**Journées Nationales de Calcul Formel**

**CIRM, Luminy, 3-7 Novembre 2014**

Algèbre constructive

**deuxième exposé, 6 Novembre**

**H. Lombardi, Besançon**
Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Le tutoriel écrit en détail :
http://hlombardi.free.fr/publis/JNCF2014.pdf
Voir les transparents : http://hlombardi.free.fr/publis/JNCF-LectSlides3-4.pdf



## 3 - Dimension de Krull



### Treillis et spectre de Zariski d'un anneau commutatif

Nous notons $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \sqrt[\mathbf{A}]{\mathfrak{a}}$ le nilradical de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans l'anneau $\mathbf{A}$ et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ pour $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\big)$.
Le **treillis de Zariski** de l'anneau $\mathbf{A}$, noté $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, est l'ensemble des idéaux $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ (pour $n\in\mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{A}$).
Cet ensemble, ordonné par la relation d'inclusion, est un treillis distributif et l'on a

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1)\vee\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2)=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)\ \text{ et }\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1)\wedge\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2)=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2).$$



*Treillis et spectre de Zariski d'un anneau commutatif*

On appelle **spectre de Zariski** de l'anneau $\mathbf{A}$ et l'on note $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ l'ensemble des idéaux premiers premiers de $\mathbf{A}$. On le munit de la topologie possédant pour base d'ouverts les

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)=\{\,\mathfrak{p}\in\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}\mid a\notin\mathfrak{p}\,\}.$$

On note $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ pour $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1)\cup\cdots\cup\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_n)$.



*Treillis et spectre de Zariski d'un anneau commutatif*

En mathématiques classiques, on obtient alors le résultat suivant.

**Théorème 1.**

1. *Les ouverts quasi-compacts de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ *sont les ouverts* $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$.
2. *L'application* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ *est bien définie, c'est un isomorphisme de treillis distributifs.*

De manière plus générale, Stone a démontré en 1937 un théorème qui établit (terminologie d'aujourd'hui) une *antiéquivalence entre* la catégorie des *treillis distributifs* et celle des *espaces spectraux*.

Un défi de l'algèbre constructive est de ramener tout discours sur le spectre de Zariski à un discours sur le treillis de Zariski.

## Une définition constructivement acceptable de la dimension de Krull

**Définition 2.** *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $x \in \mathbf{A}$.

1. *Le* ***bord supérieur de Krull*** *de* $x$ *dans* $\mathbf{A}$ *est l'anneau quotient*

$$\mathbf{A}^x_{\mathrm{K}} := \mathbf{A}/\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x) \quad \textit{où} \quad \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x) := \langle x\rangle + (\sqrt{0} : x). \tag{1}$$

   *On dira que* $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$ *est* ***l'idéal bord de Krull de*** $x$ ***dans*** $\mathbf{A}$.

2. *Le* ***bord inférieur de Krull*** *de* $x$ *dans* $\mathbf{A}$ *est l'anneau localisé*

$$\mathbf{A}^{\mathrm{K}}_x := \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)^{-1}\mathbf{A} \quad \textit{où} \quad \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x) = x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A}). \tag{2}$$

   *On dira que* $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$ *est le* ***monoïde bord de Krull de*** $x$ *dans* $\mathbf{A}$.





Le théorème suivant donne alors en mathématiques classiques une caractérisation inductive élémentaire de la dimension de Krull d'un anneau commutatif.

**Théorème 3.** *Pour un anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *et un entier* $k \geqslant 0$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La dimension de Krull de* $\mathbf{A}$ *est* $\leqslant k$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *la dimension de Krull de* $\mathbf{A}^x_{\mathrm{K}}$ *est* $\leqslant k-1$.
3. *Pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *la dimension de Krull de* $\mathbf{A}^{\mathrm{K}}_x$ *est* $\leqslant k-1$.

Ceci donne une *définition constructivement acceptable de la dimension de Krull* en initialisant avec la dimension $-1$ qui caractérise l'anneau nul.



