Aspects constructifs de la dimension de Krull

T. Coquand, H. Lombardi, C. Quitté

Göteborg, Besançon, Poitiers

PACOM 2004 - Tunis

Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr

http://hlombardi.free.fr/

Plan

- Dimension de Krull explicite des anneaux commutatifs
  - Dimension et bord de Krull
  - Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass
  - Le splitting off de Serre et le théorème de Forster

- Treillis distributifs
  - Treillis distributifs et espaces spectraux
  - Treillis quotients et sous-espaces spectraux
  - Treillis distributifs et théories géométriques
  - Dimension de Krull des treillis distributifs
  - Dimension de Heitmann

Références

[1] Kronecker L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grösen.* J. reine angew. Math. **92**, (1882) 1–123.

[2] Van der Waerden. Review Zentralblatt für Math **24**, (1941) 276.

[3] Forster O.. *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring.* Math. Z. **84** (1964) 80–87.

[4] Storch U. *Bemerking zu einem Satz van M. Kneser.* Arch. Math. **23**, (1972), 403–404.

[5] Eisenbud D., Evans E. G., Jr. *Generating modules efficiently : theorems from algebraic K-theory*. J. Algebra **27** (1973), 278–305.

[6] Eisenbud D., Evans E. G., Jr. *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces*. Inventiones math. **19** (1973), 107–112.

[7] Heitmann, R. *Generating non-Noetherian modules efficiently.* Michigan Math. **31** 2 (1984) 167–180.

[8] T.Y. Lam. *Serre's conjecture*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.

[9] Lombardi H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique*. Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46.

[10] Coquand T., Lombardi H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings*. in : Lecture notes in pure and applied mathematics vol 131. M. Dekker. (2002) 477–499.

[11] Coquand T., Lombardi H., Roy M.-F. *An elementary characterisation of Krull dimension.* Preprint 2003.

[12] Th. Coquand. *Sur un théorème de Kronecker concernant les variétés algébriques* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 291–294.

[13] Coquand T., Lombardi H., Quitté C. *Generating non noetherian modules constructively*. À paraître dans Manuscripta Mathematica.

Dimension de Krull explicite des anneaux commutatifs.

Application aux théorèmes de Kronecker, Bass, Serre et Forster

Dimension et bord de Krull

Définition et notation 1.
Si $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* $\mathbf{A}$ *nous noterons* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ *le radical de* $\mathfrak{a}$*.*
Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *nous noterons* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ *par* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$*.*
$\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *est l'ensemble des* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ *(*$n \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$*).*
Cet ensemble est ordonné par la relation d'inclusion qui en fait un treillis distributif avec

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2)
\end{array}
$$

Nous l'appellerons le treillis de Zariski de l'anneau $\mathbf{A}$*.*

Nous noterons par $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{A}$. Un anneau $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull -1 s'il ne possède pas d'idéaux premiers, c'est-à-dire si $\mathbf{A} = 0$.

Définition 2. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $x \in \mathbf{A}$*. Le* bord supérieur de Krull de x dans $\mathbf{A}$ *est l'anneau quotient* $\mathbf{A}_{\mathsf{K}}^{x} := \mathbf{A}/\mathsf{K}_{\mathbf{A}}^{x}$ *où*

$$\mathsf{K}_{\mathbf{A}}^{x} := \langle x \rangle + (\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(0) : x) \tag{1}$$

Nous dirons que $\mathsf{K}_{\mathbf{A}}^{x}$ *est* l'idéal bord de Krull de x.

Le théorème suivant ([11]) donne une caractérisation *inductive élémentaire* de la dimension de Krull (à partir de la dimension -1).

