Constructions cachées en algèbre abstraite (5)
Principe local-global de Pfister et variantes

H. Lombardi
Équipe de Mathématiques, (UMR CNRS 6623)
Université de Franche-Comté, 25030 BESANÇON cedex, France.
email lombardi@math.univ-fcomte.fr

décembre 2001

Résumé

Nous donnons une sémantique constructive pour le principe local-global de Pfister et nous en développons une théorie constructive.

Mots-clés Principe local-global de Pfister. Corps ordonnés. Groupe de Witt. Espace de Harrison. Mathématiques constructives. Programme de Hilbert.

Abstract

We give a constructive semantic and we develop a constructive theory for the Pfister's local-global principle.

Key-words : Pfister's local-global principle. Ordered fields. Witt Group. Harrison space. Constructive mathematics. Hilbert Program.

MSC 2000 : 03F65, 03B35, 12D15, 12J15, 14Q20

Table des matières

Introduction

Soit $\mathbf{K}$ un corps ordonné où les positifs sont des sommes de carrés, $\mathbf{R}$ sa cloture réelle, $(Q_i(x_1,\ldots,x_n))_{1\leq i\leq k}$ une liste finie de polynomes non nuls de $\mathbf{K}[x_1,\ldots,x_n] = \mathbf{K}[\underline{x}]$. On considère la forme quadratique diagonale $\phi = \langle Q_1,\ldots,Q_k\rangle_{\mathbf{K}(\underline{x})}$ sur le corps $\mathbf{K}(\underline{x})$, avec k pair. Pour tout $(\xi_1,\ldots,\xi_n) = (\underline{\xi}) \in \mathbf{R}^n$ on obtient par spécialisation une forme quadratique diagonale $\phi_{\underline{\xi}} = \big\langle Q_1(\underline{\xi}),\ldots,Q_k(\underline{\xi})\big\rangle_{\mathbf{R}}$ sur le corps $\mathbf{R}$. On note $\mathrm{H} = \langle 1,-1\rangle$ la forme du plan hyperbolique ou $\mathrm{H}_{\mathbf{K}}$, $\mathrm{H}_{\mathbf{R}},\ldots$ si on veut préciser. Une conséquence du principe local-global de Pfister est que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(A1)$ Pour tout $\underline{\xi}\in\mathbf{R}^n$ la forme quadratique $\phi_{\underline{\xi}}$ est ou bien dégénérée, ou bien hyperbolique.

$(A2)$ La forme quadratique est un élément de torsion dans le groupe de Witt de $\mathbf{K}(\underline{x})$. Autrement dit il existe un entier m tel que la somme orthogonale de m copies de ϕ est hyperbolique sur le corps $\mathbf{K}(\underline{x})$.

$(A3)$ La forme quadratique est dans l'idéal engendré par les formes $\langle 1,-s_i\rangle$ (où les s_i sont des sommes de carrés) du groupe de Witt de $\mathbf{K}(\underline{x})$. Autrement dit il existe un entier k tel que la forme $\phi\perp k\,\mathrm{H}_{\mathbf{K}(x)}$ est isométrique à une somme orthogonale de formes du type $\langle a_i,-s_ia_i\rangle$.

Ceci peut être vu comme une généralisation du 17$^{\text{ème}}$ problème de Hilbert parce que ce dernier est obtenu comme cas particulier de l'équivalence ci-dessus lorsqu'on considère une forme quadratique $\langle 1,-P\rangle_{\mathbf{K}(\underline{x})}$ avec P partout ≥ 0 sur $\mathbf{R}^n$.

La forme abstraite du principe local-global de Pfister est que si $\mathbf{K}$ est un corps réel quelconque et si $\phi = \langle a_1,\ldots a_k\rangle_{\mathbf{K}}$ est une forme quadratique diagonale non dégénérée sur $\mathbf{K}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(B1)$ Pour tout ordre P sur $\mathbf{K}$ la forme ϕ a sa signature nulle (ce qui revient à dire qu'elle est hyperbolique sur la cloture réelle de $(\mathbf{K},P)$).

$(B2)$ La forme quadratique est un élément de torsion dans le groupe de Witt de $\mathbf{K}$.

$(B3)$ La forme quadratique est dans l'idéal engendré par les formes $\langle 1,-s_i\rangle$ (où les s_i sont des sommes de carrés) du groupe de Witt de $\mathbf{K}$.

Une forme généralisée du principe abstrait précédent considère un corps $\mathbf{K}$ muni d'un cone propre T. On a alors que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(C1)$ Pour tout ordre P sur $\mathbf{K}$ qui prolonge T la forme ϕ a sa signature nulle.

$(C2)$ Dans groupe de Witt de $\mathbf{K}$, la forme ϕ est annulée lorsqu'on la multiplie par une forme $\langle t_1,\ldots,t_r\rangle$ avec les $t_i\in\dot{T} = T\setminus\{0\}$.

$(C3)$ La forme ϕ est dans l'idéal de $W(\mathbf{K})$ engendré par les formes du type $\langle 1,-t\rangle$ où $t\in\dot{T}$.

On trouve un exposé particulièrement clair de cette théorie dans [Lam].

Nous proposons dans cet article une sémantique constructive pour ces théorèmes abstraits. Nous montrons que les preuves classiques que l'on trouve dans [Lam] (qui utilisent inévitablement des principes non constructifs) peuvent être comprises comme des preuves constructives pour les théorèmes ci-dessus, une fois qu'on les a remplacés par leur version constructive.

Rappelons qu'une version constructive d'un théorème classique abstrait est un théorème constructif qui lui est immédiatement équivalent en mathématiques classiques (via un petit peu de tiers exclu et de lemme de Zorn). Et qu'un théorème constructif est un théorème qui a une sémantique constructive et une preuve constructive.

On déduit de ces théorèmes constructifs des versions plus concrètes comme par exemple les équivalences entre les (A_i) signalées ci-dessus ou leurs variantes *pour le cas d'un corps ordonné* $(\mathbf{K},P)$ de clôture réelle $\mathbf{R}$, que nous donnons maintenant. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$(D1)$ Pour tout $\underline{\xi}\in\mathbf{R}^n$ la forme quadratique $\phi_{\underline{\xi}}$ est ou bien dégénérée, ou bien hyperbolique.

$(D2)$ Il existe une forme quadratique $\psi = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle$ avec les $p_i > 0$ dans $\mathbf{K}$ telle que $\phi \otimes \psi$ est hyperbolique sur $\mathbf{K}(\underline{x})$.

$(D3)$ La forme ϕ est dans l'idéal de $W(\mathbf{K}(\underline{x}))$ engendré par les formes $\left\langle 1, -\sum_i p_i R_i^2 \right\rangle$ avec $p_i > 0$ dans $\mathbf{K}$ et $R_i \neq 0$ dans $\mathbf{K}(\underline{x})$.

Pour d'autres exemples de la méthode présente, qui met à jour des preuves constructives cachées dans les preuves classiques, voir [2, 3, 11, 12, 14, 15]. Cette méthode est en fait directement issue de la méthode dynamique donnée dans [4, 10, 13].

Pour une introduction générale à l'algèbre constructive voir [MRR].

Voici le plan de l'article. Dans la section 1 nous précisons quelques notations et conventions. Dans la section 2 nous expliquons la sémantique constructive que nous proposons pour la théorie des ordres qui étendent un cone donné. Dans la section 3 nous appliquons ce point de vue pour donner une définition constructive pour : deux formes quadratiques sont T-isométriques. Nous montrons ensuite un certain nombre de propriétés qui sont un tout petit peu moins évidentes lorsqu'on utilise la définition cosntructive proposée à la place de la définition classique usuelle. La section 4 est consacrée à la définition et à quelques proprités élémentaires des groupes de Grothendieck et de Witt relatifs. La section 5 constitue le coeur de l'article et est une relecture du chapitre 1 de [Lam]. En particulier nous obtenons sous forme explicite des équivalences entre les (D_i) ci-dessus.

1 Notations et conventions

Nous utilisons la terminologie de [BCR]. Un *cone propre* T sur un anneau commutatif $\mathbf{A}$ est donc ce qui est appelé un *preordering* dans [Lam]. Un *ordre* sur un corps est ce qui est appelé un *ordering* dans [Lam].

Nous noterons $\mathcal{C}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n)$ le cone engendré par $a_1, \ldots, a_n$ dans l'anneau $\mathbf{A}$ et $T[a_1, \ldots, a_n]$ (ou $T_{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$ s'il faut préciser) le cone engendré par T et $a_1, \ldots, a_n$. Autrement dit $T[a_1, \ldots, a_n]$ est l'ensemble des éléments de la forme $\sum_J t_J a_J$ où J parcourt les parties de $\{1, \ldots, n\}$, où a_J désigne le produit des a_j pour $j \in J$ et où $t_J \in T$. Et $\mathcal{C}(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum \mathbf{A}^{(2)}\right)[a_1, \ldots, a_n]$, où $\sum \mathbf{A}^{(2)}$ est le cone minimal, formé des sommes de carrés.

Nous noterons $\phi \simeq_{\mathbf{K}} \psi$ (ou, si le contexte est clair $\phi \simeq \psi$) pour dire que deux formes quadratiques ϕ et ψ sont isométriques sur le corps $\mathbf{K}$.

