Dimensión de Krull explícita.
Aplicación a los teoremas de Kronecker, Bass, Serre y Forster.

Notas de curso. Enero 2005. H. Lombardi, C. Quitté

1. Dimensión y frontera de Krull

Ideales y filtros

Sea S un monoide de $\mathbf{A}$. Si M es un $\mathbf{A}$-módulo el $\mathbf{A}_S$-módulo M_S se obtiene por extensión de escalares de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}_S$. En particular si M es con generación finita, con presentación finita o proyectivo con generación finita, es lo mismo para M_S.

Un monoide S en un anillo $\mathbf{A}$ se dice *saturado* cuando se tiene la implicación

$$\forall s, t \in \mathbf{A} \ \ (st \in S \ \Rightarrow \ s \in S)$$

Un monoide saturado también se llama un *filtro*. Si saturamos un monoide, no cambiamos la localización. Dos monoides son *equivalentes* si tienen mismo saturado.

La noción de filtro es una noción dual de la de ideal, igualmente importante. Los ideales sirven para pasar al cociente, es decir, para anular ciertos elementos a la fuerza. Los filtros sirven para localizar, es decir, para invertir ciertos elementos a la fuerza.

Un ideal es primo si y sólo si su complementario es un filtro. Un filtro cuyo complementario es un ideal se llama un *filtro primo*. Esta dualidad hace que los filtros primos tienden a desaparecer de la escena.

Todo ideal maximal es primo, y todo filtro maximal es primo: su complementario es un ideal primo minimal.

La dualidad entre ideales y filtros también es una dualidad entre adición y multiplicación. Esto se ve bien en los axiomas respectivos que sirven para definir los ideales (resp. ideales primos) y los filtros (resp. filtros primos):

Idéal	$\mathfrak{J}$		Filtro	$\mathfrak{F}$	
	$\vdash$	$0 \in \mathfrak{J}$		$\vdash$	$1 \in \mathfrak{F}$
$x \in \mathfrak{J},\, y \in \mathfrak{J}$	$\vdash$	$x + y \in \mathfrak{J}$	$x \in \mathfrak{F},\, y \in \mathfrak{F}$	$\vdash$	$xy \in \mathfrak{F}$
$x \in \mathfrak{J}$	$\vdash$	$xy \in \mathfrak{J}$	$xy \in \mathfrak{F}$	$\vdash$	$x \in \mathfrak{F}$
primo			primo		
$xy \in \mathfrak{J}$	$\vdash$	$x \in \mathfrak{J} \vee y \in \mathfrak{J}$	$x + y \in \mathfrak{F}$	$\vdash$	$x \in \mathfrak{F} \vee y \in \mathfrak{F}$
$1 \in \mathfrak{J}$	$\vdash$	Falso	$0 \in \mathfrak{F}$	$\vdash$	Falso

Retículo de Zariski

Definición 1 *Si* $\mathfrak{a}$ *es un ideal de* $\mathbf{A}$ *denotaremos* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ *el radical de* $\mathfrak{a}$. *Si* $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *denotaremos* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ *por* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
$\mathrm{Zar}\,\mathbf{A}$ *es el conjunto de los* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ *(*$n \in \mathbb{N}$ *y* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$*).*
Este conjunto es ordenado por la relación de inclusión y es un retículo distributivo con

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2) \end{array}$$

Lo llamaremos el retículo de Zariski del anillo $\mathbf{A}$.

Entonces $x \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ si y sólo si una potencia de x pertenecia a $\mathfrak{a}$.

Fronteras de Krull

Se denota $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}$ la dimensión de Krull del anillo $\mathbf{A}$, es decir, la cota superior de las longitudes ℓ de cadenas de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$. Puesto que el complementario de un ideal primo es un filtro primo la dimensión de Krull también es el máximo de las longitudes de las cadenas estrictamente crecientes de filtros primos.

Un anillo $\mathbf{A}$ es de dimensión de Krull -1 si no tiene ideales primos, es decir, $\mathbf{A} = 0$.

Un anillo no nulo es de dimensión de Krull cero si y sólo si todo ideal primo es maximal. Por ejemplo un cuerpo o un producto finito de cuerpos es de dimensión 0.

Definición 2 *Sea* $\mathbf{A}$ *un anillo conmutativo y* $x \in \mathbf{A}$*.*

(1) *La* frontera superior de Krull de x en $\mathbf{A}$ *es el anillo cociente* $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x} := \mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ *donde*

$$\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x) := \langle x\rangle + (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) : x) \tag{1}$$

Diremos que $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ *es* el ideal frontera de Krull de x.

(2) *La* frontera inferior de Krull de x en $\mathbf{A}$ *es el anillo localizado* $\mathbf{A}_{x}^{\mathrm{K}} := \mathbf{A}_{\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)}$ *donde* $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x) = x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A})$*. Diremos que el monoide* $x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A})$ *es* el monoide frontera de Krull de x.

Entonces un elemento arbitrario de $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ se escribe $ax + b$ con bx nilpotente.