Théorème 3. *Soit un anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *et un entier* $\ell \geq 0$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *La dimension de Krull de* $\mathbf{A}$ *est* $\leq \ell$*.*
- *Pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *la dimension de Krull de* $\mathbf{A}_{\mathsf{K}}^{x}$ *est* $\leq \ell - 1$*.*

De plus le théorème 3 implique la caractérisation élémentaire de cette dimension par des identités algébriques comme dans [10] et [9] :

Corollaire 4. *La dimension de Krull de $\mathbf{A}$ est $\leq \ell$ si et seulement si pour tous $x_0, \ldots, x_\ell$ il existe $a_0, \ldots, a_\ell \in \mathbf{A}$ et $m_0, \ldots, m_\ell \in \mathbb{N}$ tels que*

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell}(1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0$$

En particulier un anneau est zéro-dimensionnel (i.e. $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leq 0$) si et seulement si pour tout x il existe a tel que $x(1 - ax)$ est nilpotent.

Il est facile de prouver que $\mathsf{Kdim}(\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]) = n$ dans le sens du corollaire 4 quand $\mathbf{K}$ est un corps, ou même un anneau zéro-dimensionnel (cf. [10]).
Il est également possible de le montrer avec la dimension de Krull des anneaux géométriques (les $\mathbf{K}$-algèbres de présentation finie). Donc les théorèmes de Kronecker, Bass, Serre et Forster ont un contenu algorithmique clair avec ces anneaux.

Nous avons des algorithmes pour les résultats :

- Si $\mathbf{B}$ est un quotient ou une localisation de $\mathbf{A}$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leq \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
- Si $\mathbf{B}$ est entier sur $\mathbf{A}$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
- Si $(\mathfrak{a}_i)_{1\leq i\leq m}$ sont des idéaux de $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$, alors
$$\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \sup_i \mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i).$$
- Si $(S_i)_{1\leq i\leq m}$ sont des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, alors
$$\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_i \mathsf{Kdim}(\mathbf{A}_{S_i}).$$

Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass

versions non noethériennes de Heitmann

Le théorème a été démontré par Kronecker sous la forme suivante : une variété algébrique dans $\mathbb{C}^n$ peut toujours être définie par $n+1$ équations.
Il fut étendu au cas des anneaux noethériens (van der Waerden, dans [2]) : dans un anneau noethérien de dimension de Krull n, tout idéal a le même radical qu'un idéal engendré par $n+1$ éléments.
La version de Kronecker a été améliorée dans [4], [6] où les auteurs démontrent que n équations sont suffisantes.
Heitmann ([7]) a généralisé la version de van der Waerden au cas non noethérien.
La preuve élémentaire suivante est dans [12].

Lemme 5. *Pour tout* $u, v \in \mathbf{A}$ *nous avons*

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(u,v) &= \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv) \\ &= \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(u+v) \vee \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(uv) \end{aligned}$$

En particulier

$$uv \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(u,v) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(u+v)$$

Théorème 6. (de Kronecker, sans noethériannité)
Soit un entier $n \geq 0$*. Si* $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{A}$ *alors il existe* $x_1, \ldots, x_n$ *tels que*

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \ldots, b_n) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \ldots, b_n + ax_n)$$

Par suite, dans un anneau de dimension de Krull $\leq n$*, tout idéal de type fini a le même radical qu'un idéal engendré par* $n+1$ *éléments.*

Démonstration

Il est clair que la première affirmation implique l'autre : si Kdim $\mathbf{A} \leq n$ et $\mathfrak{J} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_{n+r})$ $(r \geq 2)$ nous obtenons $\mathfrak{J} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + c_1, \dots, b_{n+1} + c_{n+1})$ avec les $c_i \in \left\langle b_{n+2}, \dots, b_{n+r} \right\rangle$.