Si $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ nous notons $\operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon})$ la somme $\sum_i \varepsilon_i$. Nous disons que l'entier $\operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon})$ est la *signature* du système de signes $\underline{\varepsilon}$. Si ϕ est une forme quadratique sur un corps ordonné nous notons aussi $\operatorname{sgn}(\phi)$ sa signature.

Nous notons $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \setminus \{0\}$ et pour un cone T du corps $\mathbf{K}$, $\dot{T} = T \setminus \{0\}$. On a :

$$\forall \underline{t} \in \dot{T}^n,\ \forall \underline{a} \in \mathbf{K}^n, \qquad T[a_1, \ldots, a_n] = T[t_1 a_1, \ldots, t_n a_n] \tag{1.1}$$

À titre de simplification, dans les anneaux que nous considérons, l'élément $2 = 1 + 1$ est toujours inversible (en particulier *les corps sont de caractéristique distincte de* 2). Il s'ensuit qu'un cone est *trivial* (i.e., il remplit l'anneau) si et seulement si il contient -1.

Comme il arrive que des cones (après un passage au quotient ou une localisation par exemple) soient triviaux sans qu'on le sache, la notion de cone propre n'est pas très pratique d'un point de vue constructif. C'est plutot la notion de cone trivial (celui qui contient -1) qui se manipule de façon agréable (ce cone est justement « l'objet sans nom » de [Lam], où seuls sont « nommés » les cones propres).

Cela veut dire que nous aurons souvent tendance à mettre en avant des propositions qui apparaissent comme les contrapposées de leurs correspondantes classiques, mais qui sont en fait légèrement plus fortes, et en tout cas plus faciles à utiliser, d'un point de vue constructif. En fait c'est plutot la version classique qui est la contrapposée de la version constructive.

En langage imagé, nous disons qu'un cone *collapse* ou *s'effondre* lorsqu'il contient -1. Cette terminologie légèrement cinématique correspond au fait que, en suivant le déroulement d'une preuve, on acquiert à un certain moment la certitude qu'un cone est maintenant trivial (après qu'on lui ait fait subir quelque mauvais traitement), c'est-à-dire qu'on a enfin mis la main sur une identité algébrique.

Nous considérerons uniquement des corps discrets non triviaux, c'est-à-dire des corps où $1 \neq 0$ et où on a un test pour l'égalité à 0.

De même, quand nous parlerons d'un corps ordonné, ce sera toujours un corps ordonné discret au sens que le signe d'un élément est toujours certain, donné par un test explicite. En particulier notre approche n'est pas suffisante d'un point de vue constructif pour le corps $\mathbb{R}$ des réels à la Cauchy, dans lequel il n'y a pas de test de signe (pour un traitement constructif du $17^{\text{ème}}$ problème de Hilbert sur les réels voir [5, 6, 7]).

2 Sémantique constructive pour la théorie d'Artin-Schreier

La théorie classique d'Artin-Schreier considère un cone propre T sur un corps $\mathbf{K}$ et nous invite à considérer tous les ordres P qui prolongent T.

Le premier théorème d'Artin-Schreier affirme qu'il existe de tels ordres, le deuxième nous dit que leur intersection est réduite à T.

Ces théorèmes ne sont pas prouvables sans le recours à un *axiome* de nature non constructive, appelé *théorème de compacité* en logique classique[1], qui équivaut au fait que tout idéal strict dans un anneau commutatif est contenu dans un idéal premier. Il s'agit d'une combinaison affaiblie du principe du tiers exclu et de l'axiome du choix[2], qui sont les deux principes non constructifs fondamentaux des mathématiques classiques.

La plupart des théorèmes non constructifs d'algèbre abstraite peuvent se reformuler constructivement en disant que « le théorème de compacité implique le théorème souhaité ». Mais cette pseudo sémantique constructive du théorème en question n'a en général aucune portée pratique.

D'un point de vue constructif nous voyons la donnée du cone T comme une invitation à considérer tous les cones propres C qui prolongent T. Nous pouvons voir ces cones comme des *spécifications incomplètes* pour les ordres P du mathématicien classique, si désirables mais hors d'atteinte sans le secours du théorème de compacité.

Les deux théorèmes de la théorie d'Artin-Schreier ci-dessus ont alors une sémantique constructive un peu surprenante (mais très efficace) qui consiste à conserver en mémoire, toujours bien présent à l'esprit, la partie constructive dans leur preuve, élémentaire mais pertinente. Ce sont les deux lemmes constructifs suivants.

Lemme 2.1 (collapsus simultané) *Soit T un cone dans un corps $\mathbf{K}$ et a un élément de $\mathbf{K}$. Si $-1 \in T[a]$ et $-1 \in T[-a]$ alors $-1 \in T$. En particulier si T est propre, $T[a]$ et $T[-a]$ ne peuvent être simultanément triviaux (avec le principe du tiers exclu, on pourrait même en déduire que l'un des deux est sûrement non trivial).*

Notez aussi qu'on a en fait bien évidemment une équivalence :

$$(-1 \in T[a] \quad \text{et} \quad -1 \in T[-a]) \iff -1 \in T$$

[1] C'est étrange d'appeler théorème un axiome a priori fort contestable, surtout de la part des logiciens, qui sont pourtant censés s'occuper des questions de fondements.

[2] L'axiome du choix exprimé sous sa forme la plus usuelle équivaut au fait que tout idéal strict dans un anneau commutatif est contenu dans un idéal maximal. En outre il implique le principe du tiers exclu (cf. [BR]).

Lemme 2.2 *Soit T un cone dans un corps* $\mathbf{K}$ *et a un élément de* $\dot{\mathbf{K}}$*. Alors $-1 \in T[a]$ si et seulement si $-a \in T$. En particulier si $a \notin T$ alors $T[-a]$ est un cone propre. En outre un cone propre contenant $T[-a]$ ne contient pas a.*

Un corollaire immédiat du lemme 2.1 est le lemme 2.3, dont la philosophie est la suivante : s'il s'avère impossible d'attribuer des signes à une famille finie d'éléments, c'est que la situation était déjà catastrophique au départ. Ceci peut être vu comme une sorte de paraphrase pour l'affirmation des mathématiques classiques : tout corps réel peut être ordonné.

Lemme 2.3 *Soit T un cone dans un corps* $\mathbf{K}$ *et $a_1, \ldots, a_k$ des éléments de* $\mathbf{K}$*. Si $-1 \in T[\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k]$ pour tout $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k$ alors $-1 \in T$.*

Nous nous intéressons maintenant à des systèmes de signes portant sur tous les produits $a_i b_j$ pour deux familles données (a_i) et (b_j) formée d'éléments non nuls.

Lemme 2.4 *Soit T un cone dans un corps* $\mathbf{K}$ *et $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$ des éléments de* $\dot{\mathbf{K}}$*. Soit $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^{k\times\ell}$ un système de signes* manifestement incompatible *pour les $a_i b_j$, c'est-à-dire tels que l'on ait $\varepsilon_{i_1,j_1}\varepsilon_{i_2,j_2} \neq \varepsilon_{i_1,j_2}\varepsilon_{i_2,j_1}$ pour au moins un couple (i_1, i_2) et un couple (j_1, j_2). Alors $-1 \in T[(\varepsilon_{i,j} a_i b_j)_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq \ell}]$.*

En effet le cone $\mathcal{C}((\varepsilon_{i,j} a_i b_j)_{1\leq i\leq k,1\leq j\leq \ell})$ contient l'élément non nul $a_{i_1} a_{i_2} b_{j_1} b_{j_2}$ et son opposé.

Considérons maintenant un système de signes $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^{k\times\ell}$ qui *n'est pas* manifestement incompatible pour les $a_i b_j$, alors on a un nouveau corollaire du lemme 2.1.

Lemme 2.5 *Posons $\sigma_i = \varepsilon_{1,1}\varepsilon_{i,1}$ et $\tau_j = \varepsilon_{1,j}$. Le cone $C = T[(\varepsilon_{i,j} a_i b_j)]$ est trivial si et seulement si les deux cones $T[(\sigma_i a_i)_{1\leq i\leq k}, (\tau_j b_j)_{1\leq j\leq \ell}]$ et $T[(-\sigma_i a_i)_{1\leq i\leq k}, (-\tau_j b_j)_{1\leq j\leq \ell}]$ sont triviaux.*

En effet il n'est pas difficile de voir que

$$T[(\sigma_i a_i)_{1\leq i\leq k}, (\tau_j b_j)_{1\leq j\leq \ell}] = C[a_1] \quad \text{et} \quad T[(-\sigma_i a_i)_{1\leq i\leq k}, (-\tau_j b_j)_{1\leq j\leq \ell}] = C[-a_1].$$

Les lemmes 2.4 et 2.5 permettent de mimer, dans les questions de collapsus, la raisonnement suivant : *lorsque les a_i et les b_j sont non nuls, attribuer des signes aux $a_i b_j$ « peut se faire » (sans changer le résultat) en attribuant des signes aux a_i et aux b_j.*

En pratique le changement de sémantique que nous opérons, du classique au constructif, est le suivant : nous remplaçons « tous les ordres qui étendent un cone propre T » par « tous les cones, y compris les triviaux, qui étendent un cone T, dont on ne sait éventuellement pas s'il est trivial ou pas, par rajout d'un nombre fini d'éléments ». Nous prétendons que la preuve classique, quand elle parle des premiers objets, du bas vers le sommet, peut être interprétée comme une preuve constructive parlant des seconds, du haut vers le bas, mais depuis une hauteur finie seulement. La preuve classique dit « s'il existait un objet en bas, il en existerait un tout en haut mais on voit bien que cela ne peut pas marcher », et elle se relit « si les objets idéaux abstraits tout en haut ne peuvent pas marcher, c'est que des objets constructifs, à une certaine hauteur finie, sont sujets à des identités algébriques qui les empèchent de marcher, et cela redescend en bas par le lemme 2.3 ».

