Thierry Coquand
Henri Lombardi

Résolutions libres finies
Méthodes constructives

Fruit d'une collaboration de dix ans entre deux spécialistes confirmés de l'algèbre commutative effective, cet ouvrage reprend et actualise la thématique des « résolutions libres finies » dans un style fluide et entièrement constructif. Dans la littérature internationale, l'exposé toujours cité en référence ultime de la théorie est l'ouvrage « Finite Free Resolutions » de Douglas Northcott.

L'ouvrage présent a pour but d'offrir un traitement complètement constructif de la théorie de Northcott, tout en essayant de rester dans un style suffisamment clair et élégant. Northcott n'a pas toujours réussi à se débarrasser de l'usage des idéaux maximaux ou des idéaux premiers minimaux pour venir à bout de certains résultats, lesquels perdaient alors en partie leur caractère calculatoire effectif. En outre, il a utilisé parfois des arguments d'algèbre homologique déguisés. Enfin, il ne disposait pas à l'époque d'une définition constructive de la dimension de Krull. Aujourd'hui, les progrès accumulés de l'algèbre constructive permettent de surmonter tous les obstacles qui ont empêché Northcott de remplir de manière complètement satisfaisante les buts qu'il s'était fixés. Toutes les définitions et tous les résultats du livre de Northcott sont ici reformulés d'une manière constructive par Thierry Coquand et Henri Lombardi, et chaque résultat ou définition constructive est équivalente en mathématiques classiques au résultat ou à la définition classiques. Les auteurs apportent aussi quelques compléments utiles et donnent dans une postface une étude historique du sujet à travers la traduction commentée d'extraits de textes ayant fait date dans l'histoire du sujet.

Cette publication chez les éditions Calvage & Mounet constitue un événement éditorial. Les chercheurs, étudiantes et enseignants de M1 et M2 sont les premières concernées par ce traité, qui intéressera aussi les spécialistes du Calcul formel.

Thierry Coquand est professeur d'informatique à l'Université de Gothenburg en Suède. Ses recherches concernent les mathématiques constructives, la théorie des types et ses applications pour la représentation des preuves sur ordinateur, et la sémantique des langages de programmation.

Henri Lombardi est maître de conférences honoraire à l'Université de Franche-Comté. Ses recherches concernent les mathématiques constructives, l'algèbre réelle et la complexité algorithmique.

$$\begin{array}{l} 0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{u} P_0 \to M \to 0 \\ 0 \to K' \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_1 \xrightarrow{u'} P'_0 \to M \to 0, \end{array}$$

$$K \oplus \bigoplus_{\substack{k \in [\![0..n-1]\!] \\ k \equiv n-1 \bmod 2}} P'_k \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \in [\![0..n-1]\!] \\ \ell \equiv n \bmod 2}} P_\ell \simeq K' \oplus \bigoplus_{\substack{k \in [\![0..n-1]\!] \\ k \equiv n-1 \bmod 2}} P_k \oplus \bigoplus_{\substack{\ell \in [\![0..n-1]\!] \\ \ell \equiv n \bmod 2}} P'_\ell$$

Collection.— Nano

Calvage & Mounet

www.calvage-et-mounet.fr

ISBN 978-2-49-323013-3

Prix : 25 €

Thierry Coquand, Henri Lombardi

Résolutions libres finies

Méthodes constructives

Calvage & Mounet

Thierry COQUAND est professeur d'informatique à l'Université de Gothenburg en Suède. Ses recherches concernent les mathématiques constructives, la théorie des types et ses applications pour la représentation des preuves sur ordinateur, et la sémantique des langages de programmation. Il est à l'origine de la théorie des constructions, formalisme utilisé dans plusieurs systèmes d'assistants à la démonstration, et a été co-organisateur, avec Vladimir Voevodsky et Steve Awodey, de l'année spéciale 2012-2013 à l'"Institute of Advanced Study", Princeton, sur les "Univalent Foundations of Mathematics". Pour ces travaux en logique, il a obtenu le "Kurt Godel Centenary Research Prize" en 2008.

`coquand@chalmers.se` https ://www.cse.chalmers.se/ coquand/

Henri LOMBARDI est maître de conférences honoraire à l'Université de Franche-Comté. Ses recherches concernent les mathématiques constructives, l'algèbre réelle et la complexité algorithmique. Il a publié entre autres les ouvrages suivants.

▷ *Algèbre commutative. Méthose constructives*, Calvage & Mounet, deuxième édition 2020, en collaboration avec Claude Quitté.

▷ *Modules sur les anneaux commutatifs*, Calvage & Mounet, 2014, en collaboration avec Gema Díaz-Toca et Claude Quitté.