La terminología *frontera de Krull* se justifica por el siguiente caso geométrico: Si $\mathbf{A} = \mathbf{K}[V]$ es el anillo de las funciones polinomiales sobre una variedad afín V, un elemento $f \in \mathbf{A}$ es una función sobre V cuyos ceros forman una subvariedad afín W. Entonces $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(f))$, el anillo reducido asociado a $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{f}$, es el anillo $\mathbf{K}[W']$, donde W' es la frontera de W en V. El hecho de tomar la frontera fuerza la dimensión a disminuir al menos una unidad, V irreducible o no, f nulo, invertible, o cualquier cosa. Es debido a que *la frontera del total es el vacío.*

El teorema siguiente (que está en [4]) da una caracterización *inductiva* elemental de la dimensión de Krull (a partir de la dimensión -1 que caracteriza el anillo trivial). Para esta dimensión tenemos una buena definición intuitiva.

Teorema 3 *Sea un anillo conmutativo* $\mathbf{A}$ *y un entero* $\ell \geq 0$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

1. *La dimensión de Krull de* $\mathbf{A}$ *es* $\leq \ell$*.*
2. *Para todo* $x \in \mathbf{A}$ *la dimensión de Krull de* $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x}$ *es* $\leq \ell - 1$*.*
3. *Para todo* $x \in \mathbf{A}$ *la dimensión de Krull de* $\mathbf{A}_{x}^{\mathrm{K}}$ *es* $\leq \ell - 1$*.*

Demostración.
Primero demostramos la equivalencia de los puntos 1 y 2. Recordemos que los ideales primos de $S^{-1}\mathbf{A}$ tienen la forma $S^{-1}\mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $\mathbf{A}$ que no intersecta S. La equivalencia resulta entonces de las dos siguientes afirmaciones.
(a) Sea $x \in \mathbf{A}$, un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$ siempre intersecta el filtro frontera $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$. En efecto si $x \in \mathfrak{m}$ está claro y si no, x es invertible módulo $\mathfrak{m}$, esto significa que $1 + x\mathbf{A}$ intersecta $\mathfrak{m}$.
(b) Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $\mathbf{A}$, y si $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$ donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo contenido en $\mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{p} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x) = \emptyset$: en efecto si $x(1 + xy) \in \mathfrak{p}$ entonces, puesto que $x \notin \mathfrak{p}$ tenemos $1 + xy \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, lo que da la contradicción $1 \in \mathfrak{m}$ (puesto que $x \in \mathfrak{m}$).
Así, si $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ es una cadena con $\mathfrak{p}_\ell$ maximal, se disminuye al menos su último término

cuando se localiza en $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$, y sólo se disminuye su último término si $x \in \mathfrak{p}_\ell \setminus \mathfrak{p}_{\ell-1}$.
La equivalencia de los puntos 1 y 3 se muestra de manera dual, reemplazando los ideales primos por los filtros primos. Primero note se que los filtros primos de $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$ tienen la forma $(S+\mathfrak{J})/\mathfrak{J}$, donde S es un filtro primo de $\mathbf{A}$ que no intersecta $\mathfrak{J}$. Es suficiente entonces demostrar las dos afirmaciones duales de (a) y (b) que son las siguientes:
(a') Sea $x \in \mathbf{A}$, si S es un filtro maximal de $\mathbf{A}$, S intersecta siempre el ideal frontera $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$. En efecto si $x \in S$ está claro y si no, puesto que S es maximal $Sx^{\mathbb{N}}$ contiene 0, esto significa que hay un entero n y un elemento s de S tales que $sx^n = 0$. Entonces $(sx)^n = 0$ y $s \in (\sqrt{0} : x) \subset \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$.
(b') Si S es un filtro maximal de $\mathbf{A}$, y si $x \in S \setminus S'$ donde $S' \subset S$ es un filtro primo, entonces $S' \cap \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x) = \emptyset$. En efecto si $ax + b \in S'$ con $(bx)^n = 0$ entonces, puesto que $x \notin S'$ tenemos $ax \notin S'$ y, visto que S' es primo, $b \in S' \subset S$, pero como $x \in S$, $(bx)^n = 0 \in S$, lo que es absurdo. □

Además el teorema 3 implica la caracterización elemental de esta dimensión con identidades algebraicas como en [2, 12]:

Corolario 4 *La dimensión de Krull de* $\mathbf{A}$ *es* $\leq \ell$ *si y sólo si para todos* $x_0, \ldots, x_\ell$ *existen* $a_0, \ldots, a_\ell \in \mathbf{A}$ *y* $m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0$$

Demostración.
Utilizamos por ejemplo la caracterización via los localizados $\mathbf{A}^{\mathrm{K}}_x$. La equivalencia por la dimensión 0 es obvia. Supongamos el resultado por la dimensión $\leq \ell$. Vemos entonces que $S^{-1}\mathbf{A}$ es de dimensión $\leq \ell$ si y sólo si para todos $x_0, \ldots, x_\ell \in \mathbf{A}$ existen $a_0, \ldots, a_\ell \in \mathbf{A}$, $m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ y $s \in S$ tales que

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(s + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Ahora reemplazamos s por un elemento arbitrario en $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_{\ell+1})$: $x_{\ell+1}^{m_{\ell+1}}(1 + a_{\ell+1}x_{\ell+1})$. □

En particular un anillo es cero dimensional (i.e. $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leq 0$) si y sólo si para todo x existe a tal que $x(1-ax)$ es nilpotente.

