension finie. Le théorème 3 résulte des théorèmes 1 et 2.

Exercice 3 :

a) Si φ est une transformation affine et η une application affine, montrer que $\varphi \circ \eta \circ \varphi^{-1}$ a la même expression analytique dans le repère $\varphi(\mathfrak{R})$ que celle de η dans le repère $\mathfrak{R}$.

b) Montrer que deux transformations sont des éléments conjugués du groupe affine si et seulement si elles ont la même expression analytique dans deux repères cartésiens convenables.

c) Montrer que deux transvections sont des éléments conjugués du groupe affine.

Exercice 4 : Toute transformation affine d'un plan euclidien peut s'écrire comme produit d'une similitude et d'une affinité orthogonale. (idées : 1 : considérer l'image d'un cercle, ou 2 : toute matrice réelle est produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique)

c) Propositions de définitions pour «un plan réel affine»

La recherche des bonnes définitions est partie intégrante des mathématiques. Elle jalonne leur histoire. La définition du nombre 0, puis des nombres négatifs, ont été de grandes conquêtes.

En géométrie, l'idée même de la nécessité d'une définition des notions de base n'est apparue que tardivement, lorsqu'on a découvert les géométries non euclidiennes.

La notion de plan affine est elle-même apparue lorsqu'on a cherché à *classer* les problèmes.

Certains problèmes de géométrie n'utilisent pas les propriétés liées à la distance, mais seulement les propriétés liées au parallélisme. Ce sont les problèmes de nature affine.

Historiquement, donc, un plan affine est un plan «ordinaire» dans lequel on ne retient que les propriétés liées au parallélisme, en «oubliant» tout ce qui est lié à l'égalité des longueurs ou des angles.

Nous ne comptons pas prendre parti entre les différentes définitions qui peuvent être proposées pour la notion de plan affine réel. Certaines sont plus esthétiques, d'autres plus simples, d'autres plus pratiques, d'autres plus parlantes etc... Et l'appréciation dépend beaucoup de la formation mathématique antérieure qu'on a reçue.

Nous donnons donc maintenant quatre exemples de définitions possibles parmi bien d'autres, en espérant que leur comparaison sera instructive.

Définition 1 : Un plan affine réel $\mathcal{P}$ est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure :

– l'ensemble des points : $\mathcal{P}$
– un groupe commutatif $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ de transformations de $\mathcal{P}$, appelées les translations
– une loi de composition externe $\mathbb{R} \infty \overrightarrow{\mathcal{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier les axiomes :

1) si on prend pour addition sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ la loi de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ comme groupe de transformation, alors $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$ (avec la loi externe fournie dans la structure ci-dessus).
2) étant donnés A et B $\in \mathcal{P}$, il existe exactement une translation qui envoie A en B. (c.-à-d. $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ opère simplement transitivement sur $\mathcal{P}$).

Dans cette première définition les vecteurs de $\mathcal{P}$ *sont* les translations. Dans celle qui suit, les vecteurs sont les éléments d'un espace vectoriel donné a priori.

Définition 2 : Un plan affine réel $\mathcal{P}$ est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure :

– l'ensemble des points : $\mathcal{P}$
– un espace vectoriel réel de dimension 2 : $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
– une loi externe $\mathcal{P} \infty \overrightarrow{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{P}$, notée $\_$

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier l'axiome suivant :
Avec cette loi externe le groupe additif $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ opère simplement transitivement sur $\mathcal{P}$.

Rappelons que l'axiome peut être explicité comme suit :

1) si $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $M \in \mathcal{P}$, alors $M \_ (\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = (M \_ \overrightarrow{U}) \_ \overrightarrow{V}$
2) $M \_ \overrightarrow{0} = M$
3) si A, B $\in \mathcal{P}$, il existe exactement un $\overrightarrow{U} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que $A \_ \overrightarrow{U} = B$ (on le note $\overrightarrow{AB}$)

Dans la définition 2 la structure affine apparaît comme une structure d'espace vectoriel dans laquelle on aurait perdu l'origine. Dans la définition 3, un plan réel affine est la copie conforme du modèle standard.

Définition 3 : Notons $\mathcal{A}_2$ le groupe des bijections affines de $\mathbb{R}^2$. Un plan affine réel $\mathcal{P}$ est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure

– l'ensemble des points : $\mathcal{P}$
– un ensemble non vide $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ de bijections de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}^2$ (appelées bijections affines).