`henri.lombardi@univ-fcomte.fr` `http://hlombardi.free.fr`

Mathematics Subject Classification (2020):

03-Fxx Proof theory and constructive mathematics

13-Dxx Homological methods in commutative ring theory
13-C10 Projective and free modules and ideals in commutative rings
3-C15 Dimension theory, depth, related commutative rings
13-D02 Syzygies, resolutions, complexes and commutative rings
13-D03 (Co)homology of commutative rings and algebras
13-H05 Regular local rings

16-Exx Homological methods in associative algebras
16-E05 Syzygies, resolutions, complexes in associative algebras
16-E65 Homological conditions on associative rings

ISBN 978-2-493230-13-3

9 782493 230133

∞ Imprimé sur papier permanent

Préface

Ce livre témoigne de notre profonde admiration pour l'ouvrage [FFR, Northcott, Finite Free Resolutions. 1976], qui a permis de fonder la théorie des *Résolutions libres finies* sur des bases saines, débarrassées d'hypothèses de noethérianité. Ces hypothèses constituent un obstacle rédhibitoire pour un traitement véritablement explicite des principaux résultats. La noethérianité a pu être rendue inutile par Northcott grâce à la définition de la profondeur proposée par Hochster. Cette définition est basée sur l'idée fondamentale que les bons concepts en algèbre commutative doivent être invariants par extension fidèlement plate.

Nous appuyant sur les progrès récents de l'algèbre constructive, et grâce à la collaboration active de Claude Quitté, nous pouvons désormais offrir une version complètement constructive de la théorie.

Nous démontrons en particulier les versions constructives des théorèmes cruciaux de Vasconcelos, d'Auslander-Buchsbaum-Hoshter et de Buchsbaum-Eisenbud, ce qui était un objectif essentiel de notre livre.

Remerciements

Nous remercions Claude Quitté sans la collaboration active duquel l'ouvrage présent n'aurait jamais pu paraitre. Nous tenons également à remercier les éditions Calvage & Mounet pour le soin particulier qu'elles mettent à la vérification du texte, sa lisibilité et sa mise en page.

Thierry Coquand, Henri Lombardi

10 octobre 2023

Table des matières

Avant-propos **xi**

A. Quelques rappels

Introduction 2
1. Quelques définitions et notations 3
2. Quelques résultats préliminaires 15
3. Modules de rang constant non libres 32

B. Théorie de la profondeur

Introduction 40
1. Suites E-régulières, suites de Kronecker 41
2. Profondeur, propriétés fondamentales 52
3. Suites complètement sécantes 64
4. Le théorème de Wiebe 67
5. Profondeur et suite exacte courte 71
6. Profondeur et dimension de Krull 73
7. Principes local-globals et profondeur 78
Commentaires bibliographiques 84

C. Résolutions libres finies

Introduction 88
1. Rang stable 89
2. Complexes de modules 94
3. Modules librement résolubles 102
4. Idéaux caractéristiques d'un complexe 107
5. Résolutions libres minimales 114

6. Les modules librement résolubles sont stables 121
7. Profondeur et exactitude 127
8. Exemples 135
9. Anneaux réguliers 137
Commentaires bibliographiques 140

D. Complexes de Cayley
Introduction 143
1. Modules de MacRae 144
2. Algèbre extérieure d'un module libre 150
3. Complexes et déterminant de Cayley 154
4. Structure multiplicative des résolutions libres finies . . . 161
5. Le théorème de Hilbert-Burch 164
6. Démonstration du théorème de proportionnalité 166
Commentaires bibliographiques 170

E. Résolutions projectives finies
Introduction 174
1. Préliminaires 175
2. Résolutions et suites exactes courtes 186
3. Résolutions projectives minimales 196
4. Dimensions et profondeur vues dans $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ 199
5. Idéaux caractéristiques 201
6. Structures multiplicatives 205

F. Postface
Introduction 213
1. Quelques commentaires sur le livre de Northcott 213
2. Irving Kaplansky et le lemme de Schanuel 217
3. Recension de [FFR] par Hochster 218
4. Un article de Sharpe (extrait) 225
5. Un article de MacRae (extraits) 229

Références et index
Livres 243
Articles 248

Index des termes **255**

Avant-propos

Quant à moi, je proposerais de s'en tenir aux règles
suivantes :
1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles
d'être définis en un nombre fini de mots ;
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition
sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé
abrégé de propositions sur le fini ;
3. Éviter les classifications et les définitions
non-prédicatives.

Henri Poincaré,
dans *La logique de l'infini*
(Revue de Métaphysique et de Morale, 1909).
Réédité dans *Dernières pensées, Flammarion.*

Le cadre historique naturel de la géométrie
algébrique est celui des polynômes.
Le développement de l'Algèbre moderne,
commencé il y a près d'un siècle,
a renvoyé les anneaux de polynômes
au statut de cas particulier
et les méthodes propres aux polynômes,
comme la *Théorie de l'élimination*,
au conservatoire.
Mais « les objets sont têtus » et les méthodes explicites
ne cessent de ressurgir.
Un calcul est toujours plus général que
le cadre théorique dans lequel on
l'enferme à une période donnée.