Señalemos que es facil demostrar que $\mathrm{Kdim}(\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]) = n$ en el sentido del corolario 4 cuando $\mathbf{K}$ es un cuerpo, o incluso un anillo cero dimensional (cf. [2]). También se puede obtener la dimensión de Krull de los anillos geométricos (las $\mathbf{K}$-álgebras con presentación finita). Entonces los teoremas de las secciones 2 y 3 tienen un contenido algorítmico claro en estos anillos (como en todo anillo donde seamos capaces de explicitar la dimensión de Krull en el sentido del corolario 4).

Nota. Tenemos algoritmos para los siguientes resultados (tomando la dimensión de Krull en el sentido del corolario 4):

- Si $\mathbf{B}$ es un cociente o un localizado de $\mathbf{A}$, entonces $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{B} \leq \mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}$.
- Si $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$ es una familia finita de ideales de $\mathbf{A}$ y $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$, entonces $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \sup_i \mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i)$.
- Si $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ es una familia finita de monoides comaximales de $\mathbf{A}$ entonces $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_i \mathrm{Kdim}(\mathbf{A}_{S_i})$.

Recordemos también que $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_{\mathfrak{m}} \mathrm{Kdim}(\mathbf{A}_{\mathfrak{m}})$, donde $\mathfrak{m}$ recorre todos los ideales maximales (pero es dificil imaginar un algoritmo correspondiente a este resultado).

Nota. Se puede ilustrar el corolario 4 de arriba introduciendo "el ideal frontera de Krull iterado". Para $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ consideramos $(\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x_1})_{\mathrm{K}}^{x_2}$, $((\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x_1})_{\mathrm{K}}^{x_2})_{\mathrm{K}}^{x_3}$, etc... los anillos fronteras superiores sucesivos, y $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}[x_1, \ldots, x_\ell]$ denota el núcleo de la proyección canónica $\mathbf{A} \to (\ldots(\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x_1})^{\cdots})_{\mathrm{K}}^{x_\ell}$. Entonces tenemos $y \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}[x_0, \ldots, x_\ell]$ si y sólo si $\exists a_0, \ldots a_\ell \in \mathbf{T}$ y $m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(y + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Y la dimensión de Krull es $\leq \ell$ si y sólo si para todos $x_0, \ldots, x_\ell \in \mathbf{A}$ tenemos $1 \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}[x_0, \ldots, x_\ell]$.

2. El teorema de Kronecker y el estable range de Bass (versiones no noetherianas de Heitmann)

2.1. El teorema de Kronecker

Este teorema fue primero demostrado por Kronecker [10] de la siguiente forma: una variedad algebraica en $\mathbb{C}^n$ puede siempre ser definida por $n+1$ ecuaciones.

Fue extendido al caso de los anillos noetherianos (por van der Waerden, en [14]) de la forma siguiente: en un anillo noetheriano de dimensión de Krull n, todo ideal a mismo radical que un ideal generado por como mucho $n+1$ elementos.

La versión de Kronecker fue mejorada por Storch y Eisenbud-Evans en [13, 7]. Demostraron que en general son suficientes n ecuaciones. Una demostración constructiva está en [5]. No sabemos hoy si toda curva en el espacio complejo de dimensión 3 es o no intersección de dos superficies.

Heitmann [9] ha generalizado finalmente la versión van der Waerden al caso no noetheriano.

La siguiente demostración elemental está en [1].

El siguiente lema, terriblemente anodino, es una llave esencial.

Lema 5 *Por $u, v, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ tenemos*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv) \;=\; \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(uv)$$

En particular si $uv \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$, entonces $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v)$.

Teorema 6 (de Kronecker, sin noetherianidad)
Sea un entero $n \geq 0$. Si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ y $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{A}$ entonces existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + a x_1, \ldots, b_n + a x_n).$$

Por tanto, en un anillo de dimensión de Krull $\leq n$, todo ideal finitamente generado tiene el mismo radical que un ideal generado por $n+1$ elementos.

Demostración.
Es claro que la primera afirmación implica la seconda porque es suficiente iterar el proceso. De hecho, si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leq n$ y $\mathfrak{J} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_{n+r})$ $(r \geq 2)$ se obtiene al fin de cuentas $\mathfrak{J} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + c_1, \ldots, b_{n+1} + c_{n+1})$ con los $c_i \in \langle b_{n+2}, \ldots, b_{n+r} \rangle$.
La demostración del primer punto es por inducción sobre n.
Cuando $n = 0$ el anillo es trivial y $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$.
Supongamos $n \geq 1$. Consideramos el ideal frontera de Krull de b_n $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(b_n)$. Puesto que $\mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(b_n)$

es de dimensión de Krull $\leq n-2$ la hipótesis de inducción nos da $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$ tales que $\mathrm{D}(a, b_1, \ldots, b_{n-1}) = \mathrm{D}(b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1} a)$ en $\mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(b_n)$. Esto significa que

$$a \in \mathrm{D}(b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1} a) \quad \text{en} \quad \mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(b_n)\,.$$