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier les axiomes :

1) si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, alors $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{A}_2$
2) si $\varphi_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, $\psi \in \mathcal{A}_2$, alors $\psi \circ \varphi_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$

Définition 4 : Un plan affine réel $\mathcal{P}$ est donné par les objets suivants, constitutifs de sa structure :

– l'ensemble des points : $\mathcal{P}$
– l'ensemble des droites : $\mathcal{D}$
– la relation d'incidence entre points et droites (le point M est sur la droite Δ)
– la relation ternaire : «M appartient au segment d'extrémités A et B»

Ces éléments constitutifs de la structure doivent vérifier l'axiome suivant :
La structure de $\mathcal{P}$ ainsi décrite est isomorphe à la structure analogue de $\mathbb{R}^2$.

Dans cette dernière définition l'isomorphisme avec le modèle standard n'est pas donné a priori. Par contre on a donné suffisamment d'éléments structurants pour que l'isomorphisme, s'il existe, soit défini à une transformation affine près du modèle standard $\mathbb{R}^2$. Les trois premières données (points, droites et relation d'incidence) permettent en effet de définir les homothétie-translations. A partir de cela on peut en déduire que le produit d'un vecteur par un entier, puis par un rationnel, est défini de manière unique. Enfin, on peut obtenir le produit d'un vecteur par un réel en utilisant la quatrième donnée (les segments de droites) et en remarquant qu'un réel est caractérisé par les intervalles rationnels qui le contiennent.

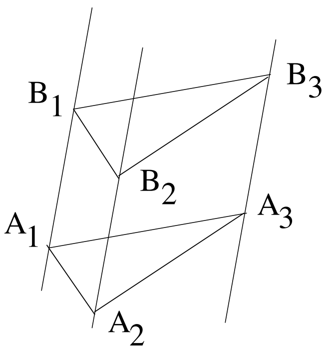
Exercice Démontrer que les quatre définitions proposées ci-dessus sont équivalentes.

d) Les implicites géométriques du calcul vectoriel

La définition 2 proposée dans la section précédente sera notre modèle de définition pour un espace affine arbitraire sur un corps commutatif. Elle est en effet particulièrement pratique à manipuler. Cette définition revient essentiellement à dire qu'un espace affine est un espace où on peut pratiquer le calcul vectoriel, tout en s'étant débarrassé de «l'origine», seul point jouant un rôle spécifique dans un espace vectoriel.

Aussi est-il important de bien se rendre compte de tous les implicites géométriques qui se cachent dans le calcul vectoriel, ou si l'on préfère, qui sont condensés dans ce calcul. Nous allons le faire en essayant de définir les figures géométriques sous-jacentes aux axiomes de la structure vectorielle. Nous allons nous heurter à un obstacle, qui est celui de la loi externe, qui fait intervenir des objets non directement géométriques : les nombres réels.

Nous partons donc d'un plan affine réel et essayons de voir comment on peut interpréter les axiomes vectoriels en termes de points, droites, et parallélisme. Nous allons voir qu'il s'agit pour l'essentiel des propriétés qui ont été énoncées dans le théorème 2 (triangles homothétiques et triangles translatés) de la section a)



triangles translatés

Tout d'abord la possibilité de définir l'égalité des vecteurs à partir des parallélogrammes repose sur la figure des triangles translatés :

si $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ et si $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_3B_3}$
alors $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_3B_3}$

Cette figure fonde donc la relation d'équipollence des bipoints.

Elle fonde en outre la possibilité de définir l'addition des vecteurs :

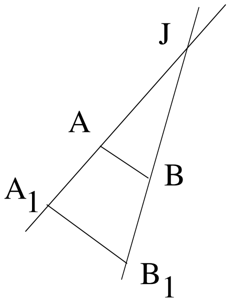
si $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$ et $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{B_2B_3}$ alors $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{B_1B_3}$

On notera par contre que les propriétés suivantes concernant la structure additive des vecteurs ne demandent pas de nouvelles figures parce qu'ils résultent immédiatement de la possibilité de définir l'égalité des vecteurs et leur addition. Ce sont : l'associativité de l'addition, la commutativité de l'addition (au moins pour deux vecteurs non parallèles), l'existence du neutre, celle de l'opposé d'un vecteur.