## Suites singulières, suites complémentaires

Une suite $(x_0, \ldots, x_k)$ dans $\mathbf{A}$ est dite **singulière** s'il existe $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ et $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ tels que

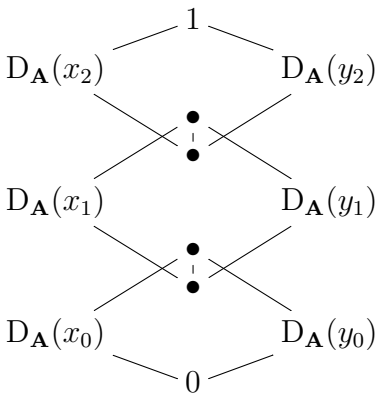
$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1}(\cdots(x_k^{m_k}(1 + a_k x_k) + \cdots) + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0 \tag{3}$$

**Proposition 4.** *Pour un anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *et un entier* $k \geqslant 0$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La dimension de Krull de* $\mathbf{A}$ *est* $\leqslant k$.
2. *Toute suite* $(x_0, \ldots, x_k)$ *dans* $\mathbf{A}$ *est singulière.*
3. *Pour tous* $x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{A}$ *il existe* $y_0, \ldots, y_k \in \mathbf{A}$ *tels que*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0y_0) &=& \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1y_1) &\leqslant& \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0, y_0) \\ \vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_ky_k) &\leqslant& \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_{k-1}, y_{k-1}) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) &=& \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_k, y_k) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Par exemple pour $k = 2$ le point *3* correspond au dessin suivant dans $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$.




Les suites $(x_0, x_1, x_2)$ et $(y_0, y_1, y_2)$ sont dites **complémentaires**.



## Théorèmes classiques sous forme constructive

La définition constructive de la dimension de Krull est un heureux événement pour les deux raisons suivantes.

— En pratique, on arrive à démontrer que la dimension de Krull de la plupart des anneaux qui interviennent dans la littérature satisfait la définition constructive *au moyen d'une démonstration constructive.*

— Les théorèmes des mathématiques classiques dans lesquels la dimension de Krull intervient de manière décisive, quand ils aboutissent à une conclusion de nature concrète, sont transformés en des théorèmes constructifs [1], *ce qui révèle un contenu concret satisfaisant au théorème abstrait de départ.*



## Un théorème de Kronecker

**Lemme 5.** *Pour $u, v \in \mathbf{A}$ on a*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u + v, uv) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u + v) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(uv)\ .$$

*En particulier, si $uv \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$, alors $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u + v)$.*

**Lemme 6.** *Soit $\ell \geqslant 1$. Si $(x_1, \ldots, x_\ell)$ et $(y_1 \ldots, y_\ell)$ sont deux suites complémentaires dans $\mathbf{A}$ alors pour tout $a \in \mathbf{A}$ on a :*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, x_1, \ldots, x_\ell) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1 + ay_1, \ldots, x_\ell + ay_\ell),$$

*c'est-à-dire encore : $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1 + ay_1, \ldots, x_\ell + ay_\ell)$.*



**Théorème 7.** (Théorème de Kronecker-Heitmann, avec la dimension de Krull, sans noethérianité)

1. *Soit $n \geqslant 0$. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que pour tout $a \in \mathbf{A}$ : $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1 + ay_1, \ldots, x_n + ay_n)$.*
2. *En conséquence, dans un anneau de dimension de Krull $\leqslant n$, tout idéal de type fini a même nilradical qu'un idéal engendré par au plus $n + 1$ éléments.*

1. Il s'agit d'un fait d'expérience et non d'un métathéorème.

## Un théorème de Bass

**Théorème 8.** (Théorème de Bass, avec la dimension de Krull, sans noethérianité)
*Si* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$, *pour tous* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$, *il existe des* $y_i$ *tels que l'implication suivante soit satisfaite :*

