

Dimension de Krull explicite.

Application aux théorèmes de Kronecker, Bass, Serre et Forster.

Henri Lombardi et Claude Quitté. Notes de cours.

Juillet 2008, avec quelques changements de détails en 2012, pour se conformer aux conventions du livre publié chez Calvage & Mounet.

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ désignent des anneaux commutatifs. Si on ne précise pas un homomorphisme est un homomorphisme d'anneaux.

1 Dimension et bords de Krull

1.1 Idéaux et filtres

Dans cette section les démonstrations sont laissées en exercice.

Nous appelons monoïde une partie S qui contient 1 et qui est stable par multiplication. Nous n'interdisons pas a priori $0 \in S$.

Un monoïde S d'un anneau \mathbf{A} est dit *saturé* lorsqu'on a l'implication

$$\forall s, t \in \mathbf{A} \quad (st \in S \Rightarrow s \in S)$$

Un monoïde saturé est encore appelé un *filtre*. Si on sature un monoïde, on ne change pas la localisation. Deux monoïdes sont dits *équivalents* s'ils ont même saturé.

La notion de filtre est une notion duale de celle d'idéal, tout aussi importante.

Les idéaux sont les images réciproques de 0 par les homomorphismes, ils servent à passer au quotient, c'est-à-dire à annuler des éléments par force. Les filtres sont les images réciproque du groupe des unités par les homomorphismes, ils servent à localiser, c'est-à-dire à rendre des éléments inversibles par force.

Cette dualité est une forme de dualité entre l'addition et la multiplication. Ceci se voit bien sur les axiomes respectifs qui servent à définir les idéaux (resp. idéaux premiers) et les filtres (resp. filtres premiers) :

Idéal \mathfrak{J}	Filtre \mathfrak{F}
$\vdash 0 \in \mathfrak{J}$	$\vdash 1 \in \mathfrak{F}$
$x \in \mathfrak{J}, y \in \mathfrak{J} \vdash x + y \in \mathfrak{J}$	$x \in \mathfrak{F}, y \in \mathfrak{F} \vdash xy \in \mathfrak{F}$
$x \in \mathfrak{J} \vdash xy \in \mathfrak{J}$	$xy \in \mathfrak{F} \vdash x \in \mathfrak{F}$
premier	premier
$xy \in \mathfrak{J} \vdash x \in \mathfrak{J} \vee y \in \mathfrak{J}$	$x + y \in \mathfrak{F} \vdash x \in \mathfrak{F} \vee y \in \mathfrak{F}$

Un idéal est premier si et seulement si l'anneau quotient est sans diviseur de zéro. Un filtre est premier si et seulement si le localisé est un anneau local.

Supposons l'anneau \mathbf{A} non trivial. En mathématiques classiques un idéal (resp. un filtre) est premier si et seulement si son complémentaire est un filtre (resp. un idéal). En mathématiques constructives un idéal détachable $\neq \mathbf{A}$ (resp. un filtre détachable $\neq \mathbf{A}$) est premier si et seulement si son complémentaire est un filtre (resp. un idéal).

Notez que selon la définition ci-dessus, l'anneau tout entier est à la fois un idéal premier et un filtre premier. Cette convention peut paraître étrange, mais elle relève de l'idée qu'un anneau trivial est à la fois intègre et local.

Une bonne façon de comprendre la dualité est de traiter simultanément idéaux et filtres.

Pour ceci nous introduisons la notion de *couple saturé*. Un couple saturé dans \mathbf{A} est un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ où \mathfrak{a} est un idéal, \mathfrak{f} est un filtre, avec :

$$(as \in \mathfrak{a}, s \in \mathfrak{f}) \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad (a + s \in \mathfrak{f}, a \in \mathfrak{a}) \Rightarrow s \in \mathfrak{f}$$

Récapitulons les axiomes pour les couples saturés (notez que la dernière condition se réécrit $\mathfrak{J} + \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$).

$$\begin{array}{ll} \vdash 0 \in \mathfrak{J} & \vdash 1 \in \mathfrak{F} \\ x \in \mathfrak{J}, y \in \mathfrak{J} \vdash x + y \in \mathfrak{J} & x \in \mathfrak{F}, y \in \mathfrak{F} \vdash xy \in \mathfrak{F} \\ x \in \mathfrak{J} \vdash xy \in \mathfrak{J} & xy \in \mathfrak{F} \vdash x \in \mathfrak{F} \\ xy \in \mathfrak{J}, y \in \mathfrak{F} \vdash x \in \mathfrak{J} & x + y \in \mathfrak{F}, y \in \mathfrak{J} \vdash x \in \mathfrak{F} \end{array}$$

Fait 1.1 *Pour tout homomorphisme $\psi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, le couple $(\text{Ker } \psi, \psi^{-1}(\mathbf{B}^\times))$ est un couple saturé.*

Réciproquement :

Fait 1.2 *Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ un couple saturé, $\theta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ l'application canonique.*

1. $\theta(\mathfrak{f})$ est un filtre, et $\mathfrak{f} = \theta^{-1}(\theta(\mathfrak{f}))$.
2. Soit $\phi : \mathbf{A}/\mathfrak{a} \rightarrow (\theta(\mathfrak{f}))^{-1}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ l'application canonique, et $\pi = \phi \circ \theta$. Nous utiliserons la notation abrégée (abusiv) $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ pour $(\theta(\mathfrak{f}))^{-1}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$.
3. On a $\text{Ker } \pi = \mathfrak{a}$ et $\pi^{-1}((\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a})^\times) = \mathfrak{f}$.
4. Tout élément de $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ s'écrit $\pi(x)/\pi(s)$ avec $s \in \mathfrak{f}$. On a $\pi(x)/\pi(s) = \pi(x')/\pi(s')$ si et seulement si $xs' - x's \in \mathfrak{a}$.
5. $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ est local si et seulement si \mathfrak{f} est un filtre premier (c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$ est local).
6. $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ est sans diviseur de zéro si et seulement si \mathfrak{a} est un idéal premier (c'est-à-dire si et seulement si \mathbf{A}/\mathfrak{a} est sans diviseur de zéro).

Un idéal et un filtre sont dit *associés* lorsqu'ils forment un couple saturé.

Les deux théorèmes de factorisation usuels pour les idéaux et les filtres se généralisent en un seul théorème pour les couples saturés. C'est le suivant.

Théorème 1.3 (théorème de factorisation, 1)

Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ un couple saturé de \mathbf{A} , $\pi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ l'homomorphisme canonique et $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorphisme. Alors φ se factorise par $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ si et seulement si $\mathfrak{a} \subseteq \text{Ker } \varphi$ et $\varphi(\mathfrak{f}) \subseteq \mathbf{B}^\times$. Dans ce cas, la factorisation est unique.

Définition 1.4 *Si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ sont deux couples saturés de \mathbf{A} on dit que $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ raffine $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ et on écrit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \leq (\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ lorsque $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$.*

Le lemme suivant décrit le couple saturé « engendré » (au sens de la relation de raffinement) par un couple de parties de \mathbf{A} .

Lemme 1.5 *Considérons un couple (I, S) de parties de \mathbf{A} .*

1. Le couple saturé $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ engendré par (I, S) est obtenue en considérant tout d'abord l'idéal J et le filtre F engendrés par I et S . Ensuite on pose $\mathfrak{a} = \{x \in \mathbf{A} \mid \exists s \in F, xs \in J\}$ et $\mathfrak{f} = \{x \in \mathbf{A} \mid \exists b \in \mathbf{A}, bx \in J + F\}$.

2. Si $S = \emptyset$ le couple saturé engendré est $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$, où \mathfrak{a} est l'idéal engendré par I et \mathfrak{f} est le filtre obtenu en saturant le monoïde $1 + \mathfrak{a}$. Dans ce cas $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
3. Si $I = \emptyset$ le couple saturé engendré est $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$, où \mathfrak{f} est le filtre engendré par S et $\mathfrak{a} = \{x \in \mathbf{A} \mid \exists s \in \mathfrak{f}, xs = 0\} = \sum_{s \in \mathfrak{f}} (0 : s)$. Dans ce cas $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a} = \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$. Si en outre S est fini et s est le produit des éléments de S , $\mathfrak{a} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 : s^n) = (0 : s^\infty)$.

Corollaire 1.6 Les couples saturés de \mathbf{A} ont une structure de treillis distributif pour la relation de raffinement, avec :

- L'élément minimum est $(\{0\}, \mathbf{A}^\times)$ et l'élément maximum (\mathbf{A}, \mathbf{A}) .
- $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \vee (\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ est le couple saturé engendré par $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{f} \mathfrak{g})$.
- $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \wedge (\mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{f} \cap \mathfrak{g})$.

Le théorème de factorisation admet la variante suivante, qu'on peut lire comme la solution du problème universel « annuler I , inverser S ».

Théorème 1.7 (théorème de factorisation, 2)

Soit $I, S \subset \mathbf{A}$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ le couple saturé engendré par (I, S) et $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorphisme. Alors φ se factorise par $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ si et seulement si $\varphi(I) \subseteq \{0\}$ et $\varphi(S) \subseteq \mathbf{B}^\times$. Dans ce cas, la factorisation est unique.

Pour un couple saturé $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ on a les équivalences suivantes :

$$\mathfrak{a} = \mathbf{A} \iff 1 \in \mathfrak{a} \iff 0 \in \mathfrak{f} \iff \mathfrak{f} = \mathbf{A} \iff \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a} = \{0\}.$$

Un idéal \mathfrak{a} et un filtre \mathfrak{f} sont dit *incompatibles* lorsqu'il engendrent la paire (\mathbf{A}, \mathbf{A}) c'est-à-dire lorsque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{f} \neq \emptyset$ (en mathématiques constructives, il faut avoir explicitement un élément dans l'intersection). Lorsque $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{f} = \emptyset$, on dit que l'idéal et le filtre sont *compatibles*. Dans ce cas on peut à la fois annuler les éléments de \mathfrak{a} et rendre inversibles les éléments de \mathfrak{f} sans que l'anneau soit réduit à 0.