Nous examinons maintenant un axiome lié à la loi externe :

$$\lambda(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \lambda\,\overrightarrow{U} + \lambda\,\overrightarrow{V}.$$

Une première manière de l'interpréter est de dire qu'il condense le théorème de Thalès :



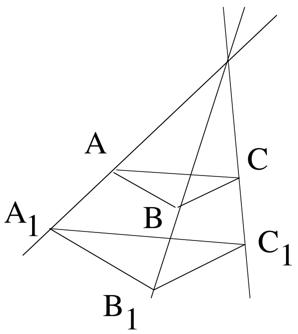
Dans la figure classique ci-contre posons en effet : $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$, définissons ensuite λ par : $\lambda\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{JA_1}$, et un point B' par : $\overrightarrow{JB'} = \lambda\,\overrightarrow{JB} = \lambda(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V})$.

Ainsi le point B' est sur la droite (JB) et par ailleurs

$$\overrightarrow{A_1B'} = \lambda\,\overrightarrow{V}$$

d'après l'axiome ci-dessus on a $(A_1B') \,//\, (AB)$. Donc $B' = B_1$ et on a bien $\lambda\,\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JB_1}$, ce qui est le théorème de Thalès.

Une deuxième manière d'interpréter cet axiome est de dire qu'il justifie la figure des triangles homothétiques, laquelle traduit une propriété purement géométrique, sans intervention des scalaires.



Dans la figure ci-contre on suppose les trois droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) concourantes et les droites (AB), (BC) parallèles à (A_1B_1) et (B_1C_1), on pose :

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{BC}$$

et on définit λ par $\lambda\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{A_1B_1}$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\lambda\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, et, en réutilisant l'axiome, que $\lambda\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, ce qui montre que les droites (AC) et (A_1C_1) sont parallèles.

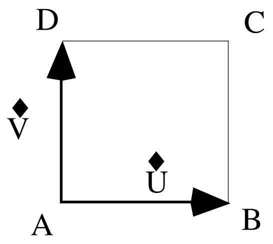
e) Aires et déterminants

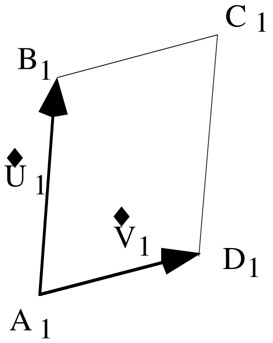
Considérons un plan euclidien $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ une base orthonormée.

On peut considérer un carré ABCD tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{V}$, carré qui sert à fixer l'unité d'aire. Ce carré est muni d'un sens de parcours

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D \leftrightarrow A$$

qui peut être considéré comme positif par convention.





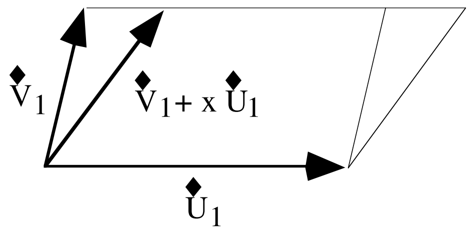
Si maintenant $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont deux vecteurs arbitraires on peut considérer le parallélogramme $A_1B_1C_1D_1$ où $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{V_1}$, avec le sens de parcours

$A_1 \leftrightarrow B_1 \leftrightarrow C_1 \leftrightarrow D_1 \leftrightarrow A_1$

Si nous considérons comme claires la notion d'aire d'un parallélogramme et celle de sens de parcours, nous pouvons poser :

$\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1})$:= aire du parallélogramme $A_1B_1C_1D_1$ affectée du signe $+$ si le sens de parcours $A_1 \leftrightarrow B_1 \leftrightarrow C_1 \leftrightarrow D_1 \leftrightarrow A_1$ est positif, et du signe $-$ sinon.