Sea $L = b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1} a$. Por definición de la frontera, la igualdad de arriba implica que existe x_n tal que

$$x_n b_n \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \quad \text{y} \quad a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n)$$

Además $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n)$ implica facilmente que

$$a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a).$$

Puesto que $b_n\, x_n\, a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ el lema 5 dice que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n, x_n a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n + x_n a)$, y por lo tanto que $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a)$, entonces

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a, a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

como queríamos. □

Nota. Para el caso $n = 1$ la demostración por inducción dada arriba dice, después de haberla limpiado: Puesto que $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leq 0$ existe x_1 tal que $b_1 x_1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ y $1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, x_1)$. A fortiori $b_1 a x_1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ y $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, a x_1)$. Entonces el lema 5 dice que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, a x_1) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + a x_1)$ y puesto que $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, a x_1)$, $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + a x_1)$.

2.2. El teorema “stable range” de Bass

El teorema siguiente es de Bass en el caso noetheriano con la dimensión de Krull. La versión no noetheriana con una nueva noción de dimensión (inferior a la dimensión de Krull) es de Heitmann.

Damos aquí la versión no noetheriana con la dimensión de Krull.

Teorema 7 (de Bass, con la dimensión de Krull, sin noetherianidad)
Sea $n \geq 0$. Si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ y $1 \in \langle a, b_1, \ldots, b_n \rangle$ entonces existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que $1 \in \langle b_1 + a x_1, \ldots, b_n + a x_n \rangle$.

Demostración.
Ésta es la primera afirmación del teorema de Krull cuando $\langle a, b_1, \ldots, b_n \rangle = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1)$. □

Recordamos que un vector L de $\mathbf{A}^m$ se llama *unimodular* cuando sus coordenadas generan el ideal $\langle 1 \rangle$, es decir, tambien cuando $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L) = 1$.

El fin de esta sección es un clásico y se encuentra por ejemplo en [11].

Corolario 8 *Sea $n \geq 0$. Si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ y $V \in \mathbf{A}^{n+1}$ es unimodular, entonces V puede ser transformado en el vector $(1, 0 \ldots, 0)$ por manipulaciones elementales.*

Demostración.
Sea $V = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, con $1 \in \langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$. Si aplicamos el teorema 7 con $a = v_0$, se obtiene $x_1, \ldots, x_n$ tales que $1 \in \langle v_1 + x_1 v_0, \ldots, v_n + x_n v_0 \rangle$. El vector V puede ser transformado por manipulaciones elementales en el vector $V' = (v_0, v_1 + x_1 v_0, \ldots, v_n + x_n v_0) = (v_0, v_1', \ldots, v_n')$ y tenemos y_i tales que $\sum_{i=1}^n y_i v_i' = 1$. Por manipulaciones elementales se puede transformar V' en $V'' = (1, v_1', \ldots, v_n')$ y después en $(1, 0, \ldots, 0)$. □

Corolario 9 *Un módulo M establemente libre de rango $\geq n+1$ sobre un anillo $\mathbf{A}$, cuya dimensión de Krull es $\leq n$, es libre.*

Demostración.
Si $M \oplus \mathbf{A}^r \simeq \mathbf{A}^{p+r}$, (con $p \geq n+1$ y $r > 0$), M es isomorfo al núcleo de una aplicación lineal suprayectiva $\varphi_0 = \varphi : \mathbf{A}^{p+r} \to \mathbf{A}^r$. Ponemos $m = p+r$. Puesto que φ es suprayectiva, existe $\psi : \mathbf{A}^r \to \mathbf{A}^m$ tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^r}$. Si $F_0 = F$ y H son las matrices de φ y ψ (respecto las bases canónicas) tenemos $FH = \mathrm{I}_r$ y les filas de F son unimodulares. Tenemos $M \simeq \operatorname{Ker} F$. Por el corolario 8 existe una matriz inversible $A \in \mathbf{A}^{m\times m}$ (producto de matrices elementales) tal que $FA = G$ admite el vector $(1, 0, \ldots, 0)$ como primer vector fila:

$$G := \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ c_1 & \\ \vdots & F_1 \\ c_{r-1} & \end{bmatrix}$$

De modo que $M \simeq \operatorname{Ker} F_0 \simeq \operatorname{Ker} G \simeq \operatorname{Ker} F_1$. F_1 es la matriz de una aplicación lineal $\varphi_1 : \mathbf{A}^{m-1} \to \mathbf{A}^{r-1}$.
Se puede entonces hacer una demostración por recurencia sobre r para ver que $M \simeq \mathbf{A}^p$. Desde un punto de vista algorítmico es lo mismo que continuar el proceso que ha reemplazado F_0 por F_1 hasta F_r, que sera la matriz (vacía) de la aplicación nula $\mathbf{A}^p \to \mathbf{A}^0$ cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbf{A}^p$. $\square$

Nota. Si $\varphi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^r$ es una aplicación lineal suprayectiva, existe $\psi : \mathbf{A}^r \to \mathbf{A}^m$ tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^r}$. Entonces $\pi = \psi \circ \varphi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^m$ es una proyección. Si $M = \operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker} \varphi$ tenemos $M \oplus \operatorname{Im} \pi = \mathbf{A}^m$ y puesto que $\operatorname{Im} \pi \simeq \operatorname{Im} \varphi = \mathbf{A}^r$, el módulo M es establemente libre, isomorfo a $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}^m} - \pi)$. Así los módulos establemente libres son exactamente los módulos isomorfos a los núcleos de matrices suprayectivas.