Proposition 1.8

1. Soit $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ un homomorphisme et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ un couple saturé de \mathbf{C} , alors $(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}), \varphi^{-1}(\mathfrak{g}))$ est un couple saturé de \mathbf{A} .
2. Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ un couple saturé de \mathbf{A} et $\pi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ l'application canonique. Alors :
 - (a) L'application $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g}) \mapsto (\pi^{-1}(\mathfrak{b}), \pi^{-1}(\mathfrak{g}))$ est une bijection croissante (pour les relations de raffinement) entre d'une part, les couples saturés de \mathbf{B} , et d'autre part, les couples saturés de \mathbf{A} qui raffinent $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$.
 - (b) Si $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ est un couple saturé de \mathbf{B} l'application canonique de $\mathbf{A}_{\pi^{-1}(\mathfrak{g})}/\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ vers $\mathbf{B}_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{b}$ est un isomorphisme.
 - (c) Dans cette bijection
 - l'idéal \mathfrak{b} est premier si et seulement si $\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ est premier,
 - tout idéal premier de \mathbf{A} compatible avec \mathfrak{f} est obtenu.
 - (d) Dans cette bijection
 - le filtre \mathfrak{g} est premier si et seulement si $\pi^{-1}(\mathfrak{g})$ est premier,
 - tout filtre premier de \mathbf{A} compatible avec \mathfrak{a} est obtenu.

On en déduit la comparaison suivante qui est instructive sur la dualité entre idéaux et filtres.

Fait 1.9 Soit \mathfrak{a} un idéal de \mathbf{A} et $\pi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ l'homomorphisme correspondant.

1. L'application $\mathfrak{b} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{b})$ est une bijection croissante entre idéaux de \mathbf{A}/\mathfrak{a} et idéaux de \mathbf{A} contenant \mathfrak{a} . Dans cette bijection les idéaux premiers correspondent aux idéaux premiers.
2. L'application $\mathfrak{g} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{g})$ est une bijection croissante entre filtres de \mathbf{A}/\mathfrak{a} et filtres \mathfrak{h} de \mathbf{A} vérifiant $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$, i.e. $\forall a \in \mathfrak{a} \forall x \in \mathbf{A} (a + x \in \mathfrak{h} \Rightarrow x \in \mathfrak{h})$.
3. Dans cette bijection les filtres premiers de \mathbf{A}/\mathfrak{a} correspondent exactement aux filtres premiers de \mathbf{A} compatibles avec \mathfrak{a} .

Fait 1.10 Soit \mathfrak{f} un filtre de \mathbf{A} et $\pi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$ l'homomorphisme correspondant.

1. L'application $\mathfrak{g} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{g})$ est une bijection croissante entre filtres de $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$ et filtres de \mathbf{A} contenant \mathfrak{f} . Dans cette bijection les filtres premiers correspondent aux filtres premiers.
2. L'application $\mathfrak{b} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{b})$ est une bijection croissante entre idéaux de $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$ et idéaux \mathfrak{c} de \mathbf{A} vérifiant : $\forall s \in \mathfrak{f} \forall x \in \mathbf{A} (sx \in \mathfrak{c} \Rightarrow x \in \mathfrak{c})$.
3. Dans cette bijection les idéaux premiers de $\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}$ correspondent exactement aux idéaux premiers de \mathbf{A} compatibles avec \mathfrak{f} .

1.2 Bords de Krull

Treillis de Zariski

Notation 1.11 Si \mathfrak{a} est un idéal de \mathbf{A} on note $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ le radical de \mathfrak{a} . Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ on notera $D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ pour $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.

On a donc $x \in D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ si et seulement si une puissance de x appartient à \mathfrak{a} .

Définition 1.12 On note $\text{Zar } \mathbf{A}$ l'ensemble des $D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$).

Cet ensemble est ordonné par la relation d'inclusion.

Rappelons qu'un ensemble ordonné est appelé un *treillis* lorsqu'il existe un élément maximum, un élément minimum, et que deux éléments arbitraires admettent un sup et un inf (en général, on note $a \vee b$ pour le sup et $a \wedge b$ pour le inf de a et b). Le treillis est appelé *distributif* lorsque les deux lois sup et inf sont distributives l'une par rapport à l'autre.

Fait 1.13 $\text{Zar } \mathbf{A}$ est un treillis distributif avec

$$D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \vee D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \quad D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \wedge D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$

On l'appelle le treillis de Zariski de l'anneau \mathbf{A} .

Dans les textes de mathématiques classiques (où on utilise librement des principes non constructifs tels que l'axiome du choix) on considère le *spectre de Zariski* $\text{Spec } \mathbf{A}$ de \mathbf{A} qui est l'ensemble des idéaux premiers de \mathbf{A} muni d'une topologie possédant pour base d'ouverts les $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbf{A} | a \notin \mathfrak{p}\}$. Si on note $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ pour $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1) \cup \dots \cup \mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_n)$, on obtient alors le résultat suivant :

Les ouverts quasi-compacts de $\text{Spec } \mathbf{A}$ sont exactement les $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$, l'application $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) \mapsto D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ est bien définie, c'est un isomorphisme de treillis distributifs.

Le spectre de Zariski est l'exemple paradigmatique d'*espace spectral*. Les espaces spectraux ont été introduits par Stone [15] en 1937. Ils peuvent être caractérisés comme les espaces topologiques pour lesquels la topologie admet comme base d'ouverts les ouverts quasi-compacts, qui par ailleurs forment un treillis distributif. Une application continue entre espaces spectraux est dite *spectrale* si l'image réciproque de tout ouvert quasi-compact est un ouvert quasi-compact. La catégorie des espaces spectraux et applications spectrales est antiéquivalente à la catégorie des treillis distributifs.

La notion de dimension de Krull peut être définie pour un espace spectral arbitraire X . Une manière intuitive d'appréhender cette notion de dimension est la suivante. La dimension peut être caractérisée par récurrence en disant que d'une part, la dimension -1 correspond à l'espace vide, d'autre part, un espace X est de dimension $\leq k$ (où $k \geq 0$) si et seulement si pour tout ouvert quasi-compact Y de X , le bord Z de Y dans X (Z est fermé donc c'est un sous espace spectral de X) est de dimension $\leq k - 1$.

Voyons par exemple comment on peut définir le bord de l'ouvert $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ dans $\text{Spec } \mathbf{A}$. Le bord est l'intersection de l'adhérence de $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ et de celle de son complémentaire, que nous notons $\mathfrak{V}(a)$. Comme $\mathfrak{V}(a)$ est fermé, il est égal à son adhérence. Quant à l'adhérence de $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ c'est l'intersection de tous les $\mathfrak{V}(x)$ qui contiennent $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$, c'est-à-dire tels que $\mathfrak{D}(x) \cap \mathfrak{D}(a) = \emptyset$. Comme $\mathfrak{D}(x) \cap \mathfrak{D}(a) = \mathfrak{D}(xa)$, et comme $\mathfrak{D}(y) = \emptyset$ si et seulement si y est nilpotent on obtient une approche heuristique de l'idéal bord de Krull de a , qui l'est l'idéal engendré par a d'une part (ce qui correspond à $\mathfrak{V}(a)$), et par tous les x tels que xa est nilpotent d'autre part (ce qui correspond à l'adhérence de $\mathfrak{D}(a)$).

Dimension de Krull

Nous noterons $\text{Kdim } \mathbf{A}$ la dimension de Krull de l'anneau \mathbf{A} c'est-à-dire la borne supérieure des longueurs ℓ de chaînes d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$. Puisque le complémentaire d'un idéal premier est un filtre premier la dimension de Krull est aussi le maximum des longueurs des chaînes strictement croissantes de filtres premiers. Un anneau est de dimension de Krull -1 si et seulement si il ne possède pas d'idéaux premiers, c'est-à-dire s'il est réduit à 0. Un anneau non nul est de dimension de Krull 0 si et seulement si tout idéal premier est maximal. Par exemple un corps ou un produit fini de corps est de dimension 0.

Définition 1.14 Soit \mathbf{A} un anneau commutatif et $x \in \mathbf{A}$.

- (1) Le bord supérieur de Krull de x dans \mathbf{A} est l'anneau quotient $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^x := \mathbf{A} / \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x)$ où

$$\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x) = \langle x \rangle + (\text{D}_{\mathbf{A}}(0) : x) \quad (1)$$

On dira aussi que $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x)$ est l'idéal bord de Krull de x .

- (2) Le bord inférieur de Krull de x dans \mathbf{A} est l'anneau localisé $\mathbf{A}_x^{\mathbf{K}} := \mathbf{A}_{\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x)}$ où $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x) = x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A})$. On dira aussi que le monoïde $x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A})$ est le monoïde bord de Krull de x .

Ainsi un élément arbitraire de $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x)$ s'écrit $ax + b$ avec bx nilpotent.

Remarque. La terminologie *bord de Krull* est justifiée par le cas géométrique suivant. Si l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{K}[V]$ est l'anneau des fonctions rationnelles sur une variété affine V , un élément $f \in \mathbf{A}$ représente une fonction sur V dont les zéros forment une sous variété affine W . Alors $\mathbf{A} / \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(f))$, qui est l'anneau réduit associé à $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^f$, est l'anneau $\mathbf{K}[W']$, où W' désigne le bord de W dans V . Le fait de prendre le bord oblige la dimension à descendre d'au moins une unité, que V soit irréductible ou non, que f soit nul, inversible, ou n'importe quoi. Cela tient à ce que *le bord du plein est vide*.

Le théorème suivant (qu'on trouve dans [5]) donne une caractérisation *inductive* élémentaire de la dimension de Krull (à partir de la dimension -1 qui caractérise l'anneau trivial). Il fournit aussi une bonne signification intuitive pour cette dimension.

Théorème 1.15 *Pour un anneau commutatif \mathbf{A} et un entier $\ell \geq 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. La dimension de Krull de \mathbf{A} est $\leq \ell$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{A}$ la dimension de Krull de \mathbf{A}_K^x est $\leq \ell - 1$.
3. Pour tout $x \in \mathbf{A}$ la dimension de Krull de \mathbf{A}_x^K est $\leq \ell - 1$.

Démonstration.

Montrons d'abord l'équivalence des points 1 et 2. Rappelons que les idéaux premiers de $S^{-1}\mathbf{A}$ sont de la forme $S^{-1}\mathfrak{p}$ où \mathfrak{p} est un idéal premier de \mathbf{A} qui ne coupe pas S (fait 1.10). L'équivalence résulte alors des deux affirmations suivantes.