Michel Demazure
dans *Résultant, discriminant.*
L'Enseignement Mathématique (2) **58** (2012), 333-373.

Cet ouvrage puise sa source dans le livre [FFR, Northcott, Finite Free Resolutions. 1976] et dans les articles [21, Constructive finite free resolutions. Manuscripta Math. 2012] et [22, An elementary proof of Wiebe's theorem. J. Algebra. 2018].

Il est écrit dans le style des mathématiques constructives à la Bishop ([FCA, Foundations of constructive analysis. 1967]), dans la continuation des ouvrages [CCA, A course in constructive algebra. 1988] et [ACMC, Algèbre commutative. Méthodes constructives. 2021]

Une version anglaise préliminaire de [ACMC] est [CACM, Constructive Algebra. Constructive Methods. 2015]. Elle est disponible avec quelques corrections en [CACM].

Rendre justice à Northcott

En écrivant son livre sur les résolutions libres finies et la théorie de la profondeur, Northcott poursuivait plusieurs buts bien précis. Le premier est de libérer la théorie de toute référence à la noethérianité. Le deuxième est de se libérer d'outils trop sophistiqués de l'algèbre homologique, notamment en adoptant la définition de Hochster [36] pour la profondeur d'un module relativement à un idéal de type fini. Le troisième est de donner un traitement aussi élémentaire que possible des énoncés de la théorie (et nous interpréterons le mot «élémentaire» au sens de «algorithmique»). Voir la préface du livre dont nous donnons la traduction plus loin.

De manière étrange ce livre, salué par la critique et régulièrement cité dans les commentaires bibliographiques comme référence ultime pour la théorie, n'est jamais vraiment utilisé dans les manuels d'algèbre commutative ou de géométrie algébrique.

L'exposé n'est pourtant pas plus compliqué que les exposés habituels, limités au cas noethérien, de ces mêmes théories. C'est ce que démontre le livre de Northcott. Les rares raccourcis qu'offre l'usage intensif de la noethérianité restreignent la portée des théorèmes et surtout ils semblent interdire tout traitement algorithmique du sujet. En effet, dans la version algorithmique de ces théorèmes, ce n'est pas la noethérianité mais la cohérence qui est la propriété décisive. Or, le fait qu'en mathématiques classiques un anneau noethérien soit cohérent n'a aucun contenu algorithmique.

Notre ouvrage a pour but de réparer cet état des lieux en offrant un traitement complètement constructif de la théorie de Northcott, et, nous l'espérons, suffisamment clair et élégant. Quelquefois en effet, Northcott ne réussit pas à se débarrasser de l'usage des idéaux maximaux ou des idéaux premiers minimaux pour venir à bout de certains résultats. En outre il utilise parfois des arguments d'algèbre homologique déguisés. Enfin il ne dispose pas à l'époque d'une définition constructive de la dimension de Krull.

Aujourd'hui les progrès de l'algèbre constructive, en partie résumés dans [CCA], [CACM], [PrfComp], [ECM], et [CCADGB] nous permettent de surmonter tous les obstacles qui ont empêché Northcott de remplir de manière complètement satisfaisante les buts qu'il s'était fixés.

Toutes les définitions et tous les résultats du livre de Northcott sont reformulés d'une manière constructive, et chaque résultat ou définition constructive est équivalente en mathématiques classiques au résultat ou à la définition classiques [1]. La différence est que les formulations sont plus précises et se prêtent à un traitement purement algorithmique. Parfois, la reformulation constructive améliore le résultat classique même du point de vue classique

Une préface instructive

Illustrons notre propos par la préface du livre de Northcott, traduite en français.

« Ce livre (Cambridge Tract) est né des notes d'un séminaire donné par J.A. Eagon alors qu'il visitait l'Université de Sheffield au cours de la session 1972/73. Le but du séminaire était de rendre compte de quelques découvertes récentes de D.A. Buchsbaum et D. Eisenbud concernant les résolutions libres finies. Je me suis retrouvé fasciné par le sujet et Eagon et moi avons eu de nombreuses discussions sur différents aspects du sujet. En fin de compte, nous avons pu construire ce que nous considérions comme un traitement simplifié de certaines parties de la théorie, et nos idées sont ensuite apparues dans un article commun. J'ai continué à réfléchir à ces questions après qu'Eagon ait quitté Sheffield et, en 1973-1974 et 1974-1975, j'ai donné des séminaires couvrant un éventail plus large

1. De manière un peu générale, la définition classique implique (en mathématiques classiques) sa reformulation constructive, et un résultat constructif implique (en mathématiques classiques) le résultat classique qu'il généralise. Cela correspond au point de vue de Fred Richman :

   1. les mathématiques constructives sont les mathématiques (intuitives) pratiquées avec la logique intuitionniste ;
   2. les mathématiques constructives sont une généralisation des mathématiques classiques ;
   3. les mathématiques classiques sont la partie des mathématiques constructives où l'on ajoute comme hypothèses générales le principe du tiers exclu et l'axiome du choix.