Cette philosophie a une bonne chance de se généraliser s'il est bien vrai que l'algèbre est en définitive une vaste théorie des identités algébriques. Par exemple, et malgré son apparence a priori, la théorie de la dimension de Krull est bien une théorie des identités algébriques d'un certain type (cf. [2, 3, 13]).

3 Formes T-isométriques et T-hyperboliques

Lam définit pour deux formes quadratiques diagonales (non dégénérées) $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ et $\psi = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ le concept « ϕ et ψ sont T-isométriques » en demandant que pour tout ordre P qui prolonge T, ϕ et ψ aient la même signature.

Il reviendrait au même de demander que ϕ et ψ deviennent isométriques (tout court) dans la 2-cloture du corps ordonné $(\mathbf{K}, P)$. Rappelons que la 2-cloture d'un corps ordonné est le plus petit corps ordonné contenant $\mathbf{K}$ et dans lequel les positifs sont des carrés (cf. [16] pour une construction explicite, on pourrait aussi parler de la cloture euclidienne de $\mathbf{K}$).

Nous avons besoin d'une définition constructive du concept, qui soit immédiatement équivalente à la définition classique en mathématiques classiques. C'est la suivante. Dans cette définition, avant d'établir le fait 3.2, l'expression « forme quadratique diagonale non dégénérée $\phi = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ » doit être prise au sens purement formel d'une matrice diagonale $diag(a_1, \dots, a_k)$ avec les $a_i \in \dot{\mathbf{K}}$.

Rappelons que nous notons la signature d'un élément $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k$ par $\operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon}) := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$.

Définition 3.1 *Soient deux formes quadratiques diagonales (non dégénérées et de même dimension) $\phi = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ et $\psi = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ sur $\mathbf{K}$ et T un cone de $\mathbf{K}$.*

(1) *Les formes ϕ et ψ sont dites* T- isométriques (sur $\mathbf{K}$) *si pour tous $\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}' \in \{\pm 1\}^k$ tels que $\operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon}')$ le cone $T[\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_k a_k, \varepsilon'_1 b_1, \dots, \varepsilon'_k b_k]$ collapse.*

(2) *Si $k = 2\ell$ la forme ϕ est dite* T- hyperbolique *si elle est T- isométrique à la forme hyperbolique standard $\ell \, \langle 1, -1 \rangle$.*

(3) *Si $k = 2\ell + 1$ la forme ϕ est dite* T- hyperbolique *si T collapse.*

La convention (3) dans la définition ci-dessus est celle qui s'avère le plus pratique en cas de collapsus du cone T.

La philosophie pour la T- isométrie de deux formes est de dire qu'il est impossible d'attribuer aux a_i et aux b_j deux systèmes de signes *déséquilibrés* (c'est-à-dire dont les signatures ne sont pas égales).

La lectrice se convaincra facilement que cette définition équivaut à la définition classique en mathématiques classiques (dans la définition classique on se restreint au cas où T est un cone propre). Et le lecteur constatera qu'il s'agit bien d'une définition ayant un contenu calculatoire évident[3].

Notez aussi que lorsque T est trivial, deux formes de même dimension sont T- isométriques.

Enfin, par définition, deux formes de dimensions distinctes ne sont jamais T- isométriques.

Nous allons maintenant vérifier que certaines propriétés évidentes du point de vue classique, avec la définition classique, concernant la notion de formes T- isométriques sont des conséquences faciles des lemmes 2.1 à 2.5.

Tout d'abord il est clair que la définition des formes T- isométriques est insensible à l'ordre des éléments diagonaux dans chacune des formes. Plus généralement on a le fait suivant.

Fait 3.2 (théorème d'inertie de Sylvester) *Deux formes isométriques sont T- isométriques. En particulier une forme hyperbolique est T- hyperbolique.*

Preuve On reprend la preuve du théorème d'inertie de Sylvester. On considère une tentative $(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma})$ déséquilibrée d'attribuer des signes aux a_i et aux b_j. Par exemple il y a trop de $a_i > 0$ et $b_j < 0$ (pour $i \in I_1$ $\varepsilon_i = 1$, pour $j \in J_1$ $\sigma_j = -1$, et $\#I_1 + \#J_1 > k$). En utilisant la matrice de changement de base qui transforme une forme en l'autre on trouve un vecteur non nul dans l'intersection des deux sous espaces correspondants et cela donne une égalité $\sum_{i \in I_2} a_i c_i^2 = \sum_{j \in J_2} b_j d_j^2$ avec les c_i et $d_j \neq 0$, $I_2 \subseteq I_1$ et $J_2 \subseteq J_1$ non vides. Cela rend le cone $T[(a_i)_{i \in I_2}, (-b_j)_{j \in J_2}]$ trivial. □

Désormais, nous pouvons comprendre l'expression « les formes quadratiques ϕ et ψ sont T-isométriques » comme ayant un sens bien défini avec des formes quadratiques en dimension finie non dégénérées quelconques, même si des bases des espaces vectoriels correspondants ne sont pas spécifiées, ou si des bases sont spécifiées mais que les formes ne sont pas diagonales.

Fait 3.3 *La notion de T- isométrie est une relation d'équivalence.*

[3] Remarquez qu'on certifie que deux formes sont T- isométriques en exhibant un certain nombre d'égalités concernant leurs éléments diagonaux (des collapsus), c'est un certificat de nature finie explicite. Tandis que pour certifier qu'elles ne sont pas T- isométriques il faut inévitablement une preuve. C'est une situation analogue à celle de la factorisation d'un polynome sur un corps infini : s'il se factorise cela se constate, s'il ne se factorise pas, il faut une preuve.

Preuve La symétrie est claire. La réflexivité est presque immédiate, elle résulte aussi de 3.2. Pour la transitivité, soient $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$ T-isométrique à $\psi = \langle b_1, \dots, b_k\rangle$ T-isométrique à $\theta = \langle c_1, \dots, c_k\rangle$. On utilise le lemme 2.3 : lorsque des systèmes de signes déséquilibrés sont attribués aux a_i et aux c_ℓ alors pour n'importe quel système de signes attribués aux b_j il y a une déséquilibre soit avec le système attribué aux a_i soit avec celui attribué aux c_ℓ, soit aux deux. □

Ceci justifie la notation suivante.

Notation 3.4 Nous noterons $\phi \simeq_{(\mathbf{K},T)} \psi$ (ou, si le contexte est clair $\phi \simeq_T \psi$) pour dire que deux formes quadratiques diagonales non dégénérées sont T-isométriques.

Fait 3.5 *Soient* $\underline{\sigma}, \underline{\sigma}' \in \{\pm 1\}^k$, $\underline{a} \in \dot{\mathbf{K}}^k$ *et* $\underline{t} \in \dot{T}^k$.

(1) *On a* $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle \simeq_T \langle a_1t_1, \dots, a_kt_k\rangle$.

(2) *On a* $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle \simeq_T \langle \sigma_1, \dots, \sigma_k\rangle$ *si et seulement si pour tout* $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k$ *tel que* $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \mathrm{sgn}(\underline{\sigma})$ *le cone* $T[\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_k a_k]$ *collapse.*

(3) *On a* $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_k\rangle \simeq_T \langle \sigma'_1, \dots, \sigma'_k\rangle$ *si et seulement si* $\mathrm{sgn}(\underline{\sigma}) = \mathrm{sgn}(\underline{\sigma}')$ *ou* $-1 \in T$.

Concernant les formes T-hyperboliques nous supposons $k = 2\ell$ et nous obtenons :

(4) *La forme* $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$ *est T-hyperbolique si et seulement si pour tout* $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k$ *tel que* $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq 0$ *le cone* $T[\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_k a_k]$ *collapse.*

(5) *La forme* $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$ *est T-hyperbolique si et seulement si pour tout* $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ *tel que* $\#J > \ell/2$, *les cones* $T[(a_j)_{j\in J}]$ *et* $T[(-a_j)_{j\in J}]$ *collapsent.*

(6) *La forme* $\langle 1, a_1\rangle$ *est T-hyperbolique si et seulement si* $-1 \in T[a_1]$ *si et seulement si* $-a_1 \in T$.

(7) *La forme* $c\,\phi$ *est T-hyperbolique si et seulement si la forme* ϕ *est T-hyperbolique. En particulier, une forme* $\langle c, d\rangle$ *est T-hyperbolique si et seulement si* $-d/c \in \dot{T}$.