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad (1 \in \langle a, x_1, \ldots, x_n\rangle \Rightarrow 1 \in \langle x_1 + ay_1, \ldots, x_n + ay_n\rangle).$$

*Par suite, tout* $\mathbf{A}$*-module stablement libre de rang* $\geqslant n$ *est libre.*



## Théorèmes de Serre et de Forster

**Théorème 9.** (Coquand) *On suppose* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$. *Soit une matrice*

$$F = [\,C_0 \,|\, C_1 \,|\, \ldots \,|\, C_p\,], \quad \textit{(les } C_i \textit{ sont les colonnes).}$$

*Notons* $G = [\,C_1 \,|\, \ldots \,|\, C_p\,]$ *et supposons que* $1 \in \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_n(G)$.
*Un algorithme donne une combinaison linéaire* $C_0 + \sum_{i\in[\![1..p]\!]} a_i C_i$, *qui est unimodulaire.*

Comme corollaires, on obtient les célèbres théorèmes de Serre et de Forster dans leur version non noethérienne avec la dimension de Krull.



*Théorèmes de Serre et de Forster*

Nous disons qu'une matrice $A$ est **de rang** $\geqslant k$ si l'idéal déterminantiel d'ordre $k$, $\mathcal{D}_k(A)$, est égal à $\mathbf{A}$. Un module de présentation finie est dit **localement engendré par** $\ell$ **éléments**, si $\mathcal{F}_\ell(M) = \mathbf{A}$ : autrement dit, si $M \simeq \operatorname{Coker} A$, avec $A \in \mathbb{M}_{q,p}(\mathbf{A})$, alors $A$ est de rang $\geqslant q - \ell$.

**Théorème 10.** *(Splitting off de Serre) Soit* $k \geqslant 0$ *et* $r \geqslant 1$. *Supposons que* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$.
*Soit* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module projectif de rang* $k + r$.
*Alors* $M \simeq N \oplus \mathbf{A}^r$ *pour un certain module* $N$ *projectif de rang* $k$.



*Théorèmes de Serre et de Forster*

**Théorème 11.** *(Théorème de Forster-Heitmann pour la* Kdim*, sans noethérianité)*
*Soit* $k \geqslant 0$ *et* $r \geqslant 1$. *Supposons que* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$. *Soit* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module de type fini localement engendré par* $r$ *éléments. Alors* $M$ *est engendré par* $k + r$ *éléments.*
*Plus précisément, si* $M = \langle y_1, \ldots, y_{k+r+s}\rangle$, *on peut calculer*

$$z_1, \ldots, z_{k+r} \in \langle y_{k+r+1}, \ldots, y_{k+r+s}\rangle$$

*tels que* $M$ *soit engendré par* $(y_1 + z_1, \ldots, y_{k+r} + z_{k+r})$.

# 4 - Idéaux premiers, minimaux, maximaux



## Le principe local-global en mathématiques classiques

Les idéaux premiers sont omniprésents en algèbre commutative moderne. On a déjà vu comment interpréter leur utilisation dans la dimension de Krull. Il s'agissait seulement d'un premier exemple.
Les idéaux premiers sont présents et semblent essentiels dans tout ce que l'on appelle le **principe local-global** en mathématiques classiques. Ce principe informel dit que les bonnes propriétés des anneaux ou des modules sont celles qui obéissent à la règle suivante :
• *Forme usuelle d'un principe local-global abstrait. La propriété est satisfaite si, et seulement si, elle est satisfaite après localisation en n'importe quel idéal premier*[2].





Il y a cependant des propriétés qui mériteraient d'être qualifiées de bonnes, comme le fait pour un module d'être de type fini ou cohérent, et qui n'obéissent pas à la règle ci-dessus, mais seulement à la règle suivante :
• *Forme variante d'un principe local-global abstrait. La propriété est satisfaite si, et seulement si, elle est satisfaite après localisation au voisinage de n'importe quel idéal premier.*
Dans la règle en question, « après localisation au voisinage de l'idéal premier $\mathfrak{P}$ » signifie qu'il existe un $s \notin \mathfrak{P}$ tel que la propriété est satisfaite pour le changement d'anneau de base $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/s]$.