   Voir aussi l'interview [47].

de sujets, mais en utilisant toujours ce que je considère comme des méthodes élémentaires. L'approche élémentaire reposait sur la conviction que, pour les sections de la théorie que j'envisageais, les conditions noethériennes n'étaient jamais vraiment nécessaires ; par conséquent, je m'étais promis de montrer que, là où de telles considérations avaient été utilisées auparavant, on pouvait trouver un moyen de s'en débarrasser. Or, les parties de la théorie dans lesquelles les propriétés noethériennes avaient joué à l'origine un rôle apparemment vital concernaient, dans une large mesure, les applications du concept de grade ; et je connaissais depuis un certain temps l'approche de M. Hochster d'une théorie des grades dans laquelle il n'était pas nécessaire de se limiter aux modules noethériens. Ainsi, le programme que je m'étais fixé reposait sur la possibilité d'adapter les idées de Hochster en vue de produire une théorie simplifiée des notes du séminaire que l'on puisse appliquer à des modules généraux sur un anneau commutatif arbitraire. En même temps, la théorie devait être suffisamment riche pour les applications que j'avais en tête.

Les résultats de la tentative de construction d'une théorie appropriée des notes se trouvent au chapitre 5, et avec l'aide de ce qui s'y trouve, le programme original a pu être réalisé. L'un des avantages qui en est ressorti est que le développement des pages suivantes exige remarquablement peu de prérequis. Tout ce qui est requis est une connaissance des propriétés de base des modules et des applications linéaires, et, dans quelques endroits, une facilité à travailler avec des produits tensoriels est présupposée. Pour le reste, à l'exception des annexes, le compte-rendu est tout à fait autonome. En particulier, j'ai résisté à toute tentation d'utiliser la théorie des algèbres extérieures dans le texte principal car, à ce niveau, elle n'est pas particulièrement utile et il y a certains endroits clés où son utilisation semble présenter des inconvénients certains. Bien entendu, il faut s'attendre à ce que, à mesure que la théorie se développe, les considérations structurelles générales jouent un rôle plus important et que les arguments pertinents ad hoc soient de plus en plus difficiles à mettre au point.

J'ai essayé, aux endroits appropriés, d'indiquer comment le sujet des résolutions libres finies s'est développé et de mentionner les noms de ceux qui ont contribué à son développement.

Je voudrais ici remercier ceux qui sont venus à mes conférences et qui m'ont encouragé par l'intérêt continu qu'ils y ont marqué. Je dois ajouter un mot spécial de remerciement à P. Vamos, dont les vastes *connaissances se sont révélées très utiles et dont les commentaires sur des points particuliers ont conduit à de nombreuses améliorations ; et à D.W. Sharpe pour ses discussions sur le rôle des notes dans la théorie des équations linéaires, pour avoir attiré mon attention sur diverses erreurs et pour sa relecture attentive des démonstrations. Je suis également très redevable à C.J. Knight pour son aide invariable sur les questions liées à la topologie. Mais je tiens avant tout à exprimer mon appréciation du travail accompli par ma secrétaire, Mme E. Benson, qui, en produisant l'intégralité de la dactylographie avec son talent et son bon jugement caractéristiques, m'a encore une fois permis de transformer les notes d'un séminaire en un livre. »*

Sheffield, July 1975. D. G. NORTHCOTT

Au sujet de Sharpe, on peut citer l'article remarquable [51] concernant la solution d'un système linéaire quand il admet au plus une solution.

Un autre livre à paraitre

Dans la suite directe de notre livre, un livre de Claude Quitté et Claire Tête va bientôt paraitre dans la collection Orizzonti de Calvage & Mounet. Il traite d'une manière simplifiée l'essentiel de la théorie du résultant multivarié qui a été développée de manière magistrale par Jouanolou dans une suite d'articles de huit cent pages environ.

Les auteurs adoptent un point de vue purement algébrique et privilégient les énoncés explicites. La combinatoire monomiale, les résolutions libres finies et leurs structures multiplicatives y interviennent de manière primordiale. Le complexe de Koszul des systèmes polynomiaux homogènes joue un rôle capital via ses composantes homogènes de degré donné, tout particulièrement en degré critique.

Le contenu de l'ouvrage

Voici maintenant une brève description du contenu de l'ouvrage que vous tenez entre vos mains.

Le chapitre A consiste en un certain nombre de rappels du livre [CACM] concernant la terminologie constructive et quelques résultats de base qui seront utilisés dans la suite de l'ouvrage.

Le chapitre B développe la théorie de la profondeur définie à la Hochster. Dans ce chapitre, les suites régulières occupent une place prépondérante, mais il s'avère qu'elles sont à considérer éventuellement dans des extensions polynomiales de l'anneau de base. Cela permet de se libérer du cadre classique dans lequel les suites régulières ne sont réellement pertinentes que pour les anneaux locaux noethériens. On y trouve un traitement élégant du théorème de Wiebe ainsi que des précisions usuelles (cette fois-ci démontrées constructivement) concernant les relations entre la dimension de Krull et la profondeur. La section finale sur des variantes du principe local-global met en évidence le rôle crucial joué par la profondeur $\geqslant 2$ dans les problèmes d'algèbre linéaire.