Preuve Le premier point résulte de l'égalité (1.1) page 3. Pour le deuxième point, lorsqu'on compare ϕ à ψ le seul système de signe $\underline{\varepsilon}'$ à prendre en compte du coté ψ est $\underline{\varepsilon}' = \underline{\sigma}$, car sinon le cone collapse de manière évidente. Donc les systèmes $\underline{\varepsilon}$ à prendre ne compte du coté ϕ sont tous ceux qui réalisent $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \mathrm{sgn}(\underline{\sigma})$.

Les autres points s'en déduisent facilement. Le point (5) résulte du point (4) via le lemme 2.3. Ce que (5) opère par rapport à (4) pourrait être fait également sur (2). □

Comme corollaire immédiat, le fait suivant montre que le théorème d'inertie de Sylvester classique sur un corps ordonné est bien conservé par la notion de T-isométrie.

Fait 3.6 *Soit* $(\mathbf{K}, P)$ *un corps ordonné. Alors toute forme* ϕ *est P-isométrique à une forme* $m\,\langle 1\rangle \perp n\,\langle -1\rangle$ *avec* $m, n \in \mathbb{N}$ *entièrement déterminés par* ϕ.

Dans la suite de la section, nous utilisons les notations suivantes : $\underline{a}, \underline{b} \in \dot{\mathbf{K}}^k$, $\underline{c} \in \dot{\mathbf{K}}^\ell$, $\phi = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$, $\psi = \langle b_1, \dots, b_k\rangle$ et $\theta = \langle c_1, \dots, c_\ell\rangle$.

Fait 3.7 *Si* $\phi \simeq_T \psi$ *alors*

(1) $\phi \perp \theta \simeq_T \psi \perp \theta$ *et*

(2) $\phi \otimes \theta \simeq_T \psi \otimes \theta$.

Preuve Pour la somme directe orthogonale, on doit attribuer deux systèmes de signes déséquilibrés, d'une part aux a_i et c_j, d'autre part aux b_i et c_j. Si on n'a pas attribué les deux fois les mêmes signes aux c_j, cela collapse. Sinon, les systèmes attribués aux a_i et aux b_i sont déséquilibrés, et cela collapse. Pour le produit tensoriel on raisonne de la même façon en s'appuyant sur les lemmes 2.4 et 2.5. □

Fait 3.8 *(simplification) Si* $\phi \perp \theta \simeq_T \psi \perp \theta$ *alors* $\phi \simeq_T \psi$.

Preuve Si on attribue des systèmes de signes déséquilibrés aux a_i et aux b_i, et n'importe quel système de signes aux c_j, cela collapse. On conclut par le lemme 2.3. □

Fait 3.9 *Deux formes ϕ et ψ de même dimension sont T-isométriques si et seulement si la forme $\phi \perp -\psi$ est T-hyperbolique. En particulier, $\langle c\rangle \simeq_T \langle d\rangle$ si et seulement si $c/d \in \dot{T}$.*

Preuve On a la forme $\psi \perp -\psi$ qui est T-hyperbolique donc on utlise les faits 3.7 et 3.8. □

Fait 3.10 *Soit $a \in \mathbf{K}$. On a $\phi \simeq_T \psi$ si et seulement si $\phi \simeq_{T[a]} \psi$ et $\phi \simeq_{T[-a]} \psi$.*

Preuve Clair d'après la définition et le lemme 2.1. □

Fait 3.11 *Si ϕ est T-hyperbolique alors $\phi \otimes \theta$ l'est également. On a la réciproque si θ est de dimension impaire.*

Preuve Le premier point résulte du fait 3.7 et du fait que $\langle 1, -1\rangle \otimes \theta$ est T-hyperbolique. Donnons une preuve directe. On utilise les lemmes 2.4 et 2.5. On attribue donc des signes aux a_i et aux c_j. Si la somme de tous les signes qu'on en déduit pour les a_ic_j est non nulle, c'est que la somme des signes attribués aux a_i est non nulle, donc cela collapse.

On voit aussi fonctionner la réciproque, avec le lemme 2.3 : lorsque la somme des signes des a_i est non nulle, quels que soient les signes attribués aux c_j la somme de ces derniers est impaire, donc non nulle, donc la somme des signes des a_ic_j est non nulle et cela collapse. □

Un raisonnement analogue donne.

Fait 3.12 *Soient $t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$. Une forme ϕ est T-hyperbolique si et seulement si $\phi \otimes \langle t_1, \ldots, t_r\rangle$ est T-hyperbolique. De manière équivalente, puisque $\langle t_1, \ldots, t_r\rangle \simeq_T r\,\langle 1\rangle$, pour tout entier $r > 0$, ϕ est T-hyperbolique si et seulement si $r\,\phi$ est T-hyperbolique.*

Notez l'utilité ici de la convention (3) dans la définition 3.1 lorsque ϕ de dimension impaire et r est pair : si T collapse alors $r\,\phi$ est T-hyperbolique au sens des formes de dimension paire. La même remarque vaut pour le fait suivant.

Fait 3.13 *Soit $c \in \dot{\mathbf{K}}$. Une forme ϕ est $T[c]$-hyperbolique si et seulement si $\phi \otimes \langle 1, c\rangle$ est T-hyperbolique.*

Preuve Attribuer des signes aux a_i et aux a_ic peut se faire en attribuant un signe aux a_i et à c (lemmes 2.4 et 2.5). Pour que le système de signes qui en résulte sur les a_ic soit de signature non nulle il faut que le signe de c soit $+1$, et cela signifie qu'on travaille avec ϕ sur $T[c]$. □

Ceci s'étend aux formes de Pfister.

Fait 3.14 *Soit $\Theta = \langle\langle c_1, \ldots, c_\ell\rangle\rangle = \langle 1, c_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, c_\ell\rangle$ une forme de Pfister.*

(1) *La forme Θ est T-hyperbolique si et seulement si le cone $T[c_1, \ldots, c_\ell]$ collapse.*

(2) *Une forme ϕ est $T[c_1, \ldots, c_\ell]$-hyperbolique si et seulement si $\phi \otimes \Theta$ est T-hyperbolique.*

Preuve Le deuxième point est clair par induction à partir de 3.13. Le premier point est un cas particulier avec $\phi = \langle 1\rangle$. □

Cette preuve nous convainc définitivement de la pertinence de la convention (3) dans la définition 3.1.

4 Le groupe de Grothendieck et le groupe de Witt relatifs

Nous commençons par quelques rappels relatifs au groupe de Grothendieck et au groupe de Witt absolus.

Nous noterons $[\phi]$ (ou $[\phi]_{\mathbf{K}}$ s'il faut préciser) la classe d'isométrie de la forme quadratique non dégénérée ϕ. En raison du théorème de simplification de Witt, dans le groupe de Grothendieck correspondant $K(\mathbf{K})$, défini par les relations $[\phi] + [\psi] =_{K(\mathbf{K})} [\phi \perp \psi]$, on a $[\phi] =_{K(\mathbf{K})} [\psi]$ si et seulement si $[\phi] = [\psi]$: l'écriture $[\phi] =_{K(\mathbf{K})} [\psi]$ est synonyme de $\phi \simeq_{\mathbf{K}} \psi$.

Les éléments du groupe de Grothendieck sont tous du type $[\phi] - [\psi]$ et les $[\phi]$ sont tous non nuls dans le groupe. On admet parfois la forme de dimension nulle comme non dégénérée, puisque le déterminant d'une matrice carrée vide est égal à 1, et si on note cette forme par 0 cela donne l'égalité $[0] =_{K(\mathbf{K})} 0$. Ce groupe de Grothendieck est muni d'une structure d'anneau définie par $[\phi] \times [\psi] =_{K(\mathbf{K})} [\phi \otimes \psi]$.

Pour $a \in \dot{\mathbf{K}}$ l'élément $\{a\} \stackrel{\text{def}}{=} [\langle a\rangle]$ ne dépend que de la classe de a modulo le sous groupe des carrés $\dot{\mathbf{K}}^{(2)}$. On a immédiatement

$$\forall a, b \in \dot{\mathbf{K}} \qquad \begin{cases} \{a\} =_{K(\mathbf{K})} \{ab^2\}, \\ a+b \neq 0 \ \Rightarrow\ \{a\} + \{b\} =_{K(\mathbf{K})} \{a+b\} + \{ab(a+b)\} \end{cases} \tag{4.1}$$

et

$$\forall a, b \in \dot{\mathbf{K}} \qquad \{ab\} =_{K(\mathbf{K})} \{a\}\{b\} \tag{4.2}$$

On a $\{1\} =_{K(\mathbf{K})} 1$. Par contre $\{-1\} \neq_{K(\mathbf{K})} -1$ et $[-\phi] \neq_{K(\mathbf{K})} -[\phi]$ sauf pour $\phi = 0$.

Nous noterons $W(\mathbf{K})$ le groupe de Witt de $\mathbf{K}$, qui est le quotient de $K(\mathbf{K})$ par l'idéal $H_{\mathbf{K}}$ engendré par $\mathrm{H}_{\mathbf{K}} = \langle 1, -1\rangle$. En particulier pour tout ϕ on a on a $-[\phi] \equiv [-\phi]$ *mod* $H_{\mathbf{K}}$ ce qui autorise la simplification de notation consistant à supprimer les crochets. On écrira donc $\phi =_{W(\mathbf{K})} \psi$ (ou si le contexte est clair $\phi =_W \psi$) pour dire que ϕ et ψ sont égales dans le groupe de Witt de $\mathbf{K}$. Ceci revient à dire que $\phi \perp -\psi$ est hyperbolique. Et $\phi =_W 0$ signifie que ϕ est hyperbolique.