(a) Soit $x \in \mathbf{A}$, si \mathfrak{m} est un idéal maximal de \mathbf{A} il coupe toujours $\mathcal{S}_\mathbf{A}^K(x)$. En effet si $x \in \mathfrak{m}$ c'est clair et sinon, x est inversible modulo \mathfrak{m} ce qui signifie que $1 + x\mathbf{A}$ coupe \mathfrak{m} .

(b) Si \mathfrak{m} est un idéal maximal de \mathbf{A} , et si $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ où \mathfrak{p} est un idéal premier contenu dans \mathfrak{m} , alors $\mathfrak{p} \cap \mathcal{S}_\mathbf{A}^K(x) = \emptyset$: en effet si $x(1 + xy) \in \mathfrak{p}$ alors, puisque $x \notin \mathfrak{p}$ on a $1 + xy \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, ce qui donne la contradiction $1 \in \mathfrak{m}$ (puisque $x \in \mathfrak{m}$).

Ainsi, si $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ est une chaîne avec \mathfrak{p}_ℓ maximal, elle est raccourcie d'au moins son dernier terme lorsqu'on localise en n'importe quel $\mathcal{S}_\mathbf{A}^K(x)$, et elle n'est raccourcie que de son dernier terme si $x \in \mathfrak{p}_\ell \setminus \mathfrak{p}_{\ell-1}$.

L'équivalence des points 1 et 3 se démontre de manière duale, en remplaçant les idéaux premiers par les filtres premiers. On rappelle d'abord que les filtres premiers de \mathbf{A}/\mathfrak{J} sont de la forme S modulo \mathfrak{J} , où S est un filtre premier de \mathbf{A} qui ne coupe pas \mathfrak{J} (fait 1.9). Il suffit alors de démontrer les deux affirmations duales de (a) et (b) qui sont les suivantes :

(a') Soit $x \in \mathbf{A}$, si S est un filtre maximal de \mathbf{A} il coupe toujours $\mathcal{J}_\mathbf{A}^K(x)$. En effet si $x \in S$ c'est clair et sinon, puisque S est maximal $Sx^\mathbb{N}$ contient 0, ce qui signifie qu'il y a un entier n et un élément s de S tels que $sx^n = 0$. Alors $(sx)^n = 0$ et $s \in (\sqrt{0} : x) \subset \mathcal{J}_\mathbf{A}^K(x)$.

(b') Si S est un filtre maximal de \mathbf{A} , et si $x \in S \setminus S'$ où $S' \subset S$ est un filtre premier, alors $S' \cap \mathcal{J}_\mathbf{A}^K(x) = \emptyset$. En effet si $ax + b \in S'$ avec $(bx)^n = 0$ alors, puisque $x \notin S'$ on a $ax \notin S'$ et, vu que S' est premier, $b \in S' \subset S$, mais comme $x \in S$, $(bx)^n = 0 \in S$ ce qui est absurde. \square

En outre le théorème 1.15 redonne la caractérisation élémentaire de cette dimension en terme d'identités algébriques comme dans [2, 14] :

Corollaire 1.16 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

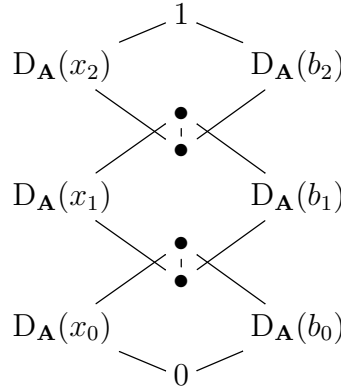
1. La dimension de Krull de \mathbf{A} est $\leq \ell$
2. Pour tous $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$ il existe $b_0, \dots, b_\ell \in \mathbf{A}$ tels que

$$\left. \begin{array}{l} D_{\mathbf{A}}(b_0x_0) = D_{\mathbf{A}}(0) \\ D_{\mathbf{A}}(b_1x_1) \leq D_{\mathbf{A}}(b_0, x_0) \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ D_{\mathbf{A}}(b_\ell x_\ell) \leq D_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{A}}(1) = D_{\mathbf{A}}(b_\ell, x_\ell) \end{array} \right\} \quad (2)$$

3. Pour tous $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$ il existe $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{A}$ et $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_0^{m_0} (x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell} (1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0 \quad (3)$$

Par exemple pour $k = 2$ le point 2. correspond au dessin suivant dans Zar \mathbf{A} .



Démonstration.

Montrons l'équivalence de 1. et 3. Utilisons par exemple pour 1. la caractérisation via les localisés \mathbf{A}_x^K . L'équivalence pour la dimension 0 est claire. Supposons la chose établie pour la dimension $\leq \ell$. On voit alors que $S^{-1}\mathbf{A}$ est de dimension $\leq \ell$ si et seulement si pour tous $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$ il existe $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{A}$, $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ et $s \in S$ tels que

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(s + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Il reste donc à remplacer s par un élément arbitraire de la forme $x_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}(1 + a_{\ell+1}x_{\ell+1})$.

Il est recommandé de faire aussi la preuve de 1. \Rightarrow 3. en utilisant la caractérisation via les quotients \mathbf{A}_K^x .

On a 3. \Rightarrow 2. en prenant : $b_\ell = 1 + a_\ell x_\ell$, et $b_{k-1} = x_k^{m_k} b_k + a_{k-1} x_{k-1}$, pour $k = \ell, \dots, 1$.

On a 2. \Rightarrow 1. par récurrence en utilisant la caractérisation via les quotients \mathbf{A}_K^x . L'implication pour la dimension 0 est claire. Supposons la chose établie pour la dimension $< \ell$. Supposons la propriété 2. et montrons que pour tout x_0 la dimension de $\mathbf{B} = \mathbf{A}_K^{x_0}$ est $< \ell$. Par hypothèse de récurrence il suffit de trouver, pour tous x_1, \dots, x_ℓ des éléments b_1, \dots, b_ℓ tels que

$$\left. \begin{array}{l} D_{\mathbf{B}}(b_1 x_1) = D_{\mathbf{B}}(0) \\ \vdots \\ D_{\mathbf{B}}(b_\ell x_\ell) \leq D_{\mathbf{B}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{B}}(1) = D_{\mathbf{B}}(b_\ell, x_\ell) \end{array} \right\}$$

Or par hypothèse on a des éléments b_0, \dots, b_ℓ tels que

$$\left. \begin{array}{l} D_{\mathbf{A}}(b_0 x_0) = D_{\mathbf{A}}(0) \\ D_{\mathbf{A}}(b_1 x_1) \leq D_{\mathbf{A}}(b_0, x_0) \\ \vdots \\ D_{\mathbf{A}}(b_\ell x_\ell) \leq D_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{A}}(1) = D_{\mathbf{A}}(b_\ell, x_\ell) \end{array} \right\}$$

et les inégalités avec $D_{\mathbf{A}}$ impliquent les mêmes avec $D_{\mathbf{B}}$. La deuxième inégalité signifie que $(b_1 x_1)^m = b_0 y_0 + x_0 z_0$ (pour un certain m) et la première nous dit que $b_0 x_0$ est nilpotent. A fortiori $b_0 y_0 x_0$ est nilpotent donc $b_0 y_0 + x_0 z_0 \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^K(x_0)$ et $b_1 x_1$ est nilpotent dans \mathbf{B} .

On peut aussi montrer directement 2. \Rightarrow 3. par un calcul un peu fastidieux. □

En particulier un anneau est (Krull-)zéro-dimensionnel (i.e. $\text{Kdim } \mathbf{A} \leq 0$) si et seulement si pour tout x il existe a tel que $x(1 - ax)$ est nilpotent.

Remarque. Le système d'inégalités (2) dans le point 2. du corollaire précédent établit une relation intéressante et symétrique entre les deux suites (b_0, \dots, b_ℓ) et (x_0, \dots, x_ℓ) .

Lorsque $\ell = 0$, cela signifie $D_{\mathbf{A}}(b_0) \wedge D_{\mathbf{A}}(x_0) = 0$ et $D_{\mathbf{A}}(b_0) \vee D_{\mathbf{A}}(x_0) = 1$, c'est-à-dire que les deux éléments $D_{\mathbf{A}}(b_0)$ et $D_{\mathbf{A}}(x_0)$ sont compléments l'un de l'autre dans le treillis Zar \mathbf{A} . Dans $\text{Spec } \mathbf{A}$ cela signifie que les ouverts de base correspondants sont complémentaires. Nous introduisons donc la terminologie suivante : lorsque deux suites (b_0, \dots, b_ℓ) et (x_0, \dots, x_ℓ) vérifient les inégalités (2) nous dirons qu'elles sont *complémentaires*. Enfin une suite qui possède une suite complémentaire sera dite *singulière*.

Remarque. On peut illustrer le corollaire 1.16 ci-dessus en introduisant « l'idéal bord de Krull itéré ». Pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$, considérons $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{x_1})_{\mathbf{K}}^{x_2}$, $((\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{x_1})_{\mathbf{K}}^{x_2})_{\mathbf{K}}^{x_3}$, etc... les anneaux bords supérieurs successifs, et notons $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x_1, \dots, x_\ell)$ le noyau de la projection canonique $\mathbf{A} \rightarrow (\dots(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{x_1})_{\mathbf{K}}^{x_2})_{\mathbf{K}}^{x_\ell}$. Alors on a $y \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x_0, \dots, x_\ell)$ si et seulement si $\exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$ et $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \dots (x_\ell^{m_\ell}(y + a_\ell x_\ell) + \dots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Et la dimension de Krull est $\leq \ell$ si et seulement si pour tous $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$ on a $1 \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathbf{K}}(x_0, \dots, x_\ell)$.

Un premier résultat important dans la théorie de la dimension de Krull est la dimension des anneaux de polynômes sur un *corps discret* : terminologie des mathématiques constructives pour désigner un corps dans lequel on dispose d'un test d'égalité.

Proposition 1.17 *Si \mathbf{K} est un corps discret, la dimension de Krull de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_\ell]$ est égale à ℓ .*

Nous établissons d'abord le résultat suivant.