3. El splitting off de Serre y el teorema de Forster, à la Heitmann

En esta sección las versiones "sin hipótesis noetheriana" de grandes teoremas (en particular de Serre y de Forster) son debidas a Heitmann [9]. Las demostraciones elementales que damos aquí están en [3].

3.1. Manipulaciones elementales de columnas

Lema 10 *Si $a \in \mathbf{A}$, $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}) < n$ y $L \in \mathbf{A}^n$, existe $X \in \mathbf{A}^n$ tal que $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L - aX)$. Además podemos tomar $X = aY$ con $Y \in \mathbf{A}^n$.*

Demostración.
El primer punto es exactamente el primer punto del teorema de Kronecker. Por otra parte, el hecho de que podemos tomar X de la forma aY resulta de que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \ldots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a^2, b_1, \ldots, b_n)$. $\square$

Para $n = 1$ obtenemos: si $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}) \leq 0$ entonces para todo b se puede construir un x tal que $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b + xa)$.

Corolario 11 *Sea M una matriz en $\mathbf{A}^{n\times n}$ y δ su determinante. Si $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}) < n$ entonces para todo $C \in \mathbf{A}^n$ existe $X \in \mathbf{A}^n$ tal que $\delta \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(MX - C)$. Además podemos tomar X de la forma δY, $Y \in \mathbf{A}^n$.*

Demostración.
La demostración utiliza las formulas de Cramer. Sea $\widetilde{M}$ la adjunta de la matriz M, y $L = \widetilde{M}C$. Tenemos $\widetilde{M}(MX - C) = \delta X - L$ para toda columna $X \in \mathbf{A}^n$. Entonces el ideal generado por las coordenadas de $\delta X - L$ está contenido en el generado por las coordenadas de $MX - C$, y

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\delta X - L) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(MX - C).$$

Siguiendo el lema 10 podemos encontrar *un* $X \in \mathbf{A}^n$ tal que $\delta \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\delta X - L)$, y entonces $\delta \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(MX - C)$ como queríamos. □

Hasta el fin de esta sección se fija la siguiente notación:

Notación 12 Sea F una matriz en $\mathbf{A}^{n\times p}$ con columnas $C_0, C_1, \ldots, C_p$, y G la matriz con columnas $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Denotaremos $\Delta_k(F)$ el ideal determinantal de orden k de F (el ideal generado por los menores ν de orden k de F).

Teorema 13 *Fijemos $0 < k \leq p$. Supongamos que el anillo $\mathbf{A}$ es de dimensión de Krull $< k$. Entonces existen $t_1, \ldots, t_p$ tales que*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0, \Delta_k(F)) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p),$$

(i.e., $\Delta_k(F) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p)$ y $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p)$).

Demostración.
La inclusión $\Delta_k(F) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$ significa que para todo menor ν de orden k de F tenemos $\nu \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$. Sea $\Delta_k(G)$ el ideal determinantal de orden k de G. Nótese que si el menor ν hace intervenir la columna C_0 y las columnas C_{i_j} $(1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq p)$ entonces se puede reemplazar la columna C_0 por la columna $C_0' = C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p$ añadiendo tan sólo una combinación lineal de menores de orden k de G, de modo que $\nu \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0', \Delta_k(G))$. Como conclusión es suficiente obtener $\Delta_k(G) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$ para tener $\Delta_k(F) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$.
De hecho es suficiente poder obtener

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0, \nu_1) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$$

para *un* menor ν_1 de orden k de G, porque reemplazamos C_0 por C_0' en F (esto no cambia G) y podemos pasar a otro menor ν_2 de G por el cual obtendremos $t_1', \ldots, t_p'$ tales que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0, \nu_1, \nu_2) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0', \nu_2) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0' + t_1'C_1 + \ldots + t_p'C_p) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0'')$$

con $C_0'' = C_0 + t_1''C_1 + \ldots + t_p''C_p$ y así continuamente.
Para obtener

$$\nu \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p) \quad \text{y} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p)$$

para un menor ν de orden k de G utilizamos el corolario 11: construimos $t_1, \ldots, t_p \in \nu\mathbf{A}$ (con $t_i = 0$ en las columnas que no cuentan en el menor ν) tales que

$$\nu \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0').$$

Puesto que $t_1, \ldots, t_p$ son multiplos de ν se tiene $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\nu, C_0') = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0')$, como queríamos. □

Siguiendo la notación 12, obtenemos el siguiente corolario.

Teorema 14 *Supongamos que* $1 \in \Delta_1(F)$ *y que para todo* $k > 0$ *el anillo* $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$ *es de dimensión de Krull* $< k$. *Entonces existe* $t_1, \ldots, t_p$ *tales que el vector* $C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p$ *es unimodular.*
En particular si $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < k$ *y* $\Delta_k(F) = 1$, *existe un vector unimodular en el módulo imagen de* F.