Nous noterons $\phi_{W(\mathbf{K})}$ ou ϕ_W la classe de ϕ dans $W(\mathbf{K})$ et $\{a\}_W$ la classe de $\{a\}$.

Tout élément de $W(\mathbf{K})$ est de la forme ϕ_W pour une forme quadratique ϕ.

L'égalité dans $W(\mathbf{K})$ comme dans $K(\mathbf{K})$ n'est pas en général décidable, mais elle peut être certifiée par des calculs algébriques explicites.

Le groupe de Witt peut alors être décrit comme le groupe abélien engendré par les $\{a\}_W$ pour $a \in \dot{\mathbf{K}}$ soumis aux relations (4.1) et à la relation

$$\{1\} + \{-1\} =_W 0 \tag{4.3}$$

On peut aussi dire qu'il est engendré par les $\{a\}_W$ pour $a \in \mathbf{K}$ soumis aux relations

$$\forall a, b \in \mathbf{K} \quad \forall c \in \dot{\mathbf{K}} \qquad \begin{cases} \{a\} =_W \{ac^2\}, \\ \{a\} + \{b\} =_W \{a+b\} + \{ab(a+b)\} \\ \{0\} =_W 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour l'anneau de Witt, il faut rajouter les relations (4.2).

Constructivement, on ne peut pas affirmer pour toute forme quadratique ϕ l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}$ et d'une forme quadratique anisotrope ϕ_{an} telles que $\phi \simeq r\,\mathrm{H} \perp \phi_{an}$. Et on ne peut donc pas identifier les éléments du groupe de Witt aux classes d'isométrie des formes anisotropes. Cela devient possible lorsque l'isotropie est décidable.

On notera $I_W(\mathbf{K}) = I_W$ l'idéal fondamental de $W(\mathbf{K})$ formé par les classes des formes de dimension paire. Les preuves usuelles des isomorphismes $W(\mathbf{K})/I_W \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $I_W/{I_W}^2 \simeq \dot{\mathbf{K}}/\dot{\mathbf{K}}^{(2)}$ sont constructives.

Le groupe de Grothendieck relatif

Une T-*forme sur* $\mathbf{K}$ est une classe d'équivalence de formes quadratiques diagonales non dégénérées pour la relation de T-isométrie. On notera $[\phi]_T$ (ou $[\phi]_{(\mathbf{K},T)}$ s'il faut préciser) cette classe d'équivalence.

Le groupe de Grothendieck $K_T(\mathbf{K}) = K_T$ est le groupe engendré par les T-formes $[\phi]_T$ avec les relations $[\phi]_T + [\psi]_T = [\phi \perp \psi]_T$, légitimées par le fait 3.7 (1). Les éléments du groupe sont tous du type $[\phi]_T - [\psi]_T$. Et on a $[\phi]_T =_{K_T} [\psi]_T$ si et seulement si $[\phi]_T = [\psi]_T$ en vertu de la règle de simplification 3.8 : l'écriture $[\phi] =_{K_T} [\psi]$ est synonyme de $\phi \simeq_T \psi$.

Ce groupe est muni d'une structure d'anneau définie par $[\phi]_T \times [\psi]_T = [\phi \otimes \psi]_T$ légitimée par le fait 3.7 (2).

Il est clair que l'anneau $K_T(\mathbf{K})$ est un quotient de l'anneau $K_{\mathbf{K}}$.

Le groupe de Witt relatif

Le groupe de Witt relatif $W_T(\mathbf{K})$ est le quotient de $K_T(\mathbf{K})$ par l'idéal engendré par les (classes des) formes T-hyperboliques. Cet idéal contient exclusivement les éléments $[\phi]_T$ et $-[\phi]_T$ où ϕ est hyperbolique. Lorsque T est un cone propre, cet idéal est aussi engendré par $\langle 1, -1 \rangle$.

On note $\phi =_{W_T(\mathbf{K})} \psi$ (ou si le contexte est clair $\phi =_{W_T} \psi$) pour l'égalité dans le groupe de Witt relatif. Cela revient à dire que la somme directe $\phi \perp -\psi$ est T-hyperbolique. Et $\phi =_{W_T} 0$ signifie que ϕ est T-hyperbolique.

Lemme 4.5 *Soit $(\mathbf{K}, P)$ un corps ordonné. Alors $K_P(\mathbf{K}) = \mathbb{Z} \cdot [\langle 1 \rangle] \oplus \mathbb{Z} \cdot [\langle -1 \rangle] \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$ et $W_P(\mathbf{K}) = \mathbb{Z}\{1\} \simeq \mathbb{Z}$.*

La définition alternative suivante pour $\phi =_{W_T(\mathbf{K})} \psi$ est claire d'après ce que nous savons. Du point de vue classique on dirait en supposant que T est propre : ϕ et ψ ont la même signature pour tout ordre P prolongeant T.

Lemme 4.6 *Soit $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ et $\theta = \langle c_1, \ldots, c_\ell \rangle$. On a $\phi =_{W_T(\mathbf{K})} \theta$ si et seulement si pour tous $\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k$ $\underline{\varepsilon}' \in \{\pm 1\}^\ell$ tels que $\operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \operatorname{sgn}(\underline{\varepsilon}')$ le cone $T[\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k, \varepsilon'_1 c_1, \ldots, \varepsilon'_\ell c_\ell]$ collapse.*

Nous allons établir dans la section suivante d'autres caratérisations constructives du groupe de Witt relatif à T. En particulier, lorsque T est un cone propre, il peut être décrit comme le groupe abélien engendré par les $\{a\}_{W_T}$ $(a \in \mathbf{K})$ soumis aux relations (4.7) :

$$\forall a, b \in \mathbf{K} \quad \forall t \in \dot{T} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \{a\} =_{W_T} \{at\}\,, \\ \{a\} + \{b\} =_{W_T} \{a+b\} + \{ab(a+b)\} \\ \{0\} =_{W_T} 0 \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Notons enfin qu'en application de notre convention (définition 3.1 (3)), si T collapse alors W_T est réduit à 0.

5 Caractérisations des formes T-hyperboliques

Nous en arrivons au coeur de la relecture du chapitre 1 de [Lam].

Désormais nous supprimons le symbole $\otimes$ dans les produits tensoriels de formes quadratiques.

On a besoin des notions suivantes, dans lesquelles, tant qu'on n'a pas prouvé la proposition 5.8 et le critère 5.11 les formes quadratiques diagonales non dégénérées sont vues de manière purement formelles (comme des matrices diagonales).

Notation 5.1 Soit $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ et S une partie de $\mathbf{K}$. On note $D_S(\phi)$ la plus petite partie de $\mathbf{K}$ stable par addition contenant les $a_i\, b^2\, s$ où $b \in \dot{\mathbf{K}}$ et $s \in \dot{S} = S \setminus \{0\}$.

Si T est un cone $D_T(\phi)$ désigne donc l'ensemble des valeurs $\sum_i a_i t_i$ avec les t_i non tous nuls dans T. Le cone T est trivial si et seulement si $D_T(\langle 1 \rangle) = \mathbf{K}$.

Si S est un *semi-anneau*, c'est-à-dire si $1 \in S$, $S + S \subset S$ et $S\,S \subset S$ alors $D_S(\phi) = D_T(\phi)$ où T est le cone engendré par S.

Définition 5.2 *Une forme quadratique diagonale non dégénérée $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ est dite* T-isotrope *dans les cas suivants :*

– *$k \geq 1$ et $0 \in D_T(\phi)$.*

– *$k = 0$ (ce qu'on a noté $\phi = 0$).*

On aurait aussi pu remplacer le cas $k \geq 1$ par les deux cas séparés :
– $k > 1$ et il existe $t_1, \ldots, t_k$ non tous nuls dans T tels que $\sum_i a_i t_i = 0$,
– $k = 1$ et T collapse.
Remarquez que puisque $\langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, a_1, \ldots, a_k, a_1 a_2, \ldots, a_1 a_2 \cdots a_k \rangle$ on a :

$$T[a_1, \ldots, a_k] = D_T(\langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle) \tag{5.3}$$

On a le lemme suivant, très proche de l'équation précédente.