La preuve du premier point est par récurrence sur n.
Quand $n = 0$ l'anneau est 0 et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$.
Supposons $n \geq 1$. Considérons l'idéal bord de Krull de b_n, $\mathfrak{J} := \mathrm{K}_{\mathbf{A}}^{b_n}$. Puisque $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$ est de dimension de Krull $\leq n-2$ l'hypothèse de récurrence nous donne $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$ tels que

$$\mathrm{D}(a, b_1, \dots, b_{n-1}) = \mathrm{D}(b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a)$$

dans $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$. Ceci signifie que

$$a \in \mathrm{D}(b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a) \quad \text{dans} \quad \mathbf{A}/\mathfrak{J}\,.$$

Nous notons L par $b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1} a$. Par définition de l'idéal bord, l'égalité ci-dessus implique qu'il existe x_n tel que

$$x_n b_n \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(0) \quad \text{et} \quad a \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n)$$

Ensuite $a \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n)$ implique facilement que

$$a \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a)$$

et donc que

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(a, L, b_n) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Puisque $b_n\, x_n\, a \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(0)$ le lemme 5 dit que

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(b_n, x_n a) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(b_n + x_n a),$$

et donc que

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a) = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Le théorème suivant est dû à Bass dans le cas noethérien avec la dimension de Krull. La version non noethérienne avec une nouvelle notion de dimension (inférieure a la dimension de Krull) est de Heitmann.

Théorème 7.
(de Bass, avec la dimension de Krull, sans noethérianité).
Soit $n \geq 0$*. Si* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* $1 \in \langle a, b_1, \ldots, b_n \rangle$ *alors il existe* $x_1, \ldots, x_n$ *tels que*

$$1 \in \langle b_1 + ax_1, \ldots, b_n + ax_n \rangle.$$

Démonstration
Ceci est la première affirmation du théorème de Krull quand $\langle a, b_1, \ldots, b_n \rangle = \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(1)$.
QED

Les deux corollaires suivants sont classiques ([8]).

Un vecteur L de $\mathbf{A}^m$ est dit *unimodulaire* quand ses coordonnées engendrent l'idéal $\langle 1 \rangle$, c'est-à-dire quand $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L) = 1$.

Corollaire 8. *Soit* $n \geq 0$. *Si* $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* $V \in \mathbf{A}^{n+1}$ *est unimodulaire, alors* V *peut être transformé en le vecteur* $(1, 0 \ldots, 0)$ *par manipulations élémentaires.*

Un module est dit *stablement libre* s'il est isomorphe au noyau d'une matrice surjective.

Corollaire 9. *Un module* M *stablement libre de rang* $\geq n + 1$ *sur un anneau* $\mathbf{A}$, *de dimension de Krull* $\leq n$, *est libre.*

Le splitting off de Serre et le théorème de Forster, à la Heitmann

Les versions « sans hypotèse noethérienne » des théorèmes de Serre et de Forster sont de Heitmann [7]. Des preuves élémentaires et constructives se trouvent dans [13].

Manipulations élémentaires de colonnes

Lemme 10. *Si* $a \in \mathbf{A}$, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}) < n$ *et* $L \in \mathbf{A}^n$ *il existe* $X \in \mathbf{A}^n$ *tel que* $a \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(L - aX)$. *De plus nous pouvons prendre* $X = aY$ *avec* $Y \in \mathbf{A}^n$*.*

Démonstration

Premier point dans le théorème de Kronecker.

QED

Corollaire 11. *Soit M une matrice dans $\mathbf{A}^{n\times n}$ et δ son déterminant. Si* Kdim$(\mathbf{A}) < n$ *alors pour tout $C \in \mathbf{A}^n$ il existe $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $\delta \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(MX - C)$. De plus nous pouvons prendre X de la forme δY, $Y \in \mathbf{A}^n$.*

Démonstration

La preuve utilise les formules de Cramer. Soit $\widetilde{M}$ l'adjointe de la matrice M, et $L = \widetilde{M}C$. Nous avons $\widetilde{M}(MX - C) = \delta X - L$ pour toute colonne $X \in \mathbf{A}^n$. Donc l'idéal engendré par les coordonnées de $\delta X - L$ est contenu dans celui engendré par les coordonnées de $MX - C$, et