Nous proposons à la lectrice de démontrer intuitivement les propriétés suivantes :



$$\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1}) = -\mathbb{A}(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{U_1})$$
$$\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, y.\overrightarrow{V_1}) = y.\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1})$$
$$\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1} + x.\overrightarrow{U_1}) = \mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1})$$

Puis d'en déduire que :

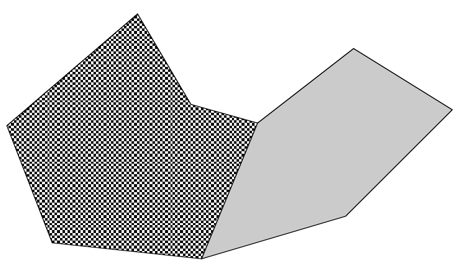
$$\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = \mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1}) + \mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_2})$$

et enfin que : $\mathbb{A}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1}) = \det_{\mathbb{B}}(\overrightarrow{U_1}, \overrightarrow{V_1})$

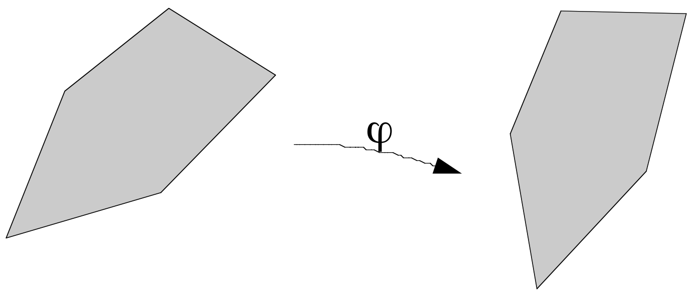
On admettra qu'il s'agit là d'une introduction bien meilleure à la notion de déterminant que la définition abstraite habituelle.

En fait, il est naturel de «comprendre» avant tout le déterminant en dimension 2 comme une aire algébrique de parallélogramme, en dimension 3 comme un volume algébrique de parallélépipède, et en dimension n comme la généralisation de la notion de volume algébrique.

Le lecteur pourra démontrer à titre d'exercice (en affinant la preuve intuitive précédente) qu'il y a, à un facteur multiplicatif près une seule manière de définir l'aire des polygones dans un plan euclidien si on impose les conditions suivantes :



additivité



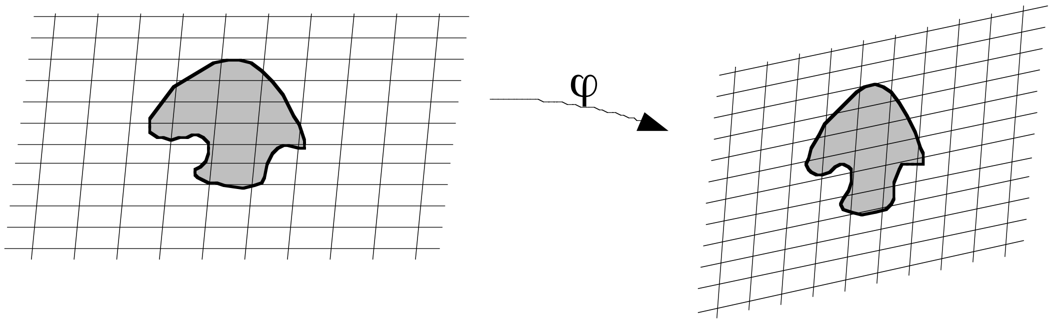
invariance par déplacement

Notons que le déterminant d'une base par rapport à une autre, qui (dans un plan) se comprend intuitivement comme le rapport des aires algébriques des parallélogrammes construits sur ces bases, est néanmoins une notion purement affine en ce sens que la définition abstraite habituelle ne fait intervenir aucunement la structure euclidienne du plan, mais seulement sa structure affine.

On peut traduire ce fait de deux manières encore :

– étant donnés dans un plan affine deux parallélogrammes orientés, le rapport de leurs aires algébriques ne dépend pas du choix de la métrique euclidienne qu'on rajoute à la structure affine pour en faire un plan euclidien, ni de l'orientation du plan.
– les rapports d'aires algébriques sont invariants par transformations affines (et pas seulement par déplacements). Plus précisément :
  Si une transformation affine φ d'une plan euclidien $\mathcal{P}$ transforme une base : $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$ en $\varphi(\overrightarrow{U}) = a\,\overrightarrow{U} + b\,\overrightarrow{V}$, $\varphi(\overrightarrow{V}) = c\,\overrightarrow{U} + d\,\overrightarrow{V}$ alors φ multiplie les aires algébriques par le rapport constant $\det(\varphi) = a\,d - b\,c$

On notera pour terminer que le fait qu'une transformation affine du plan multiplie les aires (non algébriques) par une constante est intuitivement clair en considérant un maillage du plan et son transformé :



Exercice Soit φ est une transformation affine qui fixe deux points A et B. Si son déterminant est distinct de 1 c'est une affinité d'axe (AB), s'il est égal à 1 c'est une transvection d'axe (AB).

f) Théorèmes structurels

Les théorèmes structurels que nous énonçons ont pour fonction de mettre en valeur l'importance du point de vue «groupe de transformation». Les preuves demanderaient pour être complètes de nombreux détails techniques qui ne présentent pas un intérêt suffisant. Nous nous en tiendrons à la démarche générale.