Le chapitre C est consacré au cœur du sujet de l'ouvrage : les résolutions libres finies et les résolutions projectives finies. On définit la dimension projective finitaire (restricted projective dimension) des modules localement résolubles. On introduit les idéaux caractéristiques d'un complexe de modules libres de rangs finis et les résolutions libres finies minimales. On définit le rang stable d'une matrice et d'un module de présentation finie et l'on démontre un théorème correspondant, de structure locale, des modules librement résolubles. On démontre les versions constructives des théorèmes cruciaux de Vasconcelos, d'Auslander-Buchsbaum-Hochster et de Buchsbaum-Eisenbud, ce qui était la raison d'être affichée ultime de notre livre.

Le chapitre D traite ce qu'il est aujourd'hui convenu d'appeler les complexes de Cayley et leur déterminant. Le livre de Northcott traite ce sujet, sans lui donner de nom, avec une définition un peu plus restrictive. Tout cela est basé sur les notions de module élémentaire et de module de MacRae. Le déterminant de Cayley joue un rôle déterminant dans la théorie du résultant multivarié. L'exemple historiquement important du théorème de Hilbert-Burch est traité en détail.

Le chapitre E généralise aux résolutions projectives finies les résultats des chapitres C et D.

Le chapitre F est constitué par une postface. La première section est consacrée à un commentaire personnel sur notre lecture de [FFR]. Dans les sections suivantes, nous présentons la traduction de textes qui offrent un intérêt direct en rapport avec l'ouvrage de Northcott [FFR].

Conventions générales

Nous avons essayé de suivre au plus près les préconisations de l'orthographe nouvelle recommandée, telle qu'elle est enseignée aujourd'hui dans les écoles en France. Les accents circonflexes ont presque disparu sur les lettres « i » et « u », « a priori » s'écrit désormais « à priori » et « l'ambigüité » a mis son tréma au bon endroit. On sera sans doute surpris de l'orthographe du mot « corolaire ». Rassurons-nous cependant, l'espagnol, l'italien et le roumain utilisent un seul « l » dans le mot correspondant sans que ni les autochtones ni les Français aient jamais protesté.

Dans tout l'ouvrage, sauf mention expresse du contraire,

$$\boxed{\text{les anneaux sont commutatifs et unitaires}},$$

et les homomorphismes entre anneaux respectent les neutres multiplicatifs. En particulier, un sous-anneau a le même neutre multiplicatif, noté 1, que l'anneau.

Les symboles $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{k}$ désignent toujours des anneaux commutatifs unitaires.

Sauf mention expresse du contraire les symboles

$$h,\ i,\ j,\ k,\ \ell,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r$$

désignent des entiers naturels.

Références

Livres

[GrobBases-AL] William W. Adams et Philippe Loustaunau. *An Introduction to Gröbner Bases.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1994 (cf. p. 139).

[ICA] Michael F. Atiyah et Ian G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Economy. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, 2016 (cf. p. 43).

[FCA] Errett Bishop. *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1967. url : `http://hlombardi.free.fr/Bishop.djvu` (cf. p. xi).

[Bourbaki-A10] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique.* Réimpression de l'édition originale de 1980. Berlin: Springer, 2007 (cf. p. 96).

[Bruns & Herzog] Winfried Bruns et Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay Rings.* T. 39. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993 (cf. p. 105).

[HOMALG-CE] Henri Cartan et Samuel Eilenberg. *Homological Algebra.* T. 19. Princeton Math. Ser. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956 (cf. p. 241).

[Cayley-CMP] Arthur Cayley. *The Collected Mathematical Papers. Volume 1.* Cambridge Library Collection. Reprint of the 1889 original. Cambridge University Press, Cambridge, 2009 (cf. p. 170, 250).

[Modules] Gema M. Díaz-Toca, Henri Lombardi et Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs. Cours et exercices.* Paris: Calvage & Mounet, 2014 (cf. p. 33).

[ECM] H. M. Edwards. *Essays in Constructive Mathematics. With Contribution by David A. Cox.* 2nd edition. Cham, Springer, 2022 (cf. p. xiii).

[CAAG] David Eisenbud. *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry.* T. 150. Berlin: Springer-Verlag, 1995 (cf. p. 140).

[GrobBases-EH] Viviana Ene et Jürgen Herzog. *Gröbner Bases in Commutative Algebra.* T. 130. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2012 (cf. p. 140).

[GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov et A. V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants.* Reprint of the 1994 edition. Mod. Birkhäuser Class. Boston, MA: Birkhäuser, 2008 (cf. p. 170).