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(\delta X - L) \leq \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(MX - C)$$

Suivant le lemme 10 nous pouvons trouver *un* $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $\delta \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(\delta X - L)$, et donc $\delta \in \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(MX - C)$ come voulu.
QED

Notation 12. Soit F une matrice dans $\mathbf{A}^{n\times p}$ avec les colonnes $C_0, C_1, \ldots, C_p$, et G la matrice avec les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Nous noterons $\Delta_k(F)$ l'idéal déterminantiel d'ordre k de F (l'idéal engendré par les mineurs ν d'ordre k de F).

Théorème 13. *Fixons $0 < k \leq p$. Supposons que l'anneau $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $< k$. Alors il existe $t_1, \ldots, t_p$ tels que*

$$\mathsf{D}_{\mathbf{A}}(C_0, \Delta_k(F)) \leq \mathsf{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p),$$

Théorème 14. *Supposons que $1 \in \Delta_1(F)$ et que pour chaque $k > 0$ l'anneau $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$ est de dimension de Krull $< k$. Alors il existe $t_1, \ldots, t_p$ tels que le vecteur $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$ est unimodulaire.*
En particulier si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < k$ et $\Delta_k(F) = 1$, il existe un vecteur unimodulaire dans le module image de F.

Nous donnons maintenant une reformulation « avec idéaux premiers », mais non constructive, du théorème 14.

Théorème 15. *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *notons* $r_{\mathfrak{p}}$ *le rang de la matrice* F *vue dans le corps de fractions de* $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$. *Supposons que pour tout* $\mathfrak{p}$ *on ait* $\mathrm{Kdim}(A/\mathfrak{p}) < r_{\mathfrak{p}}$, *alors il existe un vecteur unimodulaire dans le module image de* F. *En outre ce vecteur peut être écrit sous la forme donnée dans le théorème 14.*

Splitting off de Serre, non noethérien, à la Heitmann

Théorème 16. *Soit* M *un* $\mathbf{A}$*-module projectif de rang* $\geq k$ *sur un anneau* $\mathbf{A}$ *tel que* $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} < k$. *Alors* $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$ *pour un module* N.

Modules de présentation finie

Lemme 17. *Considérons un* $\mathbf{A}$*-module* M *de présentation finie, donné par une matrice de présentation* $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$*. Supposons* $\mathbf{A}$ *local. Soit un entier* $k < q$*.*
Alors le module M *est engendré par* k *éléments si et seulement si la matrice* G *contient un mineur inversible d'ordre* $q - k$*.*

Lemme 18. *Considérons un* $\mathbf{A}$*-module* M *de présentation finie, donné par une matrice de présentation* $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$*. Soit un entier* $k < q$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *L'idéal déterminantiel d'ordre* $q - k$ *de* G *contient* 1*.*
- *Après localisation en un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *arbitraire,* $M_{\mathfrak{p}}$ *est engendré par* k *éléments.*

Théorème de Forster

non noethérien, à la Heitmann

La version non noethérienne suivante du théorème de Forster [3] résulte immédiatement du lemme 18 et du théorème 14.

Théorème 19. *Soit M un module de présentation finie sur un anneau $\mathbf{A}$ de dimension de Krull $\leq d$. Si M est localement engendré par r éléments alors M peut être engendré par $d+r$ éléments.*

TREILLIS DISTRIBUTIFS

Espaces spectraux

Théories géométriques

Dimensions de Krull et de Heitmann

Treillis distributifs et espaces spectraux

Les espaces spectraux on été introduits par Stone en 1937 (*Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics.* Cas. Mat. Fys. **67**, (1937), 1–25.) pour interpréter la logique constructive dans un contexte topologique.

La catégorie des espaces spectraux est équivalente à la catégorie opposée à celle des treillis distributifs.

