page 1

Programa de Poincaré, programa de Hilbert, y matemáticas a la Bishop

Murcia, 05 de junio, 2013

H. Lombardi, Besançon

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr

Proyecto MTM2011-25816-C02-02

Voir les diapos : http://hlombardi.free.fr/publis/MurciaEpistemo2013Slides.pdf

page 2

Resumen

El **programa de Hilbert** es un intento de salvar las matemáticas cantorianas utilizando el formalismo.
Desde este punto de vista, los objetos demasiado abstractos (abstractos hasta el punto de no tener una semántica clara) se sustituyen por sus descripciones formales. Su hipotética existencia se reemplaza por la no contradicción de sus contrapartes formales.
Sin embargo, el programa de Hilbert en su forma finitista original fue arruinado por los teoremas de incompletitud de Gödel.

page 3

Resumen, 2

El **programa de Poincaré** propone reducir el estudio de objetos infinitos cuya semántica no está clara a sus contrapartes puramente finitas.
El libro de análisis constructivo de Bishop (1967) es una especie de realización del programa de Poincaré. También del programa de Hilbert, si reemplazamos requisitos finitistas con requisitos menos estrictos, constructivos.
La metodología de álgebra computacional D5 dio lugar a la idea general de reemplazar los objetos demasiado abstractos (sin existencia real) de las matemáticas cantorianas por sus aproximaciones finitas, y así obtener demostraciones constructivas de la existencia de objetos concretos cuando ésta sea la conclusión de un teorema.
Ilustremos estas ideas con algunos ejemplos.

page 4

Poincaré sobra el Cantorismo

He mencionado antes que hay que ir constantemente a los principios de nuestra ciencia y a los beneficios que puede tener el estudio de la mente humana. Esta necesidad ha inspirado dos intentos que ocupan un lugar muy importante en la historia más reciente de las matemáticas. El primero es el Cantorismo que devolvió a la ciencia los servicios que conocemos. Cantor introdujo en la ciencia una nueva forma de considerar el infinito matemático . . .
Una de las características del Cantorismo es que en lugar de ascender construyendo edificios cada vez más complicados y de definir **por construcción**, parte del **genus supremum** y define sólo **per genus proximum et differentiam specificam**, como habrían dicho los escolásticos

page 5

Poincaré sobra el Cantorismo, continuación

De ahí el horror que inspira a veces a algunas mentes, a Hermite por ejemplo, cuya idea favorita era comparar las ciencias matemáticas con las ciencias naturales.
Para la mayoría de nosotros estos prejuicios se han disipado, pero a cambio nos enfrentamos a algunas paradojas, algunas contradicciones aparentes, que habrían alegrado a Zenón de Elea y la escuela Megara. Y entonces se busca el remedio ...
Cualquiera que sea el remedio adoptado, podemos prometer la alegría del médico llamado a seguir un caso patológico hermoso.
in: l'avenir des mathématiques, 1908

page 6

Poincaré y los axiomas de Zermelo

Sr. Zermelo quiso construir un sistema perfecto de axiomas, pero estos axiomas no pueden considerarse como decretos arbitrarios, ya que haría falta demostrar que estos decretos no son contradictorios, y que, una vez hecha tabula rasa, no tenemos nada sobre que construir una demostración similar. Esto requiere que estos axiomas sean evidentes por sí mismos.
Pero ¿qué mecanismo les generó? Se tomaron axiomas verdaderos para colecciones finitas que no podían extenderse en su totalidad a conjuntos infinitos. Sólo se hizo esta extensión para algunos, elegidos más o menos arbitrariamente.
En mi opinión [...] ninguna proposición sobre conjuntos infinitos puede ser obvia por definición.
in: la logique de l'infini, 1909

page 7

El programa de Poincaré

Por lo que a mí respecta, propondría seguir las siguientes reglas:
1. Considerar sólo objetos susceptibles de ser definidos en un número finito de palabras.
2. No perder de vista jamás que toda proposición sobre el infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado, de proposiciones sobre lo finito.
3. Evitar clasificaciones y definiciones no predicativas.
in: la logique de l'infini, 1909