Lemme 5.4 *Soit $a_1, \ldots, a_k \in \dot{K}$. Pour la forme de Pfister $\Phi = \langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, a_1 \rangle \ \cdots \ \langle 1, a_k \rangle$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *La forme Φ est T-isotrope.*

(2) *Le cone $T[a_1, \ldots, a_k]$ collapse.*

(3) *La forme Φ est T-hyperbolique.*

Preuve On a $\langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, a_1, \ldots, a_k, a_1 a_2, \ldots, a_1 a_2 \cdots a_k \rangle = \langle b_1, \ldots, b_{2^k} \rangle$. On voit facilement que cette forme est T-isotrope si et seulement si le cone $T[a_1, \ldots, a_k]$ collapse. Donnons l'argument constructif complet, sans supposer qu'on sache a priori si le cone T est propre ou non. Les éléments $\sum_j b_j t_j$ avec $t_j \in T$ décrivent le cone $T[a_1, \ldots, a_k]$. Si une somme $\sum_j b_j t_j$ est nulle avec des t_j non tous nuls, on multiplie le tout par un $b_j t_j$ non nul, appelons le $b_\ell t_\ell$ puis par l'inverse de $(b_\ell t_\ell)^2$ et cela permet d'exprimer -1 comme un élément du cone. Inversement si on a une égalité $-1 = \sum_j b_j t_j$, alors ou bien $1 + b_1 t_1 = 1 + t_1 = 0$ et $-1 \in T$ et la forme est évidemment T-isotrope, ou bien $1 + t_1 \neq 0$ et on a $(1 + t_1) + \sum_{j>1} b_j t_j = 0$ avec les coefficients dans T non tous nuls.
L'équivalence de (2) et (3) est le fait 3.14 (1). □

L'essentiel est alors dans la formule magique suivante (formule (1.17) dans [Lam]), dite formule de Witt. On trouve la preuve, élémentaire et constructive, dans les bons livres (par exemple dans [Lam]).

$$2^k \ \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \ =_W \ \sum\nolimits_{\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k} \langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle \ \langle\langle \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k \rangle\rangle \tag{5.5}$$

Puisque $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle =_W \mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \ \langle 1 \rangle$ cette formule peut se relire

$$2^k \ \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \ =_W \ \sum\nolimits_{\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k} \mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \ \langle\langle \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k \rangle\rangle \tag{5.6}$$

Une autre formule très proche est la suivante :

$$k \ 2^k \ \langle 1 \rangle \ =_W \ \sum\nolimits_{\underline{\varepsilon} \in \{\pm 1\}^k} \langle\langle \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k \rangle\rangle \tag{5.7}$$

La proposition élémentaire suivante est la proposition 1.15 de [Lam].

Proposition 5.8 *Soit $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Soit S un semi-anneau qui engendre le cone T.*

(1) *Pour $t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ on a*

$$D_T(\phi) = D_T(r\,\phi) = D_T(\langle t_1, \ldots, t_r \rangle \ \phi)$$

(2) *Pour tout $r > 0$ dans $\mathbb{N}$ la forme ϕ est T-isotrope si et seulement si $r\,\phi$ est T-isotrope.*

(3) *La forme ϕ est T-isotrope si et seulement si pour des $t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ la forme $\langle t_1, \ldots, t_r \rangle \ \phi$ est isotrope (tout court) sur $\mathbf{K}$.*

(4) *La forme ϕ est T-isotrope si et seulement si pour des $s_1, \ldots, s_r \in \dot{S}$ la forme $\langle s_1, \ldots, s_r \rangle \, \phi$ est isotrope (tout court) sur $\mathbf{K}$.*

En particulier la notion de T-isotropie ne dépend que de la classe de T-isométrie.

Le théorème suivant est le théorème 1.16 de [Lam]. Il donne une caractérisation des formes T-hyperboliques en termes du groupe de Witt usuel.

Théorème 5.9 (Principe local-global de Pfister abstrait) *Soit $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Soit S un semi-anneau qui engendre le cone T. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *La forme ϕ est T-hyperbolique.*

(2) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ *tels que* $\langle\langle t_1, \ldots, t_r \rangle\rangle \, \phi =_W 0$.

(3) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ *tels que* $\langle t_1, \ldots, t_r \rangle \, \phi =_W 0$.

(4) $\exists r \in \mathbb{N}\ \exists s_1, \ldots, s_r \in \dot{S}$ *tels que* $\langle s_1, \ldots, s_r \rangle \, \phi =_W 0$.

Preuve L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) résulte des faits 3.2 et 3.12. (2), (3) et (4) sont clairement équivalentes. Pour prouver (1) $\Rightarrow$ (4) on considère la formule magique de Witt. Pour un $\underline{\varepsilon}$ tel que $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) = 0$ on a $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle =_W 0$. Pour un $\underline{\varepsilon}$ tel que $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq 0$ on applique le lemme 5.4 : puisque le cone $T[\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k]$ collapse la forme $\phi_{\underline{\varepsilon}} = \langle\langle \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k \rangle\rangle$ est T-isotrope. La proposition 5.8 (4) nous dit qu'en multipliant par une forme $\langle s_1, \ldots, s_h \rangle$ convenable (les s_i dans $\dot{S}$), la forme $\phi_{\underline{\varepsilon}}$ devient isotrope tout court. A fortiori

$$\langle\langle s_1, \ldots, s_h \rangle\rangle \, \phi_{\underline{\varepsilon}} = \langle\langle s_1, \ldots, s_h, \varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k \rangle\rangle$$

est isotrope, et puisque c'est une forme de Pfister elle est hyperbolique. En prenant l'ensemble de tous les s_i qui apparaissent ainsi (il y a un tel système pour chaque $\underline{\varepsilon}$ tel que $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq 0$) on obtient $\langle\langle s_1, \ldots, s_r \rangle\rangle \, \phi =_W 0$. □

Le corollaire suivant est le corollaire 1.18 de [Lam].

Corollaire 5.10 *Si $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ est T-hyperbolique elle est T-isotrope. La réciproque vaut pour une forme de Pfister.*

Preuve Supposons ϕ T-hyperbolique. Par 5.9 (3), on a une forme $\langle t_1, \ldots, t_r \rangle \, \phi$ qui est hyperbolique, donc a fortiori isotrope, et par 5.8 (3) ϕ est T-isotrope. La deuxième affirmation a déjà été vue dans le lemme 5.4. □

Le critère et le corollaire suivants sont le critère 1.19 et le corollaire 1.20 de [Lam]. Nous ne reproduisons pas les preuves, qui utilisent de manière constructive les résultats précédents.

Critère de représentation 5.11 *Soit $b_1 \in \dot{\mathbf{K}}$ et $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. On a $b_1 \in D_T(\phi)$ si et seulement si on peut trouver $b_2, \ldots, b_k \in \dot{\mathbf{K}}$ tels que $\phi \simeq_T \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$. En particulier $D_T(\phi)$ ne dépend que de la classe de T-isométrie de ϕ.*

Corollaire 5.12 *Pour toute forme ϕ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *ϕ est T-isotrope.*

(2) *$\phi \simeq_T \mathrm{H} \perp \psi$ pour une forme ψ (cas où ϕ est de dimension ≥ 2).*

(3) *ϕ est T-universelle : $D_T(\phi) = \dot{\mathbf{K}}$.*

(4) *Il existe $b \in \dot{\mathbf{K}}$ tel que b et $-b$ sont dans $D_T(\phi)$.*

Le corollaire 1.21 de [Lam] caractérise les éléments du groupe de Witt relatif W_T comme les classes de T-isométrie des formes T-anisotropes. Ceci ne vaut constructivement que si la T-isotropie des formes quadratiques est décidable (en particulier c'est une conséquence constructive du principe du tiers exclu).

Les deux propositions suivantes 1.23 et 1.24 dans [Lam] ont des preuves abstraites (qui utilisent tous les ordres P prolongeant le cone T) et il est intéressant d'en donner des preuves constructives. En comparant, on peut voir que nous n'avons fait que recopier avec un peu de savoir faire ce qu'écrit Lam.

Proposition 5.13 *Pour $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ la classe de $a_1 \cdots a_k$ dans $\dot{\mathbf{K}}/\dot{T}$ ne dépend que de la classe de T-isométrie de ϕ (on l'appelle le* déterminant *de la T-forme ϕ).*

Preuve Soit $\psi = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ T-isométrique à ϕ. Soit $c = \prod_i a_i \prod_i b_i$. Il faut montrer que $c \in \dot{T}$ c'est-à-dire encore que $T[-c]$ collapse. Par le lemme 2.3 il suffit de le faire en attribuant n'importe quels systèmes de signes aux a_i et aux b_i. Considérons donc un cone $T[-c][\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_k a_k, \varepsilon'_1 b_1, \ldots, \varepsilon'_k b_k]$. Si les deux systèmes de signes sont déséquilibrés, cela collapse par hypothèse. S'ils sont équilibrés, alors le cone contient le produit $\prod_i \varepsilon_i a_i \prod_i \varepsilon'_i b_i$ qui est égal à c (il y a autant de ε_i que de ε'_i égaux à -1) donc cela collapse aussi. □

Proposition 5.14 *Les éléments inversibles de l'anneau de Witt relatif $W_T(\mathbf{K})$ sont les classes des formes $\langle a\rangle$ pour $a \in \dot{\mathbf{K}}$. L'application $\dot{\mathbf{K}}/\dot{T} \to W_T(\mathbf{K})$, $a \mapsto \{a\}$ est un isomorphisme de $\dot{\mathbf{K}}/\dot{T}$ sur le groupe des unités de $W_T(\mathbf{K})$.*

Preuve On prend $\phi = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, $\theta = \langle c_1, \ldots, c_\ell\rangle$ avec $\phi\,\theta =_{W_T} \langle 1\rangle$. Si $\phi\,\theta$ est de dimension paire, T collapse et le résultat est clair. Supposons $\phi\theta$ de dimension impaire et $k = 2n+1$, $\ell = 2m+1$.