[CCR] Sarah Glaz. *Commutative Coherent Rings.* T. 1371. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1989 (cf. p. 138).

[Fields & Rings] Irving Kaplansky. *Fields and rings.* 2nd ed. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1972 (cf. p. 217).

[CACM] Henri Lombardi et Claude Quitté. *Commutative Algebra: Constructive Methods. Finite projective modules.* Algebra and applications, 20. Traduit du français (Calvage & Mounet, Paris, 2011, revu et étendu par les auteurs) par Tania K. Roblot, version révisée sur arXiv. Springer, Dordrecht, 2015. url : `https://arxiv.org/abs/1605.04832` (cf. p. xii, xiii, xv, 2, 3, 5, 15-22, 24-26, 28-32, 36, 40-42, 44, 57, 79, 80, 83, 84, 113, 135, 138, 179, 216).

[ACMC] Henri LOMBARDI et Claude QUITTÉ. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini. Cours et exercices.* Deuxième édition, revue et étendue, du livre paru en 2011. Paris: Calvage & Mounet, 2021 (cf. p. xi, xii, 35, 36).

[CCA] Ray MINES, Fred RICHMAN et Wim RUITENBURG. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Traduction française par Henri Lombardi, révisée par Stefan Neuwirth. *Un cours d'algèbre constructive.* Presses Universitaires de Franche-Comté. 2020. Springer-Verlag, New York, 1988. URL : `http://hal.science/hal-03521758` (cf. p. xi, xiii, 138, 221).

[Deter-MM] Thomas MUIR. *A Treatise on the Theory of Determinants.* Revised and enlarged by William H. Metzler. Dover Publications, Inc., New York, 1960 (cf. p. 229).

[FFR] Douglas G. NORTHCOTT. *Finite Free Resolutions.* Cambridge Tracts in Mathematics, No. 71. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1976 (cf. p. vii, xi, 52, 129, 130, 133, 134, 140, 144, 155, 162, 164, 165, 213, 216, 217, 229).

[Quitté & Tête. Le résultant] Claude QUITTÉ et Claire TÊTE. *Le résultant.* À paraitre. Paris: Calvage & Mounet, 2024 (cf. p. 70).

[Schreyer, Master Thesis] Frank-Olaf SCHREYER. *Die Berechnung von Syzygien mit dem verallgemeinerten Weierstrassschen Divisionssatz.* German. University of Hamburg, Germany (Diss.), 1980 (cf. p. 140).

[PrfComp] Helmut SCHWICHTENBERG et Stanley S. WAINER. *Proofs and Computations.* Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Chicago, IL, 2012, p. xiv+465 (cf. p. xiii, 2).

[Stacks Project] STACKS PROJECT AUTHORS. *Stacks Project.* `https://stacks.math.columbia.edu`. 2024 (cf. p. 7).

[Thèse-Tête] Claire Tête. « Profondeur, dimension et résolutions en algèbre commutative : quelques aspects effectifs. » Manuscript disponible en `http://hlombardi.free.fr/LaTotale.pdf`. 2014 (cf. p. 105, 193).

[CCADGB] Ihsen Yengui. *Constructive Commutative Algebra: Projective Modules over Polynomial Rings and Dynamical Gröbner Bases.* Lecture Notes in Mathematics, 2138. Springer, Cham, 2015. url : `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-19494-3` (cf. p. xiii).

Articles

[1] Maurice Auslander et David A. Buchsbaum. « Homological Dimension in Local Rings ». In : *Trans. Am. Math. Soc.* 85 (1957), p. 390-405 (cf. p. 141, 224, 241).

[2] Maurice Auslander et David A. Buchsbaum. « Codimension and Multiplicity ». In : *Ann. Math. (2)* 68 (1958), p. 625-657 (cf. p. 241).

[3] Maurice Auslander et David A. Buchsbaum. « Homological Dimension in Noetherian Rings. II ». In : *Trans. Am. Math. Soc.* 88 (1958), p. 194-206 (cf. p. 141).

[4] Maurice Auslander et David A. Buchsbaum. « Unique Factorization in Regular Local Rings ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 45 (1959), p. 733-734 (cf. p. 224).

[5] S. Floyd Barger. « A Theory of Grade for Commutative Rings ». In : *Proc. Am. Math. Soc.* 36 (1973). (see also Generic perfection and the theory of grade, Thesis, University of Minnesota, 1970), p. 365-368 (cf. p. 85, 224).

[6] David A. Buchsbaum et David Eisenbud. *Remarks on Ideals and Resolutions.* Sympos. math. 11, Algebra commut., Geometria, Convegni 1971/1972, 193-204 (1973). 1973 (cf. p. 228).

[7] David A. Buchsbaum et David Eisenbud. « What Makes a Complex Exact? » In : *J. Algebra* 25 (1973), p. 259-268 (cf. p. 141, 224).

[8] David A. Buchsbaum et David Eisenbud. « Some Structure Theorems for Finite Free Resolutions ». In : *Adv. Math.* 12 (1974), p. 84-139 (cf. p. 170, 224).