## Le principe local-global en mathématiques constructives

En mathématiques constructives, on a mis au point une contrepartie (une interprétation algorithmique) des principes local-globals des mathématiques classiques sous forme de :
– théorèmes appelés **principes local-globals concrets** d'une part,
– et d'une méthode de décryptage des démonstrations classiques, appelée **machinerie locale-globale constructive de base**, ou encore *machinerie locale-globale à idéaux premiers* d'autre part.
Ceci permet de transformer les démonstrations classiques qui utilisent un principe local-global abstrait en des algorithmes qui fournissent la conclusion sous forme explicite.
Cette méthode est une extension raisonnée de l'évaluation dynamique à la D5.





**Définition 1.**

1. *Des éléments $s_1, \ldots, s_n$ sont dits* comaximaux *si $\langle 1\rangle = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$. Deux éléments comaximaux sont aussi appelés* étrangers.
2. *Des monoïdes $S_1, \ldots, S_n$ sont dits* comaximaux *si chaque fois que $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$, les $s_i$ sont comaximaux.*

2. Variante non pertinente : *après localisation en n'importe quel idéal maximal.*

3. *On dit que* les monoïdes $S_1, \ldots, S_n$ de l'anneau $\mathbf{A}$ recouvrent le monoïde $S$ *si* $S$ *est contenu dans le saturé de chaque* $S_i$ *et si un idéal de* $\mathbf{A}$ *qui coupe chacun des* $S_i$ *coupe toujours* $S$*, autrement dit si l'on a :*

$$\forall s_1 \in S_1 \ \ldots \ \forall s_n \in S_n \ \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \in S.$$

page 6

## Principes local-globals concrets

**Principe local-global concret 2.** (un exemple)
*Soient* $S_1, \ldots, S_n$ *des monoïdes comaximaux de* $\mathbf{A}$*,* $\varphi : M \to N$ *et* $\theta : N \to P$ *des applications linéaires, et* $x \in N$*. On note* $\mathbf{A}_i$ *pour* $\mathbf{A}_{S_i}$*,* $M_i$ *pour* $M_{S_i}$ *etc. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *Recollement concret des* solutions de systèmes linéaires *:*
   $x \in \operatorname{Im}\varphi$ ***ssi*** $x/1 \in \operatorname{Im}\varphi_i$ *pour* $i \in [\![1..n]\!]$.
2. *Recollement concret des* suites exactes *:*
   *La suite* $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\theta} P$ *est exacte* ***ssi***
   *les suites* $M_i \xrightarrow{\varphi_i} N_i \xrightarrow{\theta_i} P_i$ *sont exactes pour* $i \in [\![1..n]\!]$.
3. *Recollement concret de* facteurs directs *dans les modules de présentation finie. Ici* $M$ *est un sous-module de type fini d'un module de présentation finie* $N$ *:*
   $M$ *est facteur direct dans* $N$ ***ssi***
   $M_i$ *est facteur direct dans* $N_i$ *pour* $i \in [\![1..n]\!]$.

page 7

## Décryptage : introduction

Nous en venons maintenant à la partie « décryptage » de démonstrations classiques lorsqu'elles utilisent la localisation en un idéal premier arbitraire.
Notre but est d'arriver à un résultat permettant d'utiliser un principe local-global concret en lieu et place d'un principe local-global abstrait correspondant. La démonstration classique utilise le lemme de Krull. La contrepartie constructive est le lemme 4.
Les choses sont plus faciles à intuiter en introduisant la notion de **premier idéal**.