On prend comme critère d'égalité dans W_T celui donné au lemme 4.6, cela donne ici : pour tout système de signes attribués aux $k\ell$ éléments $a_i c_j$ de signature $\neq 1$ le cone $T[(\sigma_{i,j} a_i c_j)]$ collapse. Par les lemmes 2.4 et 2.5 on peut se contenter d'attribuer des signes ε_i aux a_i et ε'_j aux c_j. Mais alors si $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \pm 1$, quel que soit le système $\underline{\varepsilon}'$ on a $\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon'_j = \mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon})\,\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}') \neq 1$, et cela collapse. Donc par application du lemme 2.3, on peut se débarrasser des c_j et on obtient : tous les cones $T[\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_{2n+1} a_{2n+1}]$ avec $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \pm 1$ collapsent. Nous venons ici de reproduire l'argument suivant dans [Lam] : pour tout ordre P qui prolonge T, puisque $\mathrm{sgn}_P(\phi)\,\mathrm{sgn}_P(\psi) = 1$ on a $\mathrm{sgn}_P(\phi) = \pm 1$.

Soit alors $a = (-1)^n a_1 \cdots a_{2n+1}$. On va montrer que $\phi =_{W_T} \langle a\rangle$. Pour cela on considère un système de signes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n+1}, \sigma$ attribués aux a_i et à a avec la condition $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \sigma$ et on veut montrer que le cone $T_1 = T[\varepsilon_1 a_1, \ldots, \varepsilon_{2n+1} a_{2n+1}, \sigma a]$ collapse. C'est le cas, d'après ce qu'on vient de voir si $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) \neq \pm 1$. Il reste à examiner le cas où $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) = \pm 1$. Alors, par exemple et sans perte de généralité $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ et $\varepsilon_{n+1} = \cdots = \varepsilon_{2n} = -1$, de sorte que $\mathrm{sgn}(\underline{\varepsilon}) = \varepsilon_{2n+1} = -\sigma$. Alors le cone T_1 contient l'élément $\prod_i \varepsilon_i a_i = (-1)^n \varepsilon_{2n+1} \prod_i a_i = -\sigma a$ et il collapse. □

Nous pouvons maintenant recopier sans la changer la preuve du théorème 1.26 (Pfister, Becker-Köpping,…). Nous rajoutons juste une précision dans l'énoncé qui résulte clairement de la preuve.

Théorème 5.15 *On suppose le cone T propre. Le noyau de la projection canonique de $W(\mathbf{K})$ sur $W_T(\mathbf{K})$ est l'idéal J engendré par les classes des formes $\langle 1, -t\rangle$ pour $t \in \dot{T}$. Précisément si ϕ est une forme T-hyperbolique de dimension $2n$ on peut expliciter un entier $r \in \{n, \ldots, n(n+1)/2\}$, r couples $(c_i, t_i) \in \dot{\mathbf{K}} \times \dot{T}$ et une isométrie entre la forme quadratique $\phi \perp (r-n)\,\mathrm{H}_{\mathbf{K}}$ et la somme directe orthogonale $\sum_{i=1}^r c_i\,\langle 1, -t_i\rangle$.*

Preuve On sait que les formes $\langle 1, -t\rangle$ sont T-hyperboliques donc le noyau contient bien l'idéal J. On considère une forme T-hyperbolique $\phi = \langle a_1, \ldots, a_{2n}\rangle$. On va montrer par récurrence sur n que ϕ est dans J. Pour $n = 1$ c'est le fait 3.5 (6). Sinon, on sait que ϕ est T-isotrope. On écrit $\sum_i a_i t_i = 0$ avec les t_i non tous nuls. On pose

$$a'_i = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad t_i = 0 \\ t_i a_i & \text{si} \quad t_i \neq 0 \end{cases}$$

On considère $\phi' = \langle a'_1, \ldots, a'_{2n}\rangle$. On a clairement

$$\phi - \phi' \;=_W\; \sum\nolimits_{t_i \neq 0} a_i\,\langle 1, -t_i\rangle \;\in J.$$

Il suffit donc de montrer que ϕ' est dans l'idéal J. Or $\sum_i a'_i = 0$ donc ϕ' est isotrope et s'écrit $\mathrm{H} \perp \phi_1$ pour une forme ϕ_1 convenable de dimension $2(n-1)$. En fait, si m est le nombre de t_i non nuls, on vient de montrer précisément que $\phi \perp (m-1)\mathrm{H} \simeq_{\mathbf{K}} \phi_1 \perp \sum_{t_i \neq 0} a_i\,\langle 1, -t_i\rangle$. Il ne reste qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence. □

La borne que nous avons précisée permet d'obtenir en retour pour le théorème 5.9.

Corollaire 5.16 *Si une forme ϕ de dimension $2n$ est T-hyperbolique il existe $r \leq n(n+1)/2$ et $t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ tels que $\langle\langle t_1, \ldots, t_r \rangle\rangle\, \phi \simeq_{\mathbf{K}} n\, 2^r\, \mathrm{H}$.*

Preuve Il suffit de prendre les t_i trouvés au théorème 5.15 puisque $\langle 1, t\rangle \langle 1, -t\rangle$ est hyperbolique. □

Définition 5.17 *Deux formes de même dimension $\phi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ et $\psi = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ sont dites* T-équivalentes en chaine *si on peut passer de la liste $(a_1, \ldots, a_n)$ à la liste $(b_1, \ldots, b_n)$ par une suite de transformations des deux types suivants : les permutations dans la liste et les transformations qui correspondent aux équations (4.7) :*

- $(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \mapsto (c_1 + c_2, c_1c_2(c_1 + c_2), c_3, \ldots, c_n)$ *si* $c_1 + c_2 \neq 0$,
- $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \mapsto (c_1t_1, c_2t_2, \ldots, c_nt_n)$ *si* $t_1, \ldots, t_n \in \dot{T}$.

Nous ne reproduirons pas les preuves constructives que [Lam] donne pour les deux conséquences suivantes (théorème 1.28 et corollaire 1.27 dans [Lam]) des résultats précédents.

Théorème 5.18 *Deux formes sont T-isométriques si et seulement si elles sont T-équivalentes en chaine.*

Si les deux formes sont de dimension n le nombre de transformations correspondant aux égalités du type $\{a\} + \{b\} =_{W_T} \{a + b\} + \{ab(a + b)\}$ est majoré par $n(n-1)/2$ et celui des transformations correspondant aux égalités du type $\{a\} =_{W_T} \{at\}$ est majoré par n.

Théorème 5.19 *Lorsque le cone T est propre le groupe de Witt relatif $W_T(\mathbf{K})$ peut être décrit comme le groupe abélien engendré par les symboles formels $\{a\}$ pour $a \in \mathbf{K}$ soumis aux relations (4.7).*

Lorsque T collapse le groupe de Witt relatif est réduit à 0, ce qui est assez moral puisque lorsqu'on rajoute les racines carrées des éléments de T le corps devient non réel, tandis que le groupe défini par générateurs et relations comme en 5.19 devient simplement égal à $\mathbb{Z}/2$.

Résumé de la situation

Nous avons montré constructivement (théorèmes 5.9, 5.15, 5.18 et 5.19) les caractérisations suivantes des formes T-isométriques.

Théorème 5.20 (Synthèse 1) *Soit S un semi-anneau qui engendre le cone T. Pour deux formes quadratiques $\phi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ et $\psi = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ de même dimension n les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Les formes ϕ et ψ sont T-isométriques au sens la définition 3.1, c'est-à-dire au sens de l'existence d'une famille de collapsus.*

(2) *Il existe un entier $r \leq n(n+1)/2$ et $t_1, \ldots, t_r \in \dot{T}$ tels que $\langle\langle t_1, \ldots, t_r\rangle\rangle\, (\phi \perp -\psi) \simeq_{\mathbf{K}} n\, 2^r\, \mathrm{H}$.*

(2′) *Il existe un entier r et $s_1, \ldots, s_r \in \dot{S}$ tels que $\langle\langle s_1, \ldots, s_r\rangle\rangle\, (\phi \perp -\psi) \simeq_{\mathbf{K}} n\, 2^r\, \mathrm{H}$.*

(3) *Il existe un entier $r \leq n(n+1)/2$, r couples $(c_i, t_i) \in \dot{\mathbf{K}} \times \dot{T}$ et une isométrie entre la forme quadratique $\phi \perp -\psi \perp (r-n)\, \mathrm{H}_{\mathbf{K}}$ et la somme directe orthogonale $\sum_{i=1}^{r} c_i\, \langle 1, -t_i\rangle$.*

(4) *Les formes ϕ et ψ sont T-équivalentes en chaine.*

(5) *L'élément $\sum_i\{a_i\} + \sum_i\{-b_i\}$ peut être réduit à 0 dans le groupe abélien engendré par les $\{x\}$ $(x \in \mathbf{K})$ soumis aux relations (4.7).*

Cela fait donc plusieurs systèmes d'identités concernant un cone T d'une part (ou une partie convenable S de $\dot{T}$) et les éléments de deux formes quadratiques diagonales d'autre part, de natures a priori totalement distinctes, qui ont été mis en relation d'être construits tous à partir de n'importe lequel d'entre eux.