Proposition 1.18 *Soit \mathbf{K} un corps discret, \mathbf{A} une \mathbf{K} -algèbre, et $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$ algébriquement dépendants sur \mathbf{K} . La suite (x_1, \dots, x_ℓ) est singulière.*

Démonstration.

Soit $Q(x_1, \dots, x_\ell) = 0$ une relation de dépendance algébrique sur \mathbf{K} . Mettons un ordre lexicographique sur les monômes non nuls $\alpha_{p_1, \dots, p_\ell} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_\ell^{p_\ell}$ de Q , en accord avec les "mots" $p_1 p_2 \dots p_\ell$. Nous pouvons supposer le coefficient du plus petit monôme non nul égal à 1 (ici on utilise l'hypothèse que le corps est discret, car on suppose qu'on peut déterminer pour chaque $\alpha_{p_1, \dots, p_\ell}$ s'il est nul ou inversible). Soit $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_\ell^{m_\ell}$ ce monôme. En suivant l'ordre lexicographique, nous voyons que nous pouvons écrire Q sous la forme

$$\begin{aligned} Q &= x_1^{m_1} \dots x_\ell^{m_\ell} + x_1^{m_1} \dots x_\ell^{1+m_\ell} R_\ell + x_1^{m_1} \dots x_{\ell-1}^{1+m_{\ell-1}} R_{\ell-1} \\ &\quad + \dots + x_1^{m_1} x_2^{1+m_2} R_2 + x_1^{1+m_1} R_1 \end{aligned}$$

où $R_j \in \mathbf{K}[x_k ; k \geq j]$. Alors $Q = 0$ est l'égalité voulue. \square

Preuve de la proposition 1.17

Nous notons d'abord que la suite (X_1, \dots, X_ℓ) est non singulière : dans (3) avec $x_i = X_i$ le membre de gauche est non nul (considérer le coefficient de $X_1^{m_1} X_2^{m_2} \dots X_\ell^{m_\ell}$).

Pour prouver que la dimension de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_\ell]$ est $\leq \ell$ il suffit, vu la proposition 1.18, de montrer que $\ell + 1$ éléments $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_\ell]$ sont toujours algébriquement dépendants sur \mathbf{K} . Voici une preuve élémentaire de ce résultat classique. Soient $y_1, \dots, y_{\ell+1}$ ces éléments, et d une borne sur leurs degrés. Pour un entier $k \geq 0$ considérons la liste L_k de tous les $y_1^{\delta_1} \dots y_{\ell+1}^{\delta_{\ell+1}}$ tels que $\delta = \sum_{i=1}^{\ell+1} \delta_i \leq k$. Le cardinal de L_k égale $\binom{k+\ell+1}{k}$. Ceci est un polynôme de degré $\ell + 1$ en k . Les éléments de L_k vivent dans l'espace vectoriel des éléments de $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_\ell]$ de degré $\leq k d$,

qui a pour dimension $\binom{d+k+\ell}{d+k}$. Ceci est un polynome de degré ℓ en k . Donc pour k assez grand, le cardinal de L_k est plus grand que la dimension de l'espace vectoriel où ses éléments vivent, et il y a une relation de dépendance linéaire entre les éléments de L_k . Ceci fournit une relation de dépendance algébrique entre les y_i 's. \square

On peut aussi traiter de cette façon la dimension de Krull des anneaux géométriques (les \mathbf{K} -algèbres de présentation finie). Donc les théorèmes des sections 2 et 3 ont un contenu algorithmique clair pour ces anneaux (comme pour tout anneau où l'on est capable d'expliciter la dimension de Krull au sens du corollaire 1.16).

Remarque. On a aussi des algorithmes pour les résultats suivants (en prenant la dimension de Krull au sens du corollaire 1.16) :

- Si \mathbf{B} est un quotient ou un localisé de \mathbf{A} , alors $\text{Kdim } \mathbf{B} \leq \text{Kdim } \mathbf{A}$.
- Si $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille finie d'idéaux de \mathbf{A} et $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$, alors $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i)$.
- Si $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille finie de monoïdes comaximaux de \mathbf{A} alors $\text{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{A}_{S_i})$.

Rappelons aussi que, en mathématiques classiques, $\text{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_{\mathfrak{m}} \text{Kdim}(\mathbf{A}_{\mathfrak{m}})$, où \mathfrak{m} parcourt tous les idéaux maximaux (mais il est difficile de concevoir un algorithme correspondant à ce résultat).

2 Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass (versions non noethériennes de Heitmann)

2.1 Le théorème de Kronecker

Ce théorème a d'abord été démontré par Kronecker [12] sous la forme suivante : une variété algébrique dans \mathbb{C}^n peut toujours être définie par $n + 1$ équations.

Il a été étendu au cas des anneaux noethériens (par van der Waerden, dans [17]) sous la forme suivante : dans un anneau noethérien de dimension de Krull n , tout idéal a même radical qu'un idéal engendré par au plus $n + 1$ éléments.

La version de Kronecker a été améliorée par divers auteurs dans [16, 9] qui ont montré que n équations suffisent en général. Une preuve constructive de ce dernier théorème est dans [6]. Par ailleurs on ne sait toujours pas si toute courbe dans l'espace complexe de dimension 3 est ou non intersection de deux surfaces.

Heitmann [11] a enfin généralisé la version van der Waerden au cas non noethérien.

La preuve élémentaire qui suit est dans [1].

Le lemme suivant, bien que terriblement anodin, est une clef essentielle.

Lemme 2.1 *Pour $u, v \in \mathbf{A}$ on a*

$$D_{\mathbf{A}}(u, v) = D_{\mathbf{A}}(u + v, uv) = D_{\mathbf{A}}(u + v) \vee D_{\mathbf{A}}(uv)$$

En particulier si $uv \in D_{\mathbf{A}}(0)$, alors $D_{\mathbf{A}}(u, v) = D_{\mathbf{A}}(u + v)$.

Démonstration.

On a évidemment $\langle u + v, uv \rangle \subseteq \langle u, v \rangle$ donc $D_{\mathbf{A}}(u + v, uv) \subseteq D_{\mathbf{A}}(u, v)$. Par ailleurs $u^2 = (u + v)u - uv \in \langle u + v, uv \rangle$ donc $u \in D_{\mathbf{A}}(u + v, uv)$. \square

Rappelons que deux suites qui vérifient les inégalités (2) dans le corollaire 1.16 sont dites complémentaires.

Lemme 2.2 *Soit $n \geq 1$. Si (b_1, \dots, b_n) et (x_1, \dots, x_n) sont deux suites complémentaires dans \mathbf{A} alors pour tout $a \in \mathbf{A}$ on a :*

$$D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n),$$

c'est-à-dire encore : $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$.

Démonstration.

On les inégalités

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}}(b_1 x_1) &= D_{\mathbf{A}}(0) \\ D_{\mathbf{A}}(b_2 x_2) &\leq D_{\mathbf{A}}(b_1, x_1) \\ &\vdots \\ D_{\mathbf{A}}(b_{\ell} x_{\ell}) &\leq D_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{A}}(1) &= D_{\mathbf{A}}(b_{\ell}, x_{\ell}) \end{aligned}$$

On en déduit celles-ci

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}}(ax_1 b_1) &= D_{\mathbf{A}}(0) \\ D_{\mathbf{A}}(ax_2 b_2) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_1, b_1) \\ &\vdots \\ D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell} b_{\ell}) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1}, b_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{A}}(a) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell}, b_{\ell}) \end{aligned}$$

On a donc d'après le lemme 2.1

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}}(a) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell} + b_{\ell}) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell} b_{\ell}) \\ D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell} b_{\ell}) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1} + b_{\ell-1}) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1} b_{\ell-1}) \\ &\vdots \\ D_{\mathbf{A}}(ax_2 b_2) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_2 + b_2) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_2 b_2) \\ D_{\mathbf{A}}(ax_2 b_2) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_1 b_1) = D_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1) \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}}(a) &\leq D_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_2 + b_2) \vee \dots \vee D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1} + b_{\ell-1}) \vee D_{\mathbf{A}}(ax_{\ell} + b_{\ell}) \\ &= D_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1, ax_2 + b_2, \dots, ax_{\ell} + b_{\ell}). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.3 (de Kronecker, avec la dimension de Krull, sans noethérianité)

Soit $n \geq 0$. Si $\text{Kdim } \mathbf{A} < n$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$ alors il existe x_1, \dots, x_n tels que pour tout $a \in \mathbf{A}$ $D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$.

En conséquence, dans un anneau de dimension de Krull $\leq n$, tout idéal de type fini a même radical qu'un idéal engendré par au plus $n + 1$ éléments.

Démonstration.

Le premier point est clair d'après le lemme 2.2 et le corollaire 1.16 (et si $n = 0$ l'anneau est trivial et $D_{\mathbf{A}}(a) = D_{\mathbf{A}}(\emptyset)$).

La deuxième affirmation en découle car il suffit d'itérer le processus. En fait, si $\text{Kdim } \mathbf{A} \leq n$ et $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_{n+r})$ ($r \geq 2$) on obtient en fin de compte $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(b_1 + c_1, \dots, b_{n+1} + c_{n+1})$ avec les $c_i \in \langle b_{n+2}, \dots, b_{n+r} \rangle$. □

Remarque. Pour le cas $n = 1$ la preuve donnée ci-dessus dit ceci. Puisque $\text{Kdim } \mathbf{A} \leq 0$ il existe x_1 tel que $b_1 x_1 \in D_{\mathbf{A}}(0)$ et $1 \in D_{\mathbf{A}}(b_1, x_1)$. A fortiori $b_1 a x_1 \in D_{\mathbf{A}}(0)$ et $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$. Le lemme 2.1 nous dit que $D_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$, donc $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$.

2.2 Le théorème « stable range » de Bass

Le théorème suivant est dû à Bass dans le cas noëthérien avec la dimension de Krull. La version non noëthérienne avec une dimension (inférieure à la dimension de Krull) qu'il a introduite dans [11] est due à Heitmann.

Nous donnons tout d'abord la version non noëthérienne avec la dimension de Krull. Nous donnerons ensuite une version à la Heitmann [11], légèrement plus forte que dans [11], et, surtout, constructive.