En pratique les espaces spectraux de l'algèbre commutative sont des objets abstraits, inaccessibles sans l'axiome du choix, mais leur contrepartie « treillis distributif » est en général tout à fait simple à définir et peut être traitée par les méthodes constructives.

Un *idéal premier* $\mathfrak{p}$ d'un treillis $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$ est une partie $\mathfrak{i}$ vérifiant

$$0 \in \mathfrak{i} \qquad x, y \in \mathfrak{i} \;\Rightarrow\; x \vee y \in \mathfrak{i} \qquad x \in \mathfrak{i},\, y \leq x \;\Rightarrow\; y \in \mathfrak{i}$$

$$x \wedge y \in \mathfrak{i} \;\Rightarrow\; x \in \mathfrak{i} \text{ ou } x \in \mathfrak{i}$$

Le *spectre d'un treillis distributif* $\mathbf{T}$ est l'ensemble $\mathrm{Spec}\,\mathbf{T}$ de ses idéaux premiers, muni de la topologie suivante : une base d'ouverts est donnée par les

$$\mathrm{D}_{\mathbf{T}}(a) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,\mathbf{T} \mid a \notin \mathfrak{p} \,\}, \quad a \in \mathbf{T}.$$

Un *espace spectral* est un espace topologique homéomorphe à un espace $\mathrm{Spec}\,\mathbf{T}$.

On vérifie que

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a\wedge b) & = & \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a)\cap\mathsf{D}_{\mathbf{T}}(b), & \qquad & \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(0) & = & \emptyset, \\ \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a\vee b) & = & \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a)\cup\mathsf{D}_{\mathbf{T}}(b), & \qquad & \mathsf{D}_{\mathbf{T}}(1) & = & \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Les $\mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a)$ sont exactement les ouverts quasi-compacts. Cela permet de retrouver le treillis distributif à partir de l'espace spectral $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$.

Une *application spectrale* entre espaces spectraux est une application continue qui provient (par dualité) d'un homomorphisme entre treillis distributifs (l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact doit être un ouvert quasi-compact).

Treillis quotients
et sous-espaces spectraux

La notion de *sous espace spectral* est définie comme la notion duale de la notion de *treillis distributif quotient*.

Pour qu'une partie X d'un espace spectral Y soit un sous espace spectral il faut et suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

– La topologie induite par Y fait de X un espace spectral, et
– Les ouverts quasi-compacts de X sont exactement les traces sur X des ouverts quasi-compacts de Y.

Topologie constructible

Lorsqu'on renverse la relation d'inégalité sur un treillis distributif $\mathbf{T}$ on obtient le *treillis opposé* $\mathbf{T}^{\circ}$.

Spec $\mathbf{T}^{\circ}$ a « le même » ensemble sous-jacent que Spec $\mathbf{T}$ mais ses ouverts de base sont les $\mathrm{V}_{\mathbf{T}}(a)$, compléments des $\mathrm{D}_{\mathbf{T}}(a)$.

La *topologie constructible* sur un espace spectral est la topologie dont une base d'ouverts est fournie par :

– les ouverts quasi-compacts d'une part

– leurs compléments d'autre part

Théorème 20. (caractérisations des sous espaces spectraux)

1. *Une partie X d'un espace spectral Y est un sous espace spectral si et seulement si elle est fermée pour la topologie constructible.*

2. *Si Z est une partie arbitraire d'un espace spectral $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbf{T}$ son adhérence pour la topologie constructible est égal à $X = \mathrm{Spec}\,\mathbf{T}'$ où $\mathbf{T}'$ est le treillis quotient de $\mathbf{T}$ défini par la relation de préordre $\preceq$ suivante :*

$$a \preceq b \quad \iff \quad (\mathsf{D}_{\mathbf{T}}(a) \cap Z) \subseteq (\mathsf{D}_{\mathbf{T}}(b) \cap Z) \tag{3}$$

X est le plus petit sous espace spectral de Y contenant Z.