[9] David A. Buchsbaum et David Eisenbud. « Algebra Structures for Finite Free Resolutions, and Some Structure Theorems for Ideals of Codimension 3 ». In : *Am. J. Math.* 99 (1977), p. 447-485 (cf. p. 141).

[10] Lindsay Burch. « On Ideals of Finite Homological Dimension in Local Rings ». In : *Proc. Camb. Philos. Soc.* 64 (1968), p. 941-948 (cf. p. 170).

[11] Gabriele Buriola, Peter Schuster et Ingo Blechschmidt. « A Constructive Picture of Noetherian Conditions and Well Quasi-Orders ». In : *Unity of logic and computation.* T. 13967. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Cham, 2023, p. 50-62 (cf. p. 171).

[12] Paul Camion, L. S. Levy et H. B. Mann. « Linear Equations over a Commutative Ring ». In : *J. Algebra* 18 (1971), p. 432-446 (cf. p. 18, 228).

[13] Arthur Cayley. « On the Theory of Involution in Geometry. » In : *Cambridge and Dublin Math. J.* 2 (1847). (see [Cayley-CMP] p. 259–267), p. 52-61 (cf. p. 170).

[14] Arthur Cayley. « Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes. » In : *J. Reine Angew. Math.* 34 (1847), p. 30-45. url : `zenodo.org/record/2167997` (cf. p. 170).

[15] Arthur Cayley. « On the Theory of Elimination. » In : *Cambridge and Dublin Math. J.* 3 (1848). (see [Cayley-CMP] p. 370–374), p. 116-120 (cf. p. 170).

[16] Thierry Coquand. « Constructive Algebra and Point-Free Topology ». In : *Handbook of Constructive Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press, 2023, p. 150-167 (cf. p. 217).

[17] Thierry Coquand. « The Regular Element Property in Constructive Mathematics ». 2024. url : `https://arxiv.org/abs/2401.15671` (cf. p. 171).

[18] Thierry COQUAND et Henri LOMBARDI. « A Logical Approach to Abstract Algebra ». In : *Math. Struct. Comput. Sci.* 16.5 (2006), p. 885-900 (cf. p. 217).

[19] Thierry COQUAND et Henri LOMBARDI. « Anneaux à diviseurs et anneaux de Krull (une approche constructive) ». In : *Comm. Algebra* 44 (2016), p. 515-567. URL : `https://arxiv.org/abs/1507.02880` (cf. p. 85).

[20] Thierry COQUAND, Henri LOMBARDI et Peter SCHUSTER. « A Nilregular Element Property ». In : *Arch. Math. (Basel)* 85.1 (2005), p. 49-54 (cf. p. 171).

[21] Thierry COQUAND et Claude QUITTÉ. « Constructive Finite Free Resolutions ». In : *Manuscripta Math.* 137.3-4 (2012), p. 331-345 (cf. p. xi, 140).

[22] Thierry COQUAND et Claire TÊTE. « An Elementary Proof of Wiebe's Theorem ». In : *J. Algebra* 499 (2018), p. 103-110 (cf. p. xi, 50, 141).

[23] Florian DIEBOLD. « Greatest Common Divisors Using Homological Algebra. » Bachelor Thesis, Manuscript disponible en `http://hlombardi.free.fr/Florian-thesis.pdf`. 2011 (cf. p. 170).

[24] Jean DIEUDONNÉ. « On Regular Sequences ». In : *Nagoya Math. J.* 27 (1966), p. 355-356 (cf. p. 50).

[25] Lionel DUCOS, Annick VALIBOUZE et Ihsen YENGUI. « Computing Syzygies over $V[X_1,\ldots,X_k]$, V a Valuation Domain ». In : *J. Algebra* 425 (2015), p. 133-145. URL : `http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2014.11.018` (cf. p. 139).

[26] John A. EAGON et Douglas G. NORTHCOTT. « Ideals Defined by Matrices and a Certain Complex Associated With Them. » In : *Proc. Roy. Soc. Ser. A* 269 (1962), p. 188-204 (cf. p. 141).

[27] John A. EAGON et Douglas G. NORTHCOTT. « On the Buchsbaum-Eisenbud Theory of Finite Free Resolutions ». In : *J. Reine Angew. Math.* 262/263 (1973). Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday, p. 205-219 (cf. p. 141, 225, 228).

[28] Harold M. Edwards. « Mathematical Ideas, Ideals, and Ideology ». English. In : *Math. Intell.* 14.2 (1992), p. 6-19 (cf. p. 85).

[29] David Eisenbud, Oswald Riemenschneider et Frank-Olaf Schreyer. « Projective Resolutions of Cohen-Macaulay Algebras ». In : *Math. Ann.* 257 (1981), p. 85-98 (cf. p. 140).

[30] Hans Fitting. « Die Determinantenideale eines Moduls ». German. In : *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 46 (1936), p. 195-228 (cf. p. 242).