page 8

El programa de Hilbert

Hilbert admite las críticas de Poincaré y Brouwer. Pero lo que le importa es sobre todo hacer matemáticas. Sin embargo dijo que las matemática son más fáciles de hacer en el paraíso de Cantor que en el infierno de Brouwer.
Hilbert defiende el siguiente lenguaje: en última instancia, poco nos importa saber si existe el infinito actual o no, si la hipótesis del continuo tiene sentido o no; lo que nos importa es si, con la teoría de conjuntos infinitos, se garantiza no demostrar afirmaciones que tienen sentido, pero que son falsas.
Esta es exactamente la misma actitud hacia los números imaginarios utilizados para obtener la raíz real de una ecuación cúbica: lo importante sobre todo es que, una vez llevado a cabo todo el proceso y los números imaginarios evaporados, el resultado sea correcto.

page 9

El programa de Hilbert, continuación

En otras palabras, si pudiéramos reducir el infinito matemático a una mera forma de hablar, estaríamos totalmente satisfechos.
Al no poder aclarar **la semántica** de conjuntos infinitos, por lo menos tratamos de entender **su sintaxis**: entender qué hacemos exactamente cuando usamos conjuntos infinitos en las matemáticas.
Esta posición de retorno puede parecer alarmante, porque implica aritmetizar las matemáticas de una manera radical: el estudio de una teoría formal se reduce al estudio de una sola función recursiva primitiva $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: la función que enumera los números de los teoremas de la teoría.

page 10

El fracaso del programa de Hilbert

Los teoremas de incompletitud de Gödel
1) Ninguna teoría formal puede describir completamente el más simple de los infinitos: $\mathbb{N}$.
2) Para demostrar que una teoría formal suficientemente expresiva es consistente, necesitamos métodos más potentes que las codificadas en la teoría formal.

page 11

Las virtudes del programa de Hilbert

1) Un nuevo campo de las matemáticas: la lógica matemática
2) Esto nos lleva a una aclaración decisiva de Brouwer y Heyting: la distinción entre la lógica de las matemáticas constructivas (intuicionista) y la lógica clásica, que acepta la idea de la verdad absoluta a priori: una propiedad con un significado claro es verdadera o falsa en términos absolutos (Principio del Tercero Excluido).
3) El deseo de encontrar una manera convincente de justificar las idealidades cantorianas. Esto es lo que hacemos hoy, reemplazando requisitos "finitistas" del programa de Hilbert por requisitos constructivos o algorítmicos.

page 12

El análisis constructivo à la Bishop

En **Foundations of Constructive Analysis** (1967), Errett Bishop desarrolla una versión constructiva de la teoría de conjuntos, con la cual *estableció un nuevo tipo de programa de Hilbert*.
Demuestra en un marco totalmente constructivo lo esencial de los teoremas que fundamentan el análisis real y complejo (lo que se enseña hoy en Máster).
Se trata de un *marco matemático minimalista* porque las demostraciones son aceptadas tanto por el matemático convencional, como por todas las variantes de las matemáticas constructivas.

page 13

El programa de Poincaré ¿factible?

De hecho, Bishop realizó el programa de Poincaré. Todos los objetos habituales del análisis, infinitos por definición (números reales, espacios funcionales ...), se manejan en los algoritmos a través de sus aproximaciones finitas.
Estas matemáticas no son las que se ejecutan en el ordenador, ya que la complejidad de los algoritmos es a menudo demasiado grande. Sin embargo proporcionan la base teórica en la cual se fundamenta el análisis numérico.

page 14

Algunas otras referencias

WEYL H. *Le continu et autres écrits.* Traduits et commentés par Jean Largeault. Librairie Vrin (1994).

FEFERMAN S. *In the Light of Logic.* Oxford University Press, (1998).

DOWEK G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier. (2007).

COQUAND T. *La contribution de Kolmogorov en logique intuitionniste.* dans: L'héritage de Kolmogorov en mathématiques. Charpentier E., Lesne A., Nikolski N. (eds). Belin, Paris (2004).

LOMBARDI H. *Épistémologie mathématique*, Ellipse. (2011).

MINES R., RICHMAN F., RUITENBURG W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988)

LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Algèbre Commutative, Méthodes Constructives.* Calvage & Mounet, (2011).

page 15

Vamos a la pizarra a ver algunos ejemplos à la D5