Le groupe affine est fondé sur le groupe des homothétie-translations

Le théorème structurel important suivant a déjà été énoncé dans la proposition 1) de la section b).

Théorème 0 : Dans un plan réel affine, une transformation qui donne pour image de toute homothétie-translation une homothétie-translation de même rapport est une transformation affine.

Exercice 1 : Notons $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ le groupe des homothétie-translations d'un plan affine réel $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ le sous-groupe des translations.

a) Montrer que $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est le sous-groupe des éléments de la forme $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ avec φ et ψ dans $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$.

b) Montrer que deux homothéties ont même rapport si et seulement si elles sont conjuguées dans le groupe $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$.

Le groupe affine comme produit semi-direct.

Le groupe linéaire $\mathbf{GL}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ d'un espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ opère de manière naturelle sur le groupe additif $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Cela donne lieu à une structure naturelle de produit semi-direct abstrait : $\overrightarrow{\mathcal{P}} \infty_{\theta} \mathbf{GL}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ avec $\theta(\varphi)(\overrightarrow{U}) = \varphi(\overrightarrow{U})$. Lorsque $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est l'espace des vecteurs d'un plan réel affine $\mathcal{P}$ on obtient le résultat suivant.

Théorème 1 : Le produit semi-direct abstrait $\overrightarrow{\mathcal{P}} \infty_{\theta} \mathbf{GL}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$ défini ci-dessus est isomorphe au groupe affine de $\mathcal{P}$.

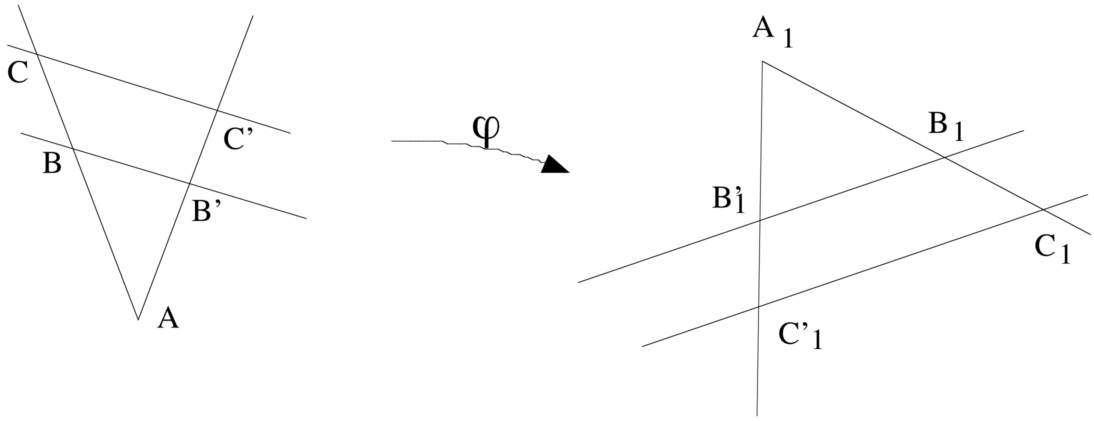
Pour établir ce résultat, on montrera par exemple que le groupe affine de $\mathcal{P}$ est produit semi-direct interne du sous-groupe (distingué) des translations (isomorphe au groupe additif $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) et du sous-groupe des transformations affines conservant un point donné J (ce dernier sous groupe étant isomorphe à $\mathbf{GL}(\overrightarrow{\mathcal{P}})$).

Qu'est-ce qui reste dans un plan euclidien quand on a perdu l'orthogonalité ?

Pour donner un sens plus précis à la question posée, rappelons tout d'abord qu'une transformation affine qui conserve l'orthogonalité est une similitude (proposition 5 de la section a)). Nous allons voir par ailleurs qu'une transformation du plan euclidien qui conserve les droites est nécessairement affine. On peut donc répondre à la question posée : si on garde les droites mais si on a perdu l'orthogonalité il reste la «structure affine». En appelant structure affine tout ce qui est invariant par le groupe affine.