[31] Maroua Gamanda, Henri Lombardi, Stefan Neuwirth et Ihsen Yengui. « The Syzygy Theorem for Bézout Rings. » In : *Math. Comput.* 89.322 (2020), p. 941-964. url : `https://arxiv.org/abs/1905.08117` (cf. p. 139, 140).

[32] José Á. Hermida et T. Sánchez-Giralda. « Linear Equations over Commutative Rings and Determinantal Ideals ». In : *J. Algebra* 99.1 (1986), p. 72-79 (cf. p. 18).

[33] José Á. Hermida-Alonso. « Linear Equations over Commutative Rings and Grade Theory ». In : *J. Algebra* 148.2 (1992), p. 497-503 (cf. p. 85).

[34] José Á. Hermida-Alonso. « Linear Equations over Commutative Rings and Finite Free Resolutions ». In : *J. Algebra* 164.2 (1994), p. 452-467 (cf. p. 85).

[35] David Hilbert. « Über die Theorie der algebraischen Formen. » German. In : *Math. Ann.* 36 (1890), p. 473-534 (cf. p. 170, 225).

[36] Melvin Hochster. « Grade-Sensitive Modules and Perfect Modules. » In : *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 29 (1974), p. 55-76 (cf. p. xii, 54, 85, 225).

[37] Melvin Hochster. *Topics in the Homological Theory of Modules over Commutative Rings.* Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional Conference Series in Mathematics. No.24. Providence, R.I.: American Mathematical Society (AMS). VII, 75 p. $ 4.10 (1975). 1975 (cf. p. 225).

[38] Craig HUNEKE. « Hyman Bass and ubiquity: Gorenstein rings ». In : *Algebra, K-Theory, Groups, and Education (New York, 1997)*. T. 243. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999 (cf. p. 141).

[39] Irving KAPLANSKY. « Projective Modules ». In : *Ann. Math. (2)* 68 (1958), p. 372-377 (cf. p. 225, 242).

[40] Henri LOMBARDI, Stefan NEUWIRTH et Ihsen YENGUI. « Generalised Buchberger and Schreyer Algorithms for Strongly Discrete Coherent Rings ». Prépublication. 2024 (cf. p. 140).

[41] R. E. MACRAE. « On the Homological Dimension of Certain Ideals ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 14 (1963), p. 746-750 (cf. p. 242).

[42] R. E. MACRAE. « On an Application of the Fitting Invariants ». In : *J. Algebra* 2 (1965), p. 153-169 (cf. p. 225).

[43] C. PESKINE et L. SZPIRO. « Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck ». In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 42 (1973), p. 47-119 (cf. p. 225).

[44] Daniel QUILLEN. « Projective Modules over Polynomial Rings ». In : *Invent. Math.* 36 (1976), p. 167-171 (cf. p. 225).

[45] Michel RAYNAUD et Laurent GRUSON. « Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module. » In : *Invent. Math.* 13 (1971), p. 1-89 (cf. p. 139).

[46] Fred RICHMAN. « Constructive Aspects of Noetherian Rings ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 44 (1974), p. 436-441 (cf. p. 138).

[47] Fred RICHMAN. « Interview with a Constructive Mathematician ». In : *Modern Logic* 6.3 (1996), p. 247-271 (cf. p. xiii).

[48] Fred RICHMAN. « Flat Dimension, Constructivity, and the Hilbert Syzygy Theorem ». In : *N. Z. J. Math.* 26.2 (1997), p. 263-273 (cf. p. 140).

[49] Fred RICHMAN. « The Regular Element Property ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 126.7 (1998), p. 2123-2129 (cf. p. 171).

[50] Jean-Pierre Serre. « Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens ». In : *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo & Nikko, 1955.* Science Council of Japan, Tokyo, 1956, p. 175-189 (cf. p. 225).

[51] David W. Sharpe. « Grade and the Theory of Linear Equations ». In : *Linear Algebra Appl.* 18 (1977), p. 25-32 (cf. p. xv, 85, 225).

[52] E. Steinitz. « Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. I. » German. In : *Math. Ann.* 71 (1912), p. 328-354 (cf. p. 18).

[53] E. Steinitz. « Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern. II. » German. In : *Math. Ann.* 72 (1912), p. 297-345 (cf. p. 18).

[54] A. A. Suslin. « Projective Modules over Polynomial Rings are Free ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 229.5 (1976). (English translation: Soviet Math. Dokl. 17 (1976), no. 4, 1160–1164.), p. 1063-1066 (cf. p. 225).

[55] James J. Sylvester. « On a Certain Fundamental Theorem of Determinants ». In : *Philosophical Magazine* 4 (1851). Mathematical Papers, vol. 1, pp. 252-255, p. 142-145 (cf. p. 170).

[56] Wolmer V. Vasconcelos. « Annihilators of Modules with a Finite Free Resolution ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1971), p. 440-442 (cf. p. 123, 141).