Demostración.
Utilizando el teorema 13, definiamos una sucesion de vectores $C_0^k,\ k = 1, \ldots, p$ con $C_0^1 = C_0$. Por $k = 1, \ldots, p$, consideramos el anillo $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$. Construimos $C_0^{k+1} = C_0^k + u_1^kC_1 + \cdots + u_p^kC_p$ tal que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}_k}(C_0^k, \Delta_k(F)) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}_k}(C_0^{k+1})$. Esto significa que se tiene, en $\mathbf{A}$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0^k, \Delta_k(F)) \leq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0^{k+1}, \Delta_{k+1}(F)).$$

Entonces se tiene el resultado puesto que $\Delta_1(F) = 1$ y $\Delta_{p+1}(F) = 0$. □

Nota. La condición $1 \in \Delta_1(F)$ puede ser leida "$\mathbf{A}/\Delta_1(F)$ es de dimensión de Krull < 0". Entonces la hipótesis del teorema puede ser: para todo $k \geq 0$ el anillo $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$ es de dimensión de Krull $< k$.

Corolario 15 *Supongamos que* $1 \in \Delta_1(F)$ *y que para todo* $k > 0$ *el anillo* $\mathbf{A}/(\Delta_{k+1}(F) + \mathrm{Rad}(\mathbf{A}))$ *es de dimensión de Krull* $< k$. *Entonces existen* $t_1, \ldots, t_p$ *tales que el vector* $C_0 + t_1C_1 + \ldots + t_pC_p$ *es unimodular.*
En particular si $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathrm{Rad}(\mathbf{A})) < k$ *y* $\Delta_k(F) = 1$, *existe un vector unimodular en el módulo imagen de* F.

Demostración.
Es suficiente aplicar el teorema 14 con el anillo $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$. Se obtiene con este anillo un vector unimodular en el módulo imagen de F. Pero si un vector $(a_1, \ldots, a_s)$ es unimodular módulo $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ esto significa que tenemos $\sum a_ib_i \equiv 1 \bmod \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$. Y todo elemento en $1 + \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ es invertible. □

Damos ahora una reformulación "con ideales primos" del teorema 14.

Teorema 16 *Para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$ *notaremos* $r_\mathfrak{p}$ *el rango de la matriz* F *vista en el cuerpo de fracciones de* $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$. *Supongamos que para todo* $\mathfrak{p}$ *tenemos* $\mathrm{Kdim}(A/\mathfrak{p}) < r_\mathfrak{p}$, *entonces existe un vector unimodular en el módulo imagen de* F. *Además este vector puede ser expresado de la forma dada en el teorema 14.*

Demostración.
Fijamos k y sea $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$. Tenemos $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{B} = \sup_{\mathfrak{P}}\{\mathrm{Kdim}\,\mathbf{B}/\mathfrak{P}\}$ donde $\mathfrak{P}$ recorre los ideales primos de $\mathbf{B}$. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathbf{A}$. Decir que $r_\mathfrak{p} \leq k$ significa que módulo $\mathfrak{p}$ todos los menores de orden $p+1$ son nulos, es decir, $\Delta_{k+1}(F) \subseteq \mathfrak{p}$. La condición $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{B} < k$ significa entonces que para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ tal que $r_\mathfrak{p} \leq k$, tenemos $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) < k$. Imponer esta condición para todo $k \geq 0$ es lo mismo que pedir que $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) < r_\mathfrak{p}$, para todo ideal primo. □

3.2. El teorema "splitting off" de Serre, versión no noetheriana

Se deduce directamente del teorema 14 la siguiente versión "mejorada" del Splitting-off de Serre.

Teorema 17 *(teorema de Serre no noetheriano à la Heitmann, versión dimensión de Krull)* *Sea M un $\mathbf{A}$-módulo proyectivo de rango $\geq k$ sobre un anillo $\mathbf{A}$ tal que* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} < k$. *Entonces $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$ para un cierto N.*
Si $\operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})) < k$, *el resultado es también cierto.*

Demostración.
Supongamos sin pérdida de generalidad que M es la imagen de una matriz de proyección F. La hipótesis que M es de rango $\geq k$ significa que $\Delta_k(F) = \langle 1 \rangle$. El teorema 14 nos da un vector unimodular $u = {}^{\mathrm{t}}(u_1, \ldots, u_\ell)$ en la imagen de F. Consideremos $y_1, \ldots y_n$ tales que $\sum_i y_i u_i = 1$. Vamos a ver que $\mathbf{A}u$, que es claramente un módulo libre de base u, es factor directo de M. Para esto consideramos la forma lineal $\lambda : \mathbf{A}^\ell \to \mathbf{A}$ definida por ${}^{\mathrm{t}}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_i y_i x_i$, y la restricción μ de λ a M. Sea $N = \operatorname{Ker}\mu \subset M$. Tenemos $N \cap \mathbf{A}u = 0$ porque si $\mu(au) = 0$ entonces $a = a\mu(u) = \mu(au) = 0$. Tenemos $M = N + \mathbf{A}u$ porque si $z \in M$ se escribe $z = \mu(z)u + z'$ con $\mu(z') = \mu(z) - \mu(z)\mu(u) = 0$ entonces $z' \in N$.
Si $\operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{A})) < k$ utilizamos el corolario 15 en lugar del teorema 14. □

3.3. El teorema de Forster, una versión no noetheriana

En esta sección, se deduce del teorema 14, como en [6, 9], una versión "mejorada à la Heitmann" del teorema de Forster.