page 8

## Premiers idéaux

**Définition 3.** *Soient* $U$ *et* $I$ *des parties de l'anneau* $\mathbf{A}$*. Nous notons* $\mathcal{M}(U)$ *le monoïde engendré par* $U$*, et* $\mathcal{S}(I,U)$ *est le monoïde :*

$$\mathcal{S}(I,U) = \langle I \rangle_{\mathbf{A}} + \mathcal{M}(U).$$

*Le couple* $\mathfrak{q} = (I,U)$ *est appelé un* ***premier idéal****, et l'on note* $\mathbf{A}_{\mathfrak{q}}$ *pour* $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}$*. De la même manière on note :*

$$\mathcal{S}(a_1, \ldots, a_k; u_1, \ldots, u_\ell) = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle_{\mathbf{A}} + \mathcal{M}(u_1, \ldots, u_\ell).$$

*Nous disons qu'un tel monoïde* admet une description finie *et le couple* $(\{a_1, \ldots, a_k\}, \{u_1, \ldots, u_\ell\})$ *est appelé un* ***premier idéal fini****.*

Le premier idéal $(I,U)$ doit être vu comme *une approximation d'un idéal premier* $\mathfrak{p}$ contenant $I$ et ne contenant aucun élément de $U$. Un premier idéal fini est vu comme une approximation finie.
Si $0 \in \mathcal{S}(I,U)$ l'approximation ne fonctionne pas, on dit que le premier idéal *collapse*.

*Premiers idéaux, 2*

Le **radical de Jacobson** d'un anneau $\mathbf{A}$ est l'idéal :

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) := \Big\{ a \in \mathbf{A} \mid 1 + a\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\times \Big\}. \tag{5}$$

Le fait important à souligner est que, vue dans l'anneau localisé $\mathbf{A}_\mathfrak{q}$, la partie $U$ est contenue dans les unités, et la partie $I$ est contenue dans le radical de Jacobson.
C'est ce qui va permettre à notre décryptage constructif de fonctionner, car une fois que l'on aura forcé un élément à être dans le radical de Jacobson, il n'en sortira plus jamais.

Un défi de l'algèbre constructive est de ramener tout discours sur les idéaux premiers à un discours sur leurs approximations finies.



*Premiers idéaux, 3*

**Lemme 4.** (Lemme de Krull constructif, une version parmi d'autres)
*Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau,* $(I, U)$ *un premier idéal,* $S = \mathcal{S}(I, U)$*, et* $a \in \mathbf{A}$*.*
– *Les monoïdes* $\mathcal{S}(I; U, a)$ *et* $\mathcal{S}(I, a; U)$ *recouvrent le monoïde* $\mathcal{S}(I, U)$*.*
– *En particulier, les monoïdes* $\mathcal{M}(a) = \mathcal{S}(0; a)$ *et* $\mathcal{S}(a; 1) = 1 + a\mathbf{A}$ *sont comaximaux.*
– *De même, si* $S$*,* $S_1$*, …,* $S_n \subseteq \mathbf{A}$ *sont des monoïdes comaximaux, alors les monoïdes* $\mathcal{S}(I; U, a)$*,* $\mathcal{S}(I, a; U)$*,* $S_1$*, …,* $S_n$ *sont comaximaux.*

Le premier point remplace la disjonction utilisée en mathématiques classiques, lorsque l'on dit qu'un élément arbitraire $a$ de $\mathbf{A}$ est :
– ou bien un élément de l'idéal premier $\mathfrak{p}$,
– ou bien un élément du filtre complémentaire.



## Machinerie locale-globale à idéaux premiers

Un **anneau local** est un anneau $\mathbf{A}$ où est vérifié l'axiome suivant :

$$\forall x,\, y \in \mathbf{A} \qquad x + y \in \mathbf{A}^\times \implies (x \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } y \in \mathbf{A}^\times)\,. \tag{6}$$

Le **radical de Jacobson** d'un anneau $\mathbf{A}$ est l'idéal :

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) := \Big\{ a \in \mathbf{A} \mid 1 + a\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\times \Big\}. \tag{7}$$

Un **anneau local résiduellement discret** est un anneau local dont le corps résiduel $\mathbf{k} = \mathbf{A}/\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ est un corps discret. Un tel anneau peut être caractérisé par l'axiome suivant

$$\forall x \in \mathbf{A} \qquad x \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}) \tag{8}$$

*Machinerie locale-globale à idéaux premiers*

Un argument de type local-global typique fonctionne comme suit en mathématiques classiques.