Théorème 2 : Une transformation φ du plan euclidien qui transforme toute droite en une droite est une transformation affine.

preuve> Les images de deux droites sécantes sont deux droites sécantes, donc de deux droites parallèles, des droites parallèles. Donc l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme. Donc la transformation opère sur les vecteurs.
De manière générale, toute construction basée sur des droites et sur le parallélisme sera transformée par φ en une construction analogue. La fin de la preuve consiste à vérifier qu'on peut caractériser la structure affine du plan réel au moyen de telles constructions.



Soit $\overrightarrow{U}$ un vecteur non nul et D une droite parallèle au vecteur $\overrightarrow{U}$. En considérant la bijection que φ établit entre D et son image, on voit qu'il existe une bijection λ de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(t.\overrightarrow{U}) = \lambda(t).\varphi(\overrightarrow{U})$$

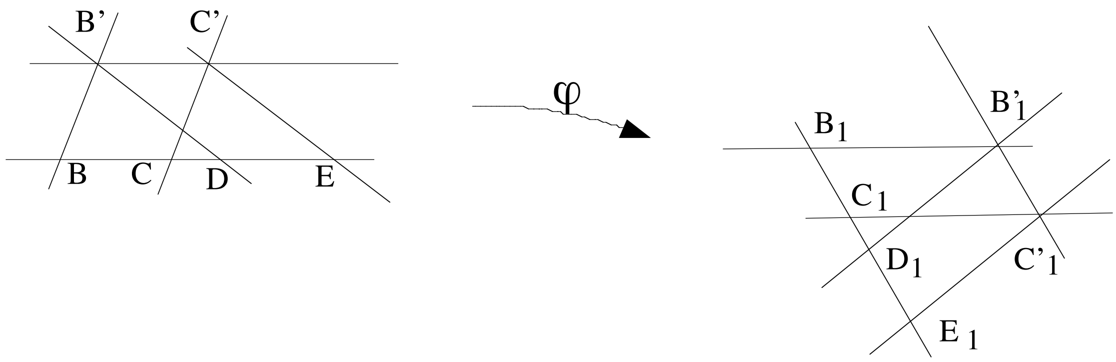
On établit ensuite que la bijection λ ne dépend pas du choix du vecteur $\overrightarrow{U}$ en considérant un vecteur $\overrightarrow{V}$ non colinéaire, une droite Δ parallèle à $\overrightarrow{V}$ et la projection de D sur Δ qui envoie $\overrightarrow{U}$ en $\overrightarrow{V}$. Par exemple dans la figure ci-dessus :

$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB'}$, $t\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AC}$, $\varphi(A) = A_1$ etc...

On en déduit que $\lambda(t.t') = \lambda(t).\lambda(t')$ en considérant $\varphi(t.\overrightarrow{U'})$ avec $\overrightarrow{U'} = t'.\overrightarrow{U}$

Ensuite on démontre que $\lambda(t+t') = \lambda(t)+\lambda(t')$ en remarquant que l'addition des vecteurs $t.\overrightarrow{U}$ et $t'.\overrightarrow{U}$ peut être construite au moyen de parallélogrammes : dans la figure ci-dessous par exemple:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}$$



On obtient donc que λ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ pour sa structure de corps. On conclut grâce au théorème d'algèbre qui affirme :

Le corps $\mathbb{R}$ ne possède pas d'autre automorphisme que l'identité.

Ce dernier résultat se montre en remarquant que λ est croissante parce que l'image d'un positif (donc carré) est (un carré, donc) un positif. Par ailleurs il est facile de voir que la restriction de λ à $\mathbb{Q}$ est l'identité. ❑

Générateurs du groupe affine

Théorème 3 : Toute transformation affine peut s'écrire comme un produit d'affinités. Toute transformation affine de déterminant 1 est un produit de transvections. Toute transformation affine de déterminant ± 1 est un produit de symétries obliques.

preuve> Il suffit de traiter le cas où le déterminant est supposé égal à 1. Il s'agit de transformer, par une succession de transvections, un repère affine donné (A,B,C) en un autre repère affine donné (A',B',C'). Tout d'abord on construit une transvection φ_1 qui envoie A en A'. Soit alors (A',B_1,C_1) l'image de (A,B,C) par φ_1. Si A, B_1, B' ne sont pas alignés, on considère la droite Δ passant par A et parallèle à $\overrightarrow{B_1B'}$. Il existe une transvection φ_2 d'axe Δ qui envoie B_1 en B'. Sinon, on pourra néanmoins envoyer B_1 en B' par un produit φ_2 de deux transvections qui fixent A. Dans les deux cas, soit (A',B',C_2) l'image de (A',B_1,C_1) par φ_2. Alors la transformation affine qui envoie (A',B',C_2) en (A',B',C') est une transvection d'axe (A'B'). ❑