Théorème 2.4 (de Bass, avec la dimension de Krull, sans noëthérianité)

Soit $n \geq 0$. Si $\text{Kdim } \mathbf{A} < n$, pour tous $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$, il existe x_1, \dots, x_n tels qu'on ait l'implication suivante

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad (1 \in \langle a, b_1, \dots, b_n \rangle \Rightarrow 1 \in \langle b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n \rangle).$$

Démonstration.

Cela résulte directement du premier point dans le théorème 2.3. \square

Nous introduisons maintenant la notion de dimension de Heitmann d'un anneau commutatif, calquée sur la définition inductive de la dimension de Krull.

Notation 2.5 Si \mathfrak{a} est un idéal de \mathbf{A} on note $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ son radical de Jacobson. Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ on notera $J_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ pour $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$. En particulier $J_{\mathbf{A}}(0) = \text{Rad } \mathbf{A}$.

On a donc $x \in J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ si et seulement si pour tout $y \in \mathbf{A}$, $1 + xy$ est inversible modulo \mathfrak{a} .

Définition 2.6 On note $\text{Heit } \mathbf{A}$ l'ensemble des $J_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$.

Lemme 2.7

1. Pour un idéal arbitraire \mathfrak{a} on a $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = J_{\mathbf{A}}(D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}))$. En conséquence $\text{Heit } \mathbf{A}$ est un treillis distributif quotient de $\text{Zar } \mathbf{A}$.
2. Pour $u, v \in \mathbf{A}$ on a

$$J_{\mathbf{A}}(u, v) = J_{\mathbf{A}}(u + v, uv) = J_{\mathbf{A}}(u + v) \vee J_{\mathbf{A}}(uv)$$

En particulier si $uv \in J_{\mathbf{A}}(0)$, alors $J_{\mathbf{A}}(u, v) = J_{\mathbf{A}}(u + v)$.

Démonstration.

On a $\mathfrak{a} \subseteq D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \subseteq J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ donc $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = J_{\mathbf{A}}(D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}))$. L'égalité $D_{\mathbf{A}}(u, v) = D_{\mathbf{A}}(u + v, uv)$ (lemme 2.1) implique alors $J_{\mathbf{A}}(u, v) = J_{\mathbf{A}}(u + v, uv)$. \square

On peut montrer (voir [4]) que la $J\text{dim}$ définie par Heitmann dans [11] est la dimension de l'espace spectral correspondant au treillis distributif $\text{Heit } \mathbf{A}$.

Définition 2.8 Pour $x \in \mathbf{A}$ le bord de Heitmann de x dans \mathbf{A} est l'anneau quotient $\mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\text{H}}(x)$ avec

$$\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\text{H}}(x) := \langle x \rangle + (J_{\mathbf{A}}(0) : x)$$

qui est aussi appelé l'idéal bord de Heitmann de x dans \mathbf{A} . On notera aussi \mathbf{A}_{H}^x pour $\mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\text{H}}(x)$.

Définition 2.9 La dimension de Heitmann de \mathbf{A} est définie de manière inductive comme suit :

- $\text{Hdim } \mathbf{A} = -1$ si et seulement si $1_{\mathbf{A}} = 0_{\mathbf{A}}$.

– Pour $\ell \geq 0$, $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq \ell$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{A}$, $\text{Hdim}(\mathbf{A}_H^x) \leq \ell - 1$.

Cette dimension a été introduite dans [3] (voir aussi [4]). Elle est a priori inférieure à celle définie par Heitmann dans [11] (la Jdim).

Dans le cas d'un anneau noëtherien la Hdim , la Jdim de Heitmann et la dimension du spectre maximal qui intervient dans les théorèmes de Serre et de Swan [18] sont les mêmes (voir [4]).

Fait 2.10

1. La dimension de Heitmann ne peut que diminuer par passage à un anneau quotient.
2. La dimension de Heitmann est toujours inférieure ou égale à la dimension de Krull.
3. Plus précisément $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq \text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathbf{J}_\mathbf{A}(0))$.
4. Enfin $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq 0$ si et seulement si $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathbf{J}_\mathbf{A}(0)) \leq 0$.

Démonstration.

La preuve du point 1 est par récurrence en remarquant que pour tout $x \in \mathbf{A}$, $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})_H^x$ est un quotient de \mathbf{A}_H^x . La preuve du point 2 est par récurrence (en utilisant le point 1) en remarquant que \mathbf{A}_H^x est un quotient de \mathbf{A}_K^x . Pour les points 3 et 4 on pose $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{J}_\mathbf{A}(0)$. On a alors $\mathbf{J}_\mathbf{B}(0) = \langle 0 \rangle$ et on vérifie que $\mathbf{A}_H^x \simeq \mathbf{B}_H^{\bar{x}} = \mathbf{B}_K^{\bar{x}}$ pour tout $x \in \mathbf{A}$. \square

En particulier la dimension de Heitmann d'un anneau local est nulle (du point de vue constructif il faut préciser que le corps résiduel doit être *discret*, c'est-à-dire qu'on doit avoir un test d'égalité à 0 dans ce corps).

Théorème 2.11 (de Bass, avec la dimension de Heitmann, sans noëthérianité)

Soit $n \geq 0$. Si $\text{Hdim } \mathbf{A} < n$ et $1 \in \langle a, b_1, \dots, b_n \rangle$ alors il existe x_1, \dots, x_n tels que $1 \in \langle b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n \rangle$.

Démonstration.

La même preuve donnerait le théorème 2.4 en remplaçant le bord de Heitmann par le bord de Krull.

On remarque que $1 \in \langle L \rangle$ équivaut à $1 \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(L)$ pour toute liste L . On raisonne par récurrence sur n . Lorsque $n = 0$ l'anneau est trivial et $\mathbf{J}_\mathbf{A}(1) = \mathbf{J}_\mathbf{A}(\emptyset)$.

Supposons $n \geq 1$. Soit $\mathfrak{j} = \mathcal{J}_\mathbf{A}^H(b_n)$ l'idéal bord de Heitmann de b_n . Puisque \mathbf{A}/\mathfrak{j} est de dimension de Heitmann $\leq n - 2$ l'hypothèse de récurrence nous donne $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$ tels que

$$1 \in \langle b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a \rangle \quad \text{dans } \mathbf{A}/\mathfrak{j}. \quad (4)$$

Notons L pour $b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a$. Un élément arbitraire de $\mathfrak{j} = \mathcal{J}_\mathbf{A}^H(b_n)$ s'écrit $b_n y + x$ avec $x b_n \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(0)$. L'appartenance (4) signifie donc qu'il existe x_n tel que

$$x_n b_n \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(0) \quad \text{et} \quad 1 \in \langle L, b_n, x_n \rangle. \quad (5)$$

A fortiori

$$1 \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n, x_n) = \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n) \vee \mathbf{J}_\mathbf{A}(x_n). \quad (6)$$

Notons que par hypothèse $1 \in \langle a, b_1, \dots, b_n \rangle = \langle L, b_n, a \rangle$. Donc

$$1 \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n, a) = \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n) \vee \mathbf{J}_\mathbf{A}(a) \quad (7)$$

Enfin (6) et (7) donnent par distributivité

$$1 \in \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n) \vee \mathbf{J}_\mathbf{A}(x_n a) = \mathbf{J}_\mathbf{A}(L, b_n, x_n a)$$

Puisque $b_n x_n a \in J_{\mathbf{A}}(0)$ le lemme 2.7 nous dit que $J_{\mathbf{A}}(b_n, x_n a) = J_{\mathbf{A}}(b_n + x_n a)$, et donc que

$$1 \in J_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a) = J_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a),$$

ce qui était le but recherché. □

On peut également démontrer la version améliorée suivante du théorème de Kronecker (voir [4], et [11, Heitmann] où le théorème est obtenu avec la Jdim à la place de la Hdim).

Théorème 2.12 (de Kronecker, avec la dimension de Heitmann, sans noéthérianité)

Soit $n \geq 0$. Si $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) < n$ et $a, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$ alors il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$ tels que $D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$.

En conséquence, si $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a_i^{-1}]) < n$ pour $i = 1, \dots, r$ alors il existe $y_1, \dots, y_n \in \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ tels que $D_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + y_1, \dots, b_n + y_n)$.

Remarque. Dans le cas d'un anneau local noéthérien \mathbf{A} , l'idéal maximal est radicalement engendré par $n = \text{Kdim } \mathbf{A}$ éléments, mais pas moins. Ceci montre que parmi n « générateurs radicaux » du maximal, il n'y en a aucun vérifiant $\text{Hdim}(\mathbf{A}[x^{-1}]) < n - 1$. Par ailleurs $\text{Hdim}(\mathbf{A}) = 0$ puisque \mathbf{A} est local.

Rappelons qu'un vecteur L de \mathbf{A}^m est dit *unimodulaire* lorsque ses coordonnées engendrent l'idéal $\langle 1 \rangle$, c'est-à-dire encore lorsque $D_{\mathbf{A}}(L) = 1$.

Ce qui finit cette section est classique et peut être trouvé par exemple dans [13].

Corollaire 2.13 Soit $n \geq 0$. Si $\text{Hdim } \mathbf{A} < n$ et $V \in \mathbf{A}^{n+1}$ est unimodulaire, il peut être transformé en le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$ par des manipulations élémentaires.

Démonstration.

Posons $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, avec $1 \in \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$. On applique le théorème 2.11 avec $a = v_0$, on obtient x_1, \dots, x_n tels que $1 \in \langle v_1 + x_1 v_0, \dots, v_n + x_n v_0 \rangle$. Le vecteur V peut être transformé par manipulations élémentaires en le vecteur $V' = (v_0, v_1 + x_1 v_0, \dots, v_n + x_n v_0) = (v_0, v'_1, \dots, v'_n)$ et on a des y_i tels que $\sum_{i=1}^n y_i v'_i = 1$. Par manipulations élémentaires on peut donc transformer V' en $V'' = (1, v'_1, \dots, v'_n)$ puis en $(1, 0, \dots, 0)$. □

Corollaire 2.14 Si $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq n$ tout \mathbf{A} -module M stablement libre de rang $\geq n + 1$ est libre.

Démonstration.