Módulos con presentación finita

Un módulo *con presentación finita* es un $\mathbf{A}$-módulo M dado por un número finito de generadores y de relaciones. De manera equivalente, es un módulo M isomorfo al conúcleo de un homomorfismo

$$\gamma : \mathbf{A}^m \longrightarrow \mathbf{A}^q$$

La matriz $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$ de γ tiene por columnas los (coeficientes de las) relaciones entre los generadores $g_1, \ldots, g_q$ (una relación $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_q g_q = 0$ es codificada por el vector columna ${}^{\mathrm{t}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, y los g_i son las imagines de la base canónica de $\mathbf{A}^q$ por la suprayección canónica $\pi : \mathbf{A}^q \to M$). Tal matriz se llama *matriz de presentación del módulo M*. Esto significa que:

- $(g_1, \ldots, g_q)\, G = 0$, y
- toda relación entre los g_i es una combinación lineal de columnas de G, es decir: si $(g_1, \ldots, g_q)\, C = 0$ con $C \in \mathbf{A}^{q \times 1}$ existe $C' \in \mathbf{A}^{m \times 1}$ tal que $C = G\,C'$.

Nótese que no se cambia la estructura de M cuando se hace sobre la matriz de presentación G una de las siguientes transformaciones:

1. añadir una columna nula, (esto no cambia el módulo de las relaciones entre generadores fijados)
2. supresión de una columna nula, salvo si obtenemos una matriz vacía,

3. reemplazo de G, de tipo $q \times m$, por G' de tipo $(q+1) \times (m+1)$ obtenida a partir de G añadiendo una fila nula arriba, después una columna a la izquierda con 1 en posición $(q+1, m+1)$, (es lo mismo que añadir un generador, indicando su dependencia respecto a los generadores precedentes):

$$G \mapsto G' = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m} \\ C & G \end{bmatrix}$$

4. operación inversa de la precedente, salvo si obtenemos una matriz vacía,

5. añadir a una columna una combinación lineal de las otras columnas, (esto no cambia el módulo de las relaciones entre generadores fijados)

6. añadir a una fila una combinación lineal de las otras filas, (por ejemplo si denotamos L_i la i-esima fila, reemplazar la fila L_1 por la fila $L_1 + \gamma L_2$ es lo mismo que reemplazar el generador g_2 por $g_2 - \gamma g_1$)

7. permutación de columnas o de filas,

8. multiplicación de una columna o de una fila por un elemento invertible (facultativo).

Es facil de ver que si G y H son dos matrices de presentación de un mismo módulo M, se puede pasar de la una a la otra con las transformaciones descritas arriba. Añadimos los nuevos generadores uno tras otro. Después las relaciones entre los nuevos generadores pueden ser añadidas porque son consecuencias de las relaciones entre los antiguos generadores y de las relaciones que definen los nuevos. Después los antiguos generadores pueden ser expresados en función de los nuevos: estas relaciones son consecuencias de las que ya tenemos. Esto permite de suprimir uno tras otro los antiguos generadores. Al final se eliminan las relaciones inútiles entre los nuevos generadores.

Lema 18 *Consideramos un $\mathbf{A}$-módulo M con presentación finita con una matriz de presentación $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$. Entonces el ideal determinantal $\Delta_{q-k}(G)$ (por convención $\Delta_m(G) = \mathbf{A}$ si $m \leq 0$) no depende del sistema generador ni de la matriz de presentación elegidas para describir M. En particular si M es generado por $k \leq q$ elementos, entonces $\Delta_{q-k}(G)$ es igual a $\mathbf{A}$.*

Demostración.
El ideal determinantal $\Delta_{q-k}(G)$ depende unicamente de M y k, y no de la matriz de presentación que se puede tomar para M. Es debido a que las manipulaciones 1 hasta 8 descritas arriba sobre las matrices de presentación conservan este ideal. Entonces si M es generado por k elementos, admite una matriz de presentación $F \in \mathbf{A}^{k\times p}$, y también la matriz $F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{(k+1)\times(p+1)}$, y el ideal determinantal $\Delta_1(F')$ es claramente $\mathbf{A}$. □

Nota. El ideal $\Delta_{q-k}(G)$ se llama el k-esimo ideal de Fitting de M.