— Lorsque l'anneau est local une certaine propriété P est vérifiée en vertu d'une démonstration assez concrète.
— Lorsque l'anneau n'est pas local, la même propriété est encore vraie (d'un point de vue classique) car il suffit de la vérifier localement. Ceci en vertu d'un principe local-global abstrait.

Nous examinons avec un peu d'attention la première démonstration. Nous voyons alors apparaître certains calculs qui sont faisables en vertu de l'axiome (8), axiome qui est appliqué à des éléments $x$ provenant de la preuve elle-même. Autrement dit, la preuve classique donnée dans le cas local nous fournit une preuve constructive sous l'hypothèse d'un anneau local résiduellement discret.



*Machinerie locale-globale à idéaux premiers*

Voici maintenant notre décryptage dynamique constructif.
Dans le cas d'un anneau arbitraire, nous répétons la même démonstration, en remplaçant chaque disjonction « $x \in \mathbf{A}^\times$ ou $x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ », par l'introduction des deux anneaux $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;x,U)}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,x;U)}$, où $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}$ est la localisation « courante » de l'anneau $\mathbf{A}$ de départ, à l'endroit de la preuve où l'on se trouve.
Lorsque la preuve initiale est ainsi déployée, on a construit à la fin un certain nombre (fini parce que la preuve est finie) de localisés $\mathbf{A}_{S_i}$, pour lesquels la propriété est vraie.
D'un point de vue constructif, nous obtenons ainsi le résultat « quasi global », c'est-à-dire après localisation en des monoïdes comaximaux, en vertu du lemme 4.
On fait alors appel à un principe local-global concret pour conclure.



*Machinerie locale-globale à idéaux premiers*

Le mieux est de traiter un exemple au tableau.
Dans l'ouvrage [ACMC], on a rarement besoin d'utiliser cette machinerie car les principes local-globals concrets suffisent souvent à résoudre directement les problèmes.
Néanmoins, cette machinerie devient indispensable dans le chapitre XVI pour décrypter des démonstrations sophistiquées :
– la démonstration par Quillen du théorème de Quillen-Suslin, la généralisation du résultat aux anneaux principaux,
– la généralisation non noethérienne aux domaines de Bezout de dimension 1 (due à Brewer&Costa),
– et enfin, nettement plus fort encore, la généralisation aux anneaux de Bezout arbitraires et aux anneaux arithmétiques due à Lequain&Simis.



## Machinerie locale-globale à idéaux maximaux

On trouve dans la littérature un certain nombre de preuves dans lesquelles l'auteur démontre un résultat en considérant « le passage au quotient par un idéal maximal arbitraire ».
Cela revient en général à appliquer le principe suivant : *un anneau qui n'a pas d'idéaux*

*maximaux est réduit à* 0.
Le raisonnement se présente comme une preuve par l'absurde. Si l'anneau n'était pas réduit à 0, il contiendrait un idéal maximal. En passant au quotient on travaille sur un corps, où l'on trouve une contraduction.
En se basant sur la méthode dynamique à la D5, on a mis au point une méthode générale pour décrypter ce type de démonstration classique et obtenir la conclusion sous forme d'un algorithme.



## Machinerie locale-globale à idéaux premiers minimaux

La situation est ici analogue à la précédente.
La démonstration classique est basée sur l'adage : *un anneau qui ne possède pas d'idéal premier minimal est réduit à* 0.
Un exemple spectaculaire de décryptage a été obtenu pour le théorème de Traverso-Swan sur les anneaux seminormaux.



## Conclusion

Tout ceci fait écho aux préconisations de **Poincaré**.
1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots.
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini.
3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.
dans : La logique de l'infini, 1909.



## Merci de votre attention