Si $M \oplus \mathbf{A}^r \simeq \mathbf{A}^{p+r}$, (avec $p \geq n + 1$ et $r > 0$), M est isomorphe au noyau d'une application linéaire surjective $\varphi_0 = \varphi : \mathbf{A}^{p+r} \rightarrow \mathbf{A}^r$. Posons $m = p + r$. Puisque φ est surjective, il existe $\psi : \mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{A}^m$ telle que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbf{A}^r}$. Si $F_0 = F$ et H sont les matrices de φ et ψ (pour les bases canoniques) on a $FH = I_r$ et les lignes de F sont unimodulaires. On a $M \simeq \text{Ker } F$. D'après le corollaire 2.13 il existe une matrice inversible $A \in \mathbf{A}^{m \times m}$ (produit de matrices élémentaires) telle que $FA = G$ admet le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$ pour premier vecteur ligne :

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & & & \\ \vdots & & F_1 & \\ c_{r-1} & & & \end{bmatrix}$$

De sorte que $M \simeq \text{Ker } F_0 \simeq \text{Ker } G \simeq \text{Ker } F_1$. F_1 est la matrice d'une application linéaire $\varphi_1 : \mathbf{A}^{m-1} \rightarrow \mathbf{A}^{r-1}$.

On peut donc faire une preuve par récurrence sur r pour montrer que $M \simeq \mathbf{A}^p$. D'un point de vue algorithmique cela revient à continuer le processus qui a remplacé F_0 par F_1 jusqu'à obtenir F_r , qui sera la matrice (vide) de l'application nulle $\mathbf{A}^p \rightarrow \mathbf{A}^0$ dont le noyau est bien isomorphe à \mathbf{A}^p . □

Remarque. Si $\varphi : \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{A}^r$ est une application linéaire surjective, il existe $\psi : \mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{A}^m$ telle que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{\mathbf{A}^r}$. Alors $\pi = \psi \circ \varphi : \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{A}^m$ est une projection. Si on pose $M = \text{Ker } \pi = \text{Ker } \varphi$ on a $M \oplus \text{Im } \pi = \mathbf{A}^m$ et puisque $\text{Im } \pi \simeq \text{Im } \varphi = \mathbf{A}^r$, le module M est stablement libre, isomorphe à $\text{Im}(\text{Id}_{\mathbf{A}^m} - \pi)$. Ainsi les modules stablement libres sont exactement les modules isomorphes aux noyaux de matrices surjectives.

3 Le splitting off de Serre, le théorème de Forster-Swan et le théorème de simplification de Bass

Dans cette section les versions « sans hypothèses noethériennes » avec la dimension de Krull de la plupart des grands théorèmes (en particulier de Serre et de Forster) sont dues à Heitmann [11]. Dans cet article il donne en plus des variantes des théorèmes de Swan et Serre, avec une dimension un peu compliquée définie à partir de la Jdim.

Ici nous donnons les preuves avec la Hdim (meilleure que la Jdim, et surtout plus simple à utiliser) et sans hypothèse noethérienne. Ces théorèmes semblent donc parachever le travail de Heitmann. Les preuves constructives élémentaires que l'on trouve ici sont dans [4]. Elles améliorent la présentation et certains résultats de [3] et sont inspirées de [7].

3.1 Manipulations élémentaires de colonnes

Lemme 3.1 Soient $L, L_1, \dots, L_k \in \mathbf{A}^m$ et $b_1, \dots, b_k \in A$. Si $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$ et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_k) \vee D_{\mathbf{A}}(L)$$

alors il existe $x_1, \dots, x_k \in a\mathbf{A}$ tels que

$$1 = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_k + ax_k) \vee D_{\mathbf{A}}(L + x_1L_1 + \dots + x_kL_k)$$

Démonstration.

La preuve est par induction sur k . Pour $k = 0$, c'est clair. Si $k > 0$, soit $\mathfrak{j} = \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\text{H}}(b_k)$ l'idéal bord de Heitmann b_k . On a $b_k \in \mathfrak{j}$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{j}) < k - 1$, donc par induction, on peut trouver y_1, \dots, y_{k-1} tels que

$$1 = D(b_1 + a^2y_1, \dots, b_{k-1} + a^2y_{k-1}) \vee (L + ay_1L_1 + \dots + ay_{k-1}L_{k-1}) \quad \text{dans } \mathbf{A}/\mathfrak{j} \quad (\alpha)$$

Posons $L' = L + ay_1L_1 + \dots + ay_{k-1}L_{k-1}$, $X = (b_1 + a^2y_1, \dots, b_{k-1} + a^2y_{k-1})$ et remarquons que $D_{\mathbf{A}}(L', a) = D_{\mathbf{A}}(L, a)$ et $D_{\mathbf{A}}(X, a) = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_{k-1})$. L'égalité (α) signifie qu'il existe y_k tel que $b_k y_k \in J_{\mathbf{A}}(0)$ et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L') \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) \quad (\beta)$$

On a

$$D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L' + ay_kL_k) \vee D_{\mathbf{A}}(a^2) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_k, L) = 1 \quad (\gamma)$$

et, d'après (β) ,

$$D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L' + ay_kL_k) \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L') \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = 1 \quad (\delta)$$

(γ) et (δ) impliquent

$$D_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_kL_k, b_k, a^2y_k) = 1 = J_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_kL_k, b_k, a^2y_k) \quad (\eta)$$

et d'après le lemme 2.1 puisque $b_k a^2 y_k \in J_{\mathbf{A}}(0)$

$$1 = J_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_k L_k, b_k + a^2 y_k)$$

c'est-à-dire

$$1 \in \langle b_1 + a^2 y_1, \dots, b_{k-1} + a^2 y_{k-1}, b_k + a^2 y_k, L + ay_1 L_1 + \dots + ay_{k-1} L_{k-1} + ay_k L_k \rangle.$$

□

Remarques.

- 1) Lorsqu'on remplace la dimension de Heitmann par celle de Krull, le lemme précédent admet une version « uniforme » dans laquelle les x_i ne dépendent pas de a (comme dans le lemme 2.2).
- 2) Le lemme ci-dessus peut être vu comme une variante raffinée du théorème 2.11. En fait dans la suite, nous utilisons ce lemme uniquement avec l'hypothèse renforcée comme suit : Si $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$ et $1 = D_{\mathbf{A}}(a, L) \dots$

On en déduit le corollaire suivant (qui simplifie l'argument dans [3] et a été suggéré par Lionel Ducos [7]).

Corollaire 3.2 *Supposons que C, C_1, \dots, C_k sont des vecteurs dans \mathbf{A}^m et ν est un mineur d'ordre k de $[C_1 \dots C_k]$. Si $1 = D_{\mathbf{A}}(\nu) \vee D_{\mathbf{A}}(C)$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$ alors il existe $x_1, \dots, x_k \in A$ tels que $1 = D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_k C_k)$.*

Démonstration.

On prend $a = \nu$ et b_i le mineur obtenu en remplaçant C_i par C dans C_1, \dots, C_k . On applique le lemme 3.1. On remarque alors que $b_i + ax_i$ est aussi le mineur obtenu en remplaçant C_i par $C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$ dans C_1, \dots, C_n de sorte que $b_i + ax_i \in D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n)$ et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n) \vee D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n)$$

implique que $D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n) = 1$. □

Nous fixons les notations suivantes :

Notation 3.3 Soit F une matrice dans $\mathbf{A}^{n \times p}$ avec pour colonnes C_0, C_1, \dots, C_p , et G la matrice ayant pour colonnes C_1, C_2, \dots, C_p . Soit $\mathcal{D}_k(F)$ l'idéal déterminantiel d'ordre k de F (l'idéal engendré par les mineurs ν d'ordre k de F).

Lemme 3.4 *Si $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \mathcal{D}_k(G) = 1$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$ alors il existe t_1, \dots, t_p tels que $C + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p$ est unimodulaire.*

Démonstration.

Comme $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \mathcal{D}_k(G) = 1$, on a une famille ν_1, \dots, ν_p de mineurs de G d'ordre k tels que $1 = D_{\mathbf{A}}(C) \vee \bigvee_i D_{\mathbf{A}}(\nu_i)$. On applique alors le corollaire 3.2 pour avoir $D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(\nu_k) = 1$ dans \mathbf{A}/J_k avec $J_k = \bigvee_{i>k} D_{\mathbf{A}}(\nu_i)$ jusqu'à ce que nous obtenions $D_{\mathbf{A}}(C) = 1$ dans \mathbf{A} . □

Théorème 3.5 *Fixons $k \leq p$. Supposons que la dimension de Heitmann de \mathbf{A} est $< k$ et $\mathcal{D}_k(F) = 1$. Alors il existe t_1, \dots, t_p tels que $1 = D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p)$.*

Démonstration.

Cela résulte directement du lemme 3.4. □

3.2 Le théorème « splitting off » de Serre, version non noethérienne

On déduit directement du théorème 3.5 la version suivante « améliorée » du Splitting-off de Serre.

Théorème 3.6 (théorème de Serre, version dimension de Heitmann)

Soit M un \mathbf{A} -module projectif de rang $\geq k$ sur un anneau \mathbf{A} tel que $\text{Hdim}\mathbf{A} < k$. Alors $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$ pour un certain N .

Démonstration.

On suppose sans perte de généralité que M est l'image d'une matrice de projection F . L'hypothèse que M est de rang $\geq k$ signifie que $\mathcal{D}_k(F) = \langle 1 \rangle$. Le théorème 3.5 nous donne dans l'image de F un vecteur unimodulaire $u = {}^t(u_1, \dots, u_\ell)$. On considère y_1, \dots, y_n qui vérifient $\sum_i y_i u_i = 1$. On va voir que $\mathbf{A}u$, qui est clairement un module libre de base u , est facteur direct dans M . Pour cela on considère la forme linéaire $\lambda : \mathbf{A}^\ell \rightarrow \mathbf{A}$ définie par ${}^t(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_i y_i x_i$, puis la restriction μ de λ à M . Soit $N = \text{Ker } \mu \subset M$. On a $N \cap \mathbf{A}u = 0$ car si $\mu(au) = 0$ alors $a = a\mu(u) = \mu(au) = 0$. On a $M = N + \mathbf{A}u$ car si $z \in M$ on peut écrire $z = \mu(z)u + z'$ avec $\mu(z') = \mu(z) - \mu(z)\mu(u) = 0$ donc $z' \in N$. \square

Remarque. Dans le fonctionnement de cette preuve, on voit qu'on aurait pu se contenter de supposer que M est un module image d'une matrice F telle que $\mathcal{D}_k(F) = 1$. Dans le cas noethérien le théorème est équivalent (en mathématiques classiques) au théorème classique qui utilise la dimension du spectre maximal. Dans le cas non noethérien Heitmann a donné la preuve pour la dimension de Krull d'une part et pour une dimension définie à partir de la Jdim d'autre part. Le théorème ci-dessus peut être considéré comme la vraie version non noethérienne du théorème de Serre. Il implique le même théorème formulé avec la Jdim , qui était conjecturé par Heitmann.