Treillis distributifs
et théories géométriques

Les espaces spectraux interviennent beaucoup en algèbre commutative.

Ce n'est pas un hasard, nous allons expliquer pourquoi.

Pour commencer, remarquons que le spectre de Zariski $\mathrm{Spec}\,\mathbf{A}$ d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ s'identifie canoniquement à l'espace spectral $\mathrm{Spec}(\mathrm{Zar}\,\mathbf{A})$ associé au treillis de Zariski de cet anneau.

Remarquons aussi que les éléments de $\mathrm{Zar}\,\mathbf{A}$ sont des objets concrets définis simplement (une liste finie d'éléments de l'anneau code un élément de $\mathrm{Zar}\,\mathbf{A}$) alors que les éléments de $\mathrm{Spec}\,\mathbf{A}$ sont des objets abstraits en général inaccessibles sans recours à l'axiome du choix.

Théories géométriques

Une *théorie géométrique* $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$ est une théorie formelle du premier ordre dans laquelle les axiomes (les éléments de $\mathcal{A}$) sont tous « géométriques », c'est-à-dire de la forme suivante :

$$A \implies \exists \underline{y^1}\, B_1 \vee \cdots \vee \exists \underline{y^m}\, B_m \tag{4}$$

où A et les B_j sont des *conjonctions de formules atomiques* du langage $\mathcal{L}$ de la théorie formelle et les $\underline{y^j}$ sont des listes de variables, éventuellement vides.

Par exemple les théories équationnelles, mais aussi la théorie des corps, celle des corps ordonnés, celle des corps valués, celle des domaines de Prüfer ... sont des théories géométriques.

Structures algébriques dynamiques

Si $\mathcal{T} = (\mathcal{L}, \mathcal{A})$ est une théorie géométrique, une *structure algébrique dynamique de type* $\mathcal{T}$ est donnée par un ensemble G de générateurs et un ensemble R de relations. Une relation est une formule atomique $P(\underline{x})$ construite sur le langage $\mathcal{L} \cup G$. Elle correspond à l'axiome $\vdash P(\underline{x})$.

Par exemple le corps dynamique $\mathbf{K} = (\mathcal{CD}, (G, R))$, avec l'ensemble de générateurs $G = \{a, b\}$ et l'ensemble de relations $R = \{105 = 0, a^2 + b^2 = 1\}$, correspond à n'importe quel corps de caractéristique 3 ou 5 ou 7 engendré par deux éléments a et b vérifiant $a^2 + b^2 = 1$.

Un anneau commutatif $\mathbf{A}$ peut être considéré comme un corps dynamique. Lorsqu'on lui applique les axiomes des corps, on imagine en fait un idéal premier $\mathfrak{P}$ et on travaillerait avec le corps de fractions $\mathbf{K}$ de $\mathbf{A}/\mathfrak{P}$.

En pratique on doit choisir pour chaque élément a qui se présente au cours d'un calcul s'il est nul ou inversible. Un nombre fini de tels choix (les calculs sont toujours des objets finis ! ! !) revient à sélectionner un ensemble constructible dans le spectre de Zariski de l'anneau.

Le treillis de Zariski et le spectre d'une structure algébrique dynamique

Nous supposons désormais que les théories géométriques qui interviennent ont uniquement des axiomes simples du type suivant

$$P_1(\underline{t_1}), \ldots, P_n(\underline{t_n}) \vdash Q_1(\underline{s_1}), \ldots, Q_m(\underline{s_m}) \tag{5}$$

avec les conventions : chaque P_i et chaque Q_j est un prédicat donné dans la structure, les $\underline{t_i}$ et $\underline{s_k}$ sont des listes de termes, la virgule avant $\vdash$ représente un « et » et la virgule après $\vdash$ représente un « ou ».

C'est par exemple le cas pour la théorie des anneaux