Les automorphismes du groupe affine

Théorème 4 : Tout automorphisme du groupe affine d'un plan réel affine est intérieur.

preuve> Soit φ un automorphisme du groupe affine. On commence par démontrer que l'image d'une symétrie point est une symétrie-point. Pour cela il suffit de caractériser les symétries-point en termes de la structure de groupe. Les éléments σ d'ordre 2 sont répartis en deux classes de conjugaison : les symétries-point et les symétries obliques. La première classe de conjugaison se distingue de la seconde en remarquant que le produit de trois éléments de la classe est toujours dans la classe.
Donc, il existe une bijection ψ de $\mathcal{P}$ telle que : $\varphi(\sigma_A) = \sigma_{\psi(A)}$.
On démontre ensuite que ψ est une transformation affine en s'appuyant sur le théorème 2 ci-dessus. Il faut traduire en termes de la structure du groupe la propriété pour trois points d'être alignés : ce peut être par exemple : 3 symétries-point distinctes ont leurs centres alignés si et seulement si toute symétrie oblique qui commute avec les deux premières commute avec la troisième (en effet, la symétrie oblique $\sigma_{D,\Delta}$ commute avec la symétrie-point σ_A si et seulement si A est sur D). Donc ψ conserve l'alignement, donc c'est une transformation affine.
Il reste enfin à vérifier que $\varphi(\tau) = \psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ (1) pour toute transformation affine (c'est déjà vrai lorsque τ est une symétrie-point). Cela résulte d'un petit calcul basé sur «(1) est vrai pour les symétries-point» et sur $\tau \circ \sigma_A \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(A)}$. ❑

Remarque Deux transformations affines distinctes définissent deux automorphismes intérieurs distincts du groupe affine (cela équivaut au fait que le centre du groupe affine est réduit à l'identité)

Exercice 2 : En combinant les idées contenues dans la preuve du théorème 4 avec l'exercice 1, démontrer que tout automorphisme du groupe $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ est la restriction à $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ d'un automorphisme intérieur du groupe affine.

Groupe des isométries comme sous-groupe du groupe affine

Théorème 5 : Si un sous-groupe du groupe affine d'un plan réel affine $\mathcal{P}$ opère simplement transitivement sur les drapeaux, c'est le sous-groupe des isométries pour une distance définie dans $\mathcal{P}$ à partir d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. En outre, ce produit scalaire est unique à un facteur multiplicatif positif près.

preuve> Soit $\mathfrak{G}$ un tel sous-groupe. L'idée directrice de la preuve est la suivante : définir l'orthogonalité à partir des symétries obliques de $\mathfrak{G}$, montrer que cette orthogonalité correspond bien à un produit scalaire, vérifier enfin que les éléments de $\mathfrak{G}$ sont les isométries pour ce produit scalaire.

Symétries-point et translations. On démontre facilement que $\mathfrak{G}$ contient les symétries-point (considérer un drapeau convenable et le drapeau symétrique) et, par conséquent, les translations.

Symétries obliques, $\mathfrak{G}$-orthogonalité. Pour toute droite D, on démontre que $\mathfrak{G}$ contient exactement une symétrie oblique par rapport à D (considérer un drapeau dont l'axe est porté par D et son symétrique par rapport à D). Cela permet de définir la notion de droites $\mathfrak{G}$-orthogonales (la symétrie par rapport à la première qui est dans $\mathfrak{G}$ a pour direction la seconde). On vérifie qu'il s'agit d'une relation symétrique qui porte sur les directions des droites.

Pour tout élément τ de $\mathfrak{G}$ et toute symétrie $\sigma_{D,\Delta}$ de $\mathfrak{G}$ on a :

$$\tau \circ \sigma_{D,\Delta} \circ \tau^{-1} = \sigma_{\tau(D),\tau(\Delta)}$$

Donc les éléments de $\mathfrak{G}$ conservent la relation de $\mathfrak{G}$-orthogonalité.