3.3 Le théorème de Forster-Swan, une version non noethérienne

Dans cette section, on déduit du théorème 3.5, comme dans [8, 11], une version « non noethérienne » du théorème de Forster-Swan.

Modules de présentation finie

Un module de *présentation finie* est un \mathbf{A} -module M donné par un nombre fini de générateurs et de relations. De manière équivalente, c'est un module M isomorphe au conoyau d'un homomorphisme

$$\gamma : \mathbf{A}^m \longrightarrow \mathbf{A}^q$$

La matrice $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$ de γ a pour colonnes les (coefficients des) relations entre les générateurs g_1, \dots, g_q (une relation $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_q g_q = 0$ est codée par le vecteur colonne ${}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, et les g_i sont les images de la base canonique de \mathbf{A}^q par la surjection canonique $\pi : \mathbf{A}^q \rightarrow M$). Une telle matrice s'appelle une *matrice de présentation du module M* . Cela se traduit par :

- $(g_1, \dots, g_q)G = 0$, et
- toute relation entre les g_i est une combinaison linéaire des colonnes de G , c'est-à-dire encore : si $(g_1, \dots, g_q)C = 0$ avec $C \in \mathbf{A}^{q \times 1}$ il existe $C' \in \mathbf{A}^{m \times 1}$ tel que $C = GC'$.

On constate qu'on ne change pas la structure de M lorsqu'on fait subir à la matrice de présentation G une des transformations suivantes :

1. ajout d'une colonne nulle, (ceci ne change pas le module des relations entre des générateurs fixés)

2. suppression d'une colonne nulle, sauf à aboutir à une matrice vide,
3. remplacement de G , de type $q \times m$, par G' de type $(q + 1) \times (m + 1)$ obtenue à partir de G en rajoutant une ligne nulle en dessous puis une colonne à droite avec 1 en position $(q + 1, m + 1)$, (ceci revient à rajouter un vecteur parmi les générateurs, en indiquant sa dépendance par rapport aux générateurs précédents) :

$$G \mapsto G' = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m} \\ C & G \end{bmatrix}$$

4. opération inverse de la précédente, sauf à aboutir à une matrice vide,
5. ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes, (ceci ne change pas le module des relations entre des générateurs fixés)
6. ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes, (par exemple si nous notons L_i la i -ème ligne, le remplacement de la ligne L_1 par la ligne $L_1 + \gamma L_2$ revient à remplacer le générateur g_2 par $g_2 - \gamma g_1$)
7. permutation de colonnes ou de lignes,
8. multiplication d'une colonne ou d'une ligne par un élément inversible (facultatif).

On peut voir sans difficulté que si G et H sont deux matrices de présentation d'un même module M , on peut passer de l'une à l'autre au moyen des transformations décrites ci-dessus. On rajoute les nouveaux générateurs un à un. Puis les relations entre les nouveaux générateurs peuvent être rajoutées car elles sont conséquences des relations entre les anciens générateurs et des relations qui définissent les nouveaux. Puis les anciens générateurs peuvent s'exprimer en fonction des nouveaux : ce sont des relations conséquences de celles qu'on a déjà. Ceci permet alors de supprimer un à un les anciens générateurs. Enfin on se débarrasse des relations inutiles entre les nouveaux générateurs

Lemme 3.7 *On considère un \mathbf{A} -module M de présentation finie avec une matrice de présentation $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$. Alors l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_{q-k}(G)$ (avec par convention $\mathcal{D}_m(G) = \mathbf{A}$ si $m \leq 0$) ne dépend pas du système générateur ni de la matrice de présentation choisies pour décrire M . En particulier si M peut être engendré par $k \leq q$ éléments. alors $\mathcal{D}_{q-k}(G)$ est égal à \mathbf{A} .*

Démonstration.

L'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_{q-k}(G)$ ne dépend que de M et k , et non pas de la matrice de présentation qu'on peut prendre pour M : cela tient à ce que les manipulations 1 à 8 décrites ci-dessus sur les matrices de présentation conservent toutes cet idéal. Si donc M est engendré par k éléments, il admet une matrice de présentation $F \in \mathbf{A}^{k \times p}$, donc aussi la matrice $F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{(k+1) \times (p+1)}$, et l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_1(F')$ est clairement égal à \mathbf{A} . \square

Remarque. L'idéal $\mathcal{D}_{q-k}(G)$ est appelé le k -ème idéal de Fitting du module M , et noté $\mathcal{F}_k(M)$.

Lemme 3.8 *On considère un \mathbf{A} -module M de présentation finie avec une matrice de présentation $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$. Supposons \mathbf{A} local. Soit un entier $k < q$. Alors le module M est engendré par k éléments si et seulement si la matrice G contient un mineur inversible d'ordre $q - k$. Cela équivaut aussi à $\mathcal{D}_{q-k}(G) = \mathbf{A}$.*

Démonstration.

La condition est suffisante même si l'anneau n'est pas local :

En permutant éventuellement les lignes et les colonnes on ramène le mineur inversible en haut à gauche. Puis en multipliant à droite (ou à gauche) par une matrice inversible on se ramène à la forme

$$G_1 = \begin{bmatrix} I_{q-k} & A \\ B & C \end{bmatrix}$$

puis par des manipulations élémentaires de lignes et de colonnes, on obtient

$$G_2 = \begin{bmatrix} I_{q-k} & 0_{q-k, m-q+k} \\ 0_{k, q-k} & G_3 \end{bmatrix}$$

Et G_3 est aussi une matrice de présentation de M .

Lorsque l'anneau est local la condition est nécessaire parce que si l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_{q-k}(G)$ est égal à \mathbf{A} un de ses générateurs (les mineurs d'ordre $q-k$) doit être inversible : dans un anneau local, si une somme d'éléments est inversible, l'un de ces éléments est inversible. \square

Lemme 3.9 *On considère un \mathbf{A} -module M de présentation finie avec une matrice de présentation $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$. Soit un entier $k < q$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'idéal déterminantiel d'ordre $q-k$ de G contient 1.*
2. *Après localisation en n'importe quel idéal premier, M est engendré par k éléments.*

Démonstration.

On remarque d'abord que si un module M admet une matrice de présentation G alors le module localisé M_S (où S est un filtre) admet la même matrice de présentation, vue comme une matrice à coefficients dans A_S . L'équivalence résulte alors du lemme 3.8 et du fait qu'un idéal de type fini contient 1 si et seulement si il contient 1 après localisation en n'importe quel idéal premier. \square

Le théorème de Forster-Swan

Voici maintenant une version du théorème de Forster-Swan [10, 18].

Théorème 3.10 (théorème de Swan, version dimension de Heitmann)

Si $\text{Hdim}(\mathbf{A}) \leq d$ et si M est un \mathbf{A} -module de présentation finie localement engendré par r éléments, alors M peut être engendré par $d+r$ éléments. Plus précisément si M est engendré par (y_1, \dots, y_p) avec $p = d+r+s$ on peut calculer z_1, \dots, z_{d+r} dans $\langle y_{d+r+1}, \dots, y_{d+r+s} \rangle$ tels que M soit engendré par $y_1 + z_1, \dots, y_{d+r} + z_{d+r}$.

Démonstration.

Soit m_0, m_1, \dots, m_p un système de générateurs de M et F une matrice de présentation de M correspondant à ce système générateur. Si $p \geq d+r$ nous avons $1 = \mathcal{D}_{d+1}(F)$ d'après le lemme 3.9. Notons L_0, \dots, L_p les lignes de F . Nous appliquons le théorème 3.5 à la matrice transposée de F . Nous obtenons t_1, \dots, t_p tels que la ligne $L_0 + t_1 L_1 + \dots + t_p L_p$ soit unimodulaire. Remplacer la ligne L_0 par la ligne $L_0 + t_1 L_1 + \dots + t_p L_p$ revient à remplacer (m_0, m_1, \dots, m_p) par $(m_0, m_1 - t_1 m_0, \dots, m_p - t_p m_0) = (m_0, m'_1, \dots, m'_p)$. Puisque la nouvelle ligne L_0 est unimodulaire, une combinaison linéaire convenable des colonnes est de la forme $\imath(1, y_1, \dots, y_p)$, cela signifie que $m_0 + y_1 m'_1 + \dots + y_p m'_p = 0$ dans M , et donc que m'_1, \dots, m'_p engendrent M . \square

3.4 Le théorème de Swan, forme sophistiquée

Un raffinement du théorème 3.5 est le résultat suivant.

Théorème 3.11 *Supposons que $1 \in \mathcal{D}_1(F)$ et que pour $k = 1, \dots, p$, l'anneau $\mathbf{A}/\mathcal{D}_{k+1}(F)$ est de dimension de Heitmann $< k$. Alors il existe t_1, \dots, t_p tels que le vecteur $C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p$ est unimodulaire.*

Démonstration.

On applique le lemme 3.4 successivement avec $\mathbf{A}/\mathcal{D}_2(F)$, $\mathbf{A}/\mathcal{D}_3(F)$, \dots □

Théorème 3.12 (théorème de Swan général, version dimension de Heitmann)

Soit M un module de type fini sur \mathbf{A} et \mathfrak{f}_k son idéal de Fitting d'ordre k . Si $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{f}_k) < m - k$ pour $k = 0, \dots, m$, alors M peut être engendré par m éléments.

Démonstration.