Lema 19 *Consideremos un $\mathbf{A}$-módulo M con presentación finita dado por una matriz de presentación $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$. Supongamos $\mathbf{A}$ local. Sea un entero $k < q$. Entonces el módulo M es generado por k elementos si y sólo si la matriz G contiene un menor invertible de orden $q-k$. Es lo mismo que $\Delta_{q-k}(G) = \mathbf{A}$.*

Demostración.
La condición es suficiente aún cuando el anillo no es local. Permutando si hace falta las filas y las columnas llevamos el menor invertible arriba a la izquierda. Entonces multiplicando a la derecha (o a la izquierda) por una matriz invertible se obtiene la forma

$$G_1 \;=\; \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{q-k} & A \\ B & C \end{bmatrix}$$

después por manipulaciones elementales de filas y columnas, se obtiene

$$G_2 \;=\; \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{q-k} & 0_{q-k,m-q+k} \\ 0_{k,q-k} & G_3 \end{bmatrix}.$$

Y G_3 también es una matriz de presentación de M.
Cuando el anillo es local la condición es necesaria porque si el ideal determinantal $\Delta_{q-k}(G)$ es igual a $\mathbf{A}$ uno de sus generadores (un menor de orden $q-k$) debe ser invertible: en un anillo local, si una suma de elementos es invertible, uno de estos elementos es invertible. □

Lema 20 *Consideremos un $\mathbf{A}$-módulo M con presentación finita con una matriz de presentación $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$. Sea un entero $k < q$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

1. *El ideal determinantal de orden $q-k$ de G contiene a 1.*
2. *Despues de localizar en cada ideal primo $\mathfrak{p}$, $M_{\mathfrak{p}}$ es generado por k elementos.*

Demostración.
Notese que si un módulo M admite una matriz de presentación G entonces el módulo localizado M_S (donde S es un filtro) admite la misma matriz de presentación, vista como una matriz con coeficientes en A_S. La equivalencia resulta entonces del lema 19 y del hecho de que un ideal finitamente generado $\mathfrak{a}$ contiene a 1 si y sólo si $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ contiene a 1 después de localizar en cada ideal primo $\mathfrak{p}$. □

El teorema de Forster

A continuación una versión del teorema de Forster [8].

Teorema 21 *Sea M un módulo con presentación finita sobre un anillo $\mathbf{A}$ de dimensión de Krull $\leq d$. Si M es localmente generado por r elementos entonces M puede ser generado por $d+r$ elementos.*
Se obtiene el mismo resultado con la hipótesis $\mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathrm{Rad}(\mathbf{A})) \leq d$.

Demostración.
Sea $m_0, m_1, \ldots, m_p$ un sistema de generadores de M y F una matriz de presentación de M correspondiente a este sistema generador. Si $p \geq d+r$ se tiene $1 = \Delta_{d+1}(F)$ por el lema 20. Denotaremos $L_0, \ldots, L_p$ las filas de F. Aplicamos el teorema 14 (o el corolario 15) a la matriz traspuesta de F. Obtenemos $t_1, \ldots, t_p$ tales que la fila $L_0 + t_1 L_1 + \cdots + t_p L_p$ es unimodular. Reemplazar la fila L_0 por la fila $L_0 + t_1 L_1 + \cdots + t_p L_p$ es lo mismo que reemplazar $(m_0, m_1, \ldots, m_p)$ por $(m_0, m_1 - t_1 m_0, \ldots, m_p - t_p m_0) = (m_0, m_1', \ldots, m_p')$. Puesto que la nueva fila L_0 es unimodular, habrá una combinación lineal de las columnas de la forma ${}^{\mathrm{t}}(1, y_1, \ldots, y_p)$, esto significa que $m_0 + y_1 m_1' + \cdots y_p m_p' = 0$ en M, y por lo tanto $m_1', \ldots, m_p'$ generan M.
Finalmente el lema de Nakayama (también llamado “truco del determinante”) dice que si un módulo es generado por $g_1, \ldots, g_r$ después de pasar al cociente por el radical de Jacobson, entonces $g_1, \ldots, g_r$ generan M. □

Referencias

[1] Th. Coquand. *Sur un théorème de Kronecker concernant les variétés algébriques* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 291–294. 4

[2] Coquand T., Lombardi H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings.* dans: Commutative ring theory and applications. Eds: Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 131. M. Dekker. (2002) 477–499 . 3

[3] Coquand T., Lombardi H., Quitté C. *Generating non noetherian modules constructively.* Manuscripta mathematica **115**, (2004), 513–520. 6

[4] Coquand T., Lombardi H., Roy M.-F. *An elementary characterisation of Krull dimension.* Preprint 2003. 2

[5] Coquand T., Lombardi H., Schuster P. *A Nilregular Element Property.* A paraître dans Archiv der Mathematik. 4

[6] Eisenbud D., Evans E. G., Jr. *Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory.* J. Algebra **27** (1973), 278–305. 9

[7] Eisenbud D., Evans E. G., Jr. *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces.* Inventiones math. **19** (1973), 107–112. 4

[8] Forster O.. *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring.* Math. Z. **84** (1964) 80–87. 11

[9] Heitmann, R. *Generating non-Noetherian modules efficiently.* Michigan Math. **31** 2 (1984) 167–180. 4, 6, 9

[10] Kronecker L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* J. reine angew. Math. **92**, (1882) 1–123. Réimprimé dans *Leopold Kronecker's Werke*, II, 237–387. 4

[11] T.Y. Lam. *Serre's conjecture.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. 5

[12] Lombardi H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique.* Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46. 3

[13] Storch U. *Bemerking zu einem Satz van M. Kneser.* Arch. Math. **23**, (1972), 403–404. 4

[14] Van der Waerden Review Zentralblatt für Math **24**, (1941) 276. 4

Índice