Notons $\mathfrak{G}_A$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ qui fixe A, $\mathfrak{G}_A^+$ et $\mathfrak{G}_A^-$ le sous-groupe direct et la partie indirecte de $\mathfrak{G}_A$. Un élément de $\mathfrak{G}_A^-$ a deux valeurs propres de signes opposés (car son déterminant est négatif) donc transforme un drapeau de point A et de bord Δ (portant le vecteur propre de valeur propre positive) en son symétrique par rapport à Δ, donc c'est une symétrie d'axe Δ dans la direction $\mathfrak{G}$-orthogonale.

Quart de tour, définition d'une structure euclidienne. Soient deux drapeaux de même orientation, de même origine A et avec des axes D et Δ $\mathfrak{G}$-orthogonaux. Soit ρ l'élément de $\mathfrak{G}_A^+$ qui envoie le premier sur le second. Il transforme un vecteur $\overrightarrow{U}$ porté par D en un vecteur $\overrightarrow{V}$ porté par Δ. Puisque ρ conserve la $\mathfrak{G}$-orthogonalité, on a $\rho(\Delta) =$ D et ρ^2 fixe les droites D et Δ. On en déduit : $\rho^2 = \sigma_A$. Considérons le produit scalaire défini par l'affirmation : la base $(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est orthonormée. On vérifie facilement que ρ est le quart de tour (pour la structure euclidienne qui vient d'être définie) qui envoie $\overrightarrow{U}$ en $\overrightarrow{V}$.

$\mathfrak{G}$ *est bien le groupe des isométries pour cette structure euclidienne*. Notons $\sigma = \sigma_{D',\Delta'}$ un élément arbitraire de $\mathfrak{G}_A^-$. Comme $\rho \circ \sigma$ est dans $\mathfrak{G}_A^-$ on a $(\rho \circ \sigma)^2 = \mathrm{Id}$. On en déduit $\rho \circ \sigma \circ \rho^{-1} = \sigma \circ \sigma_A$, ce qui implique $\rho(\Delta') = D'$. Ainsi la relation d'orthogonalité (pour la structure euclidienne qui vient d'être définie) coïncide avec la relation de $\mathfrak{G}$-orthogonalité. Comme les éléments de $\mathfrak{G}$ conservent l'orthogonalité, ce sont des similitudes (proposition 5 de la section a)). Soit τ un élément arbitraire de $\mathfrak{G}^+$. Quitte à le composer avec une translation, on peut supposer qu'il a un point fixe A. Soit σ un élément de $\mathfrak{G}_A^-$. Comme $\tau \circ \sigma$ est dans $\mathfrak{G}_A^-$ on a $(\tau \circ \sigma)^2 = \mathrm{Id}$. Cela implique que τ est une similitude de rapport 1, donc une isométrie. On en déduit que tous les éléments de $\mathfrak{G}$ sont des isométries. On termine en remarquant qu'il ne manque aucune isométrie dans $\mathfrak{G}$ d'après la propriété de transitivité sur les drapeaux. ❑

Les théorèmes 2 et 5 de cette section donnent le résultat suivant qui peut être considéré comme un théorème fondamental concernant la géométrie euclidienne plane.

Théorème fondamental n°3 de la géométrie euclidienne plane

Si un groupe de transformations d'un plan réel affine $\mathcal{P}$ opère sur les droites, et s'il opère simplement transitivement sur les drapeaux, c'est le sous-groupe des isométries pour une distance définie dans $\mathcal{P}$ à partir d'un produit scalaire sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. En outre, ce produit scalaire est unique à un facteur multiplicatif positif près.

Les automorphismes du groupe des isométries

Théorème 6 : Tout automorphisme intérieur du groupe des similitudes d'un plan euclidien conserve le groupe des isométries.

Réciproquement, tout automorphisme du groupe des isométries provient d'un automorphisme intérieur du groupe des similitudes.

preuve> Seule la réciproque n'est pas immédiate. On raisonne comme au théorème 4. Cette fois-ci la bijection ψ de $\mathcal{P}$ définie à partir de l'automorphisme considéré transforme une droite en une droite (même argument) mais aussi deux droites orthogonales en deux droites orthogonales (parce que l'image d'une symétrie orthogonale est une symétrie orthogonale), donc c'est une similitude. ❑

Corollaire : Tout automorphisme du groupe des similitudes d'un plan euclidien est intérieur