Si le module est de présentation finie il suffit d'appliquer le théorème 3.11 à la matrice transposée d'une matrice de présentation de M (de la même manière que pour le théorème 3.10).

Le raisonnement dans le cas général est un peu plus subtil. Notons h_1, \dots, h_q des générateurs de M et supposons $q > m$. Notons $h = (h_1, \dots, h_q)$. Toute relation entre les h_i peut être écrite comme un vecteur colonne $C \in \mathbf{A}^q$ qui vérifie $hC = 0$. L'idéal de Fitting \mathfrak{f}_{q-i} de M est l'idéal $\Delta_i = \mathcal{D}_i(F)$ engendré par les mineurs d'ordre i des matrices $F \in \mathbf{A}^{q \times n}$ qui vérifient $hF = 0$ (c'est-à-dire les matrices dont les colonnes sont des relations entre les h_i). Nous les appellerons des « matrices de relation ».

Comme $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{f}_0) = D_{\mathbf{A}}(\text{Ann}(M))$ et que nous pouvons remplacer \mathbf{A} par $\mathbf{A}/\text{Ann}(M)$, nous supposons sans perte de généralité que $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = D_{\mathbf{A}}(0)$.

Les hypothèses impliquent que $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_k) < k - 1$ pour $k = 1, \dots, q$ (ce sont les hypothèses lorsque $q = m + 1$).

On a donc $\Delta_1 = 1$, ce qui se constate sur une matrice de relations F . On peut alors appliquer le lemme 3.4 avec la matrice F , l'entier $k = 1$ et l'anneau \mathbf{A}/Δ_2 . Ceci nous donne une relation C telle que $D_{\mathbf{A}/\Delta_2}(C) = 1$, c'est-à-dire encore telle qu'il existe $a \in \Delta_2$ vérifiant $1 + a \in D_{\mathbf{A}}(C)$. Le fait que $a \in \Delta_2$ se constate sur une matrice de relations G et on considère la nouvelle matrice $F = (C|G)$. On a donc $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \Delta_2(G) = 1$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_3) < 2$. On peut alors appliquer le lemme 3.4 avec la nouvelle matrice F , l'entier $k = 2$ et l'anneau \mathbf{A}/Δ_3 . Ceci nous donne une relation C telle que $D_{\mathbf{A}/\Delta_3}(C) = 1$, et ainsi de suite.

On obtient en fin de compte une relation C telle que $D_{\mathbf{A}}(C) = 1$, puisque $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = 0$. Et $\text{Hdim} \mathbf{A} = \text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_q) < q - 1$. En conséquence le corollaire 2.13 du théorème stable range de Bass s'applique et nous pouvons transformer la colonne C en $(1, 0, \dots, 0)$ par des manipulations élémentaires, ce qui revient à remplacer le système générateur h par une autre système de q éléments dont le premier est nul, bref à réduire de 1 le nombre de générateurs. □

Remarque. Notons qu'il n'y a pas a priori de version « avec points » du théorème précédent car la Hdim n'est pas (à notre connaissance) la dimension de Krull d'un espace spectral. Pour obtenir une version avec points, nous devrions considérer la variante (conjecturée par Heitmann, et a priori plus faible) dans laquelle la Hdim est remplacée par la Jdim . On aurait alors sans doute une formulation classique utilisant les points du J -spectre de Heitmann.

3.5 Le théorème de simplification de Bass, avec la dimension de Heitmann, sans hypothèse nothérienne

Nous prouvons maintenant le théorème de simplification de Bass.

Dans le lemme suivant nous reprenons les notations 3.3.

Lemme 3.13 *Si $\Delta_k(G) = 1 = D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(a)$ et $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$ alors il existe t_1, \dots, t_p tels que $1 = D_{\mathbf{A}}(C + at_1C_1 + \dots + at_pC_p)$.*

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le lemme 3.4 aux vecteurs C, aC_1, \dots, aC_n (ce qui remplace G par aG). \square

Théorème 3.14 (théorème de simplification de Bass, version dimension de Heitmann)

Soit M un \mathbf{A} -module projectif de rang $\geq k$ sur un anneau \mathbf{A} tel que $\text{Hdim}\mathbf{A} < k$, et N, Q deux autres \mathbf{A} -modules projectifs de type fini. Alors $M \oplus Q \simeq N \oplus Q$ implique $M \simeq N$.

Démonstration.

Pour être complet, on redonne l'argument de [8]. On peut supposer que $Q = \mathbf{A}$ et que $N \subset \mathbf{A}^m$ est image d'une matrice idempotente. On a un isomorphisme $\phi : M \oplus \mathbf{A} \rightarrow N \oplus \mathbf{A} \subset \mathbf{A}^{m+1}$. Soit $(C, a) \in \mathbf{A}^{m+1}$ le vecteur $\phi(0, 1)$. Il nous faut construire un automorphisme de $N \oplus \mathbf{A}$ qui envoie (C, a) sur $(0, 1)$.

Soit $\alpha : M \oplus \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, $(U, x) \mapsto x$. La forme linéaire $\alpha \circ \phi^{-1}$ envoie (C, a) sur 1, d'où $D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(a) = 1$. Donc, par le lemme 3.13, il existe $C' \in N$ tel que $D_{\mathbf{A}}(C + aC') = 1$. On a donc une forme linéaire $\lambda : N \rightarrow \mathbf{A}$ vérifiant $\lambda(C + aC') = 1$ (obtenue comme restriction d'une forme linéaire sur \mathbf{A}^m). On a alors les trois automorphismes suivants de $N \oplus \mathbf{A}$ qui par composition réalisent le but fixé :

$$\begin{aligned} \psi_1 : (V, x) &\mapsto (V + xC', \lambda(xC - aV)) & , & & (C, a) &\mapsto (C + aC', 0) \\ \psi_2 : (V, x) &\mapsto (V, x + \lambda(V)) & , & & (C + aC', 0) &\mapsto (C + aC', 1) \\ \psi_3 : (V, x) &\mapsto (V - x(C + aC'), x) & , & & (C + aC', 1) &\mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

(on vérifie que ψ_1 est un automorphisme en remarquant que si $\psi_1(V, x) = (W, y)$ alors $x = y + a\lambda(W)$). \square

Remarques. Dans le fonctionnement de cette preuve, on voit qu'on aurait pu se contenter de supposer que N est un module image d'une matrice F telle que $\Delta_k(F) = 1$ et $M \oplus Q \simeq N \oplus Q$ pour un module projectif Q .

Notons aussi que les automorphismes ψ_i sont réalisés en pratique comme des automorphismes de \mathbf{A}^{n+1} qui fixent $N \oplus \mathbf{A}$. De manière plus générale tous les théorèmes d'algèbre commutative que nous avons démontrés se ramènent en fin de compte à des théorèmes concernant les matrices et leurs manipulations élémentaires.

Références

- [1] COQUAND T. *Sur un théorème de Kronecker concernant les variétés algébriques* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 291–294. [9](#)
- [2] COQUAND T., LOMBARDI H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings.* dans : Commutative ring theory and applications. Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 131. M. Dekker. (2002) 477–499. [6](#)
- [3] COQUAND T., LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Generating non noetherian modules constructively.* Manuscripta mathematica **115**, (2004), 513–520. [12](#), [14](#), [15](#)
- [4] COQUAND T., LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Dimension de Heitmann des treillis distributifs et des anneaux commutatifs.* Publications Mathématiques de Besançon, Théorie des Nombres (2003-2006). [11](#), [12](#), [13](#), [14](#)
- [5] COQUAND T., LOMBARDI H., ROY M.-F. *An elementary characterisation of Krull dimension.* From Sets and Types to Analysis and Topology : Towards Practicable Foundations for Constructive Mathematics (L. Crosilla, P. Schuster, eds.). Oxford University Press. (2005) 239–244. [6](#)

- [6] COQUAND T., LOMBARDI H., SCHUSTER P. *A nilregular element property*. Archiv der Mathematik **85** (2005), 49–54. [9](#)
- [7] DUCOS L. *Vecteurs unimodulaires et systèmes générateurs*. Journal of Algebra. Available online 7 October 2005. [14](#), [15](#)
- [8] EISENBUD D., EVANS E. G., JR. *Generating modules efficiently : theorems from algebraic K-theory*. J. Algebra **27** (1973), 278–305. [16](#), [20](#)
- [9] EISENBUD D., EVANS E. G., JR. *Every algebraic set in n -space is the intersection of n hypersurfaces*. Inventiones math. **19** (1973), 107–112. [9](#)
- [10] FORSTER O. *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Nötherschen Ring*. Math. Z. **84** (1964) 80–87. [18](#)
- [11] HEITMANN, R. *Generating non-Nötherian modules efficiently*. Michigan Math. **31** 2 (1984) 167–180. [9](#), [11](#), [12](#), [13](#), [14](#), [16](#)
- [12] KRONECKER L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. J. reine angew. Math. **92**, (1882) 1–123. Réimprimé dans *Leopold Kronecker's Werke*, II, 237–387. [9](#)
- [13] LAM T.Y. *Serre's conjecture*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. [13](#)
- [14] LOMBARDI H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique*. Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46. [6](#)
- [15] STONE M. H. *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*. Cas. Mat. Fys. **67**, (1937), 1–25. [5](#)
- [16] STORCH U. *Bemerkung zu einem Satz van M. Kneser*. Arch. Math. **23**, (1972), 403–404. [9](#)
- [17] VAN DER WAERDEN Review Zentralblatt für Math **24**, (1941) 276. [9](#)
- [18] SWAN R. G. *The Number of Generators of a Module*. Math. Z. **102** (1967), 318–322. [12](#), [18](#)

Table des matières

1	Dimension et bords de Krull	1
1.1	Idéaux et filtres	1
1.2	Bords de Krull	4
2	Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass	9
2.1	Le théorème de Kronecker	9
2.2	Le théorème « stable range » de Bass	11
3	Le splitting off de Serre et le théorème de Forster-Swan	14
3.1	Manipulations élémentaires de colonnes	14
3.2	Le « splitting off » de Serre	16
3.3	Le théorème de Forster-Swan, une version non noéthérienne	16
3.4	Le théorème de Swan, forme sophistiquée	19
3.5	Le théorème de simplification de Bass	19
	Références	20