En outre, nous n'avons pas changé sensiblement les preuves. Nous avons seulement interprété des preuves abstraites sur des objets purement idéaux comme signifiant des constructions explicites sur des objets concrets.

Concernant les formes T- hyperboliques nous avons démontré.

Théorème 5.21 (Synthèse 2) *Soit S un semi-anneau qui engendre le cone T. Pour une forme quadratique $\phi = \langle a_1, \dots, a_{2n}\rangle$ avec $n \geq 1$. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *La forme ϕ est T- hyperbolique au sens la définition 3.1, c'est-à-dire au sens de l'existence d'une famille de collapsus.*

(2) *Il existe un entier $r \leq n(n+1)/2$ et $t_1, \dots, t_r \in \dot{T}$ tels que $\langle\langle t_1, \dots, t_r\rangle\rangle\ \phi \simeq_{\mathbf{K}} n\,2^r\,\mathrm{H}$.*

(2′) *Il existe un entier r et $s_1, \dots, s_r \in \dot{S}$ tels que $\langle\langle s_1, \dots, s_r\rangle\rangle\ \phi \simeq_{\mathbf{K}} n\,2^r\,\mathrm{H}$.*

(3) *Il existe un entier $r \leq n(n+1)/2$, r couples $(c_i, t_i) \in \dot{\mathbf{K}} \times \dot{T}$ et une isométrie entre la forme quadratique $\phi \perp (r-n)\,\mathrm{H}_{\mathbf{K}}$ et la somme directe orthogonale $\sum_{i=1}^{r} c_i\ \langle 1, -t_i\rangle$.*

(4) *Les formes ϕ et $n\,\mathrm{H}$ sont T- équivalentes en chaine.*

(5) *L'élément $\sum_i \{a_i\}$ peut être réduit à 0 dans le groupe abélien engendré par les $\{x\}$ $(x \in \mathbf{K})$ soumis aux relations (4.7).*

Une conséquence très concrète

Nous donnons une conséquence concrète du théorème précédent, dans le style du 17ème problème de Hilbert.

Théorème 5.22 (Principe local-global de Pfister concret) *Soit $(\mathbf{K}, P)$ un corps ordonné, $\mathbf{R}$ sa cloture réelle, $(Q_i(x_1, \dots, x_n))_{1 \leq i \leq k}$ une liste finie de polynomes non nuls de $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{K}[\underline{x}]$. On considère la forme quadratique diagonale $\phi = \langle Q_1, \dots, Q_k\rangle_{\mathbf{K}(\underline{x})}$ sur le corps $\mathbf{K}(\underline{x})$, avec k pair. Pour tout $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\underline{\xi}) \in \mathbf{R}^n$ on obtient par spécialisation une forme quadratique diagonale $\phi_{\underline{\xi}} = \left\langle Q_1(\underline{\xi}), \dots, Q_k(\underline{\xi})\right\rangle_{\mathbf{R}}$ sur le corps $\mathbf{R}$. Soit T le cone de $\mathbf{K}(\underline{x})$ engendré par P. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout $\underline{\xi} \in \mathbf{R}^n$ la forme quadratique $\phi_{\underline{\xi}}$ est ou bien dégénérée, ou bien hyperbolique.*

(2) *Il existe une forme quadratique $\psi = \langle p_1, \dots, p_r\rangle$ avec les $p_i > 0$ dans $\mathbf{K}$ telle que $\phi \otimes \psi$ est hyperbolique sur $\mathbf{K}(\underline{x})$.*

(3) *La forme ϕ est dans l'idéal de $W(\mathbf{K}(\underline{x}))$ engendré par les formes $\langle 1, -t\rangle$ avec $t \in \dot{T}$.*

(4) *La forme ϕ est T- hyperbolique au sens la définition 3.1.*

Preuve L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (4) est donnée par le positivstellensatz de Stengle [17], dont on peut trouver une preuve constructive dans [9]. Les équivalences entre (2), (3) et (4) viennent d'être démontrées constructivement (par exemple le théorème 5.21 dans lequel on prend $S = P$). □

Conclusion

Comme dans les articles [2, 12, 14, 15] notre décryptage s'appuie sur une *sémantique constructive* pour les objets mathématiques abstraits hypothétiques dont la « construction » utilise le principe du tiers exclu et le lemme de Zorn : cloture algébrique d'un corps, clotures réelles d'un corps réel, anneaux de valuation hypothétiques contenant un anneau intègre donné, spectre de Zariski, spectre maximal, spectre réel, localisations en tous les idéaux maximaux, chaînes croissantes d'idéaux premiers, idéaux premiers minimaux etc...

Nous interprétons ces objets abstraits comme une invitation à travailler avec des spécifications incomplètes (mais plus concrètes) de ces mêmes objets. L'important n'est pas l'objet abstrait lui-même, mais les preuves qui le concernent, car elles peuvent être comprises également comme des preuves constructives concernant ses spécifications incomplètes. La version constructive des théorèmes abstraits que nous obtenons ainsi a exactement la même force que la version classique du point de vue classique. Mais la version constructive fournit, à la fin du roman, le résultat de l'énigme policière sous une forme explicite : par exemple on sait rendre explicite le principe local-global de Pfister concret. Il suffisait de savoir lire entre les lignes.

Nous pensons que cette méthode générale constitue un espoir de réalisation du programme de Hilbert pour l'algèbre abstraite.

Remerciements Je remercie le département de mathématiques de l'Université de Santander pour son hospitalité durant le mois de novembre 2001, pendant lequel l'essentiel de cet article a été rédigé.

Références

[BCR] Bochnak, Coste M., Roy M.-F. *Géometrie Algébrique réelle.* Springer-Verlag. Ergeb. M. n°11. 1987. 3

[BR] Bridges D., Richman F. *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press (1987). 4

[Lam] Lam T. *Orderings, Valuations, and Quadratic Forms.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. 52, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983. (Second Printing : 1996.) 2, 3, 10, 11, 12, 13, 14

[MRR] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, 1988. 3

[1] Cederquist, Coquand T. *Entailment relations and Distributive Lattices* Logic Colloquium '98 (Prague), 127–139, Lect. Notes Log., 13. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, (2000).

[2] Coquand T., Lombardi H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings.* Commutative ring theory and applications. Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 231. M. Dekker. (2002) 477–499 . 3, 5, 15

[3] Coquand T., Lombardi H. *The principal ideal theorem.* In preparation. 3, 5

[4] Coste M., Lombardi H., Roy M.-F. : *Dynamical method in algebra : Effective Nullstellensätze.* Annals of Pure and Applied Logic **111**, (2001) 203–256. 3

[5] Delzell C.N. *Continuous, piecewise-polynomial functions which solve Hilbert's 17th problem.* J. Reine Angew. Math. 440 (1993), 157–173. 4

[6] Delzell C.N., González-Vega L., Lombardi H. *A continuous and rational solution to Hilbert's 17–th problem and several cases of the Positivstellensatz.* in Computational Algebraic Geometry. Eds F. Eyssette and A. Galligo. Progress in Mathematics n°109 (1993), 61–76, Birkhäuser. 4

[7] González-Vega L., Lombardi H. *A Real Nullstellensatz and Positivstellensatz for the Semipolynomials over an Ordered Field.* Journal of Pure and Applied Algebra **90** (1993), 167–188. 4

[8] Johnstone, P. *The point of pointless topology.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** n°1 (1983), 41–53.

[9] Lombardi H. *Une borne sur les degrés pour le Théorème des zéros réel effectif.* 323–345 in : Real Algebraic Geometry. Proccedings, Rennes 1991, Lecture Notes in Mathematics n°1524. Eds. Coste M., Mahé L., Roy M.-F. (Springer-Verlag, 1992) 15

[10] Lombardi H. *Relecture constructive de la théorie d'Artin-Schreier.* Annals of Pure and Applied Logic **91**, (1998), 59–92. 3

[11] Lombardi H. *Platitude, localisation et anneaux de Prüfer : une approche constructive*. Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. 2003. 3

[12] Lombardi H. *Constructions cachées en algèbre abstraite (1) Relations de dépendance intégrale*. Journal of Pure and Applied Algebra **167**, (2002) 259–267. 3, 15

[13] Lombardi H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique*. Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46. 3, 5

[14] Lombardi H. *Constructions cachées en algèbre abstraite (4) La solution du* 17$^{\text{ème}}$ *problème de Hilbert par la théorie d'Artin-Schreier*. Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. 2003. 3, 15

[15] Lombardi H., Quitté C. *Constructions cachées en algèbre abstraite (2) Le principe local global.* Commutative ring theory and applications. Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 231. M. Dekker. (2002) 461–476. 3, 15

[16] Lombardi H., Roy M.-F. *Théorie constructive élémentaire des corps ordonnés.* Publications Mathématiques de Besançon, Théorie des Nombres, 1990-1991. English abridged version : *Constructive elementary theory of ordered fields.* 249–262. in Effective Methods in Algebraic Geometry. Ed. Mora T., Traverso C. Birkhauser 1991. Progress in Math. n°94. 6

[17] Stengle, G. : *A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry.* Math. Ann. 207, 87-97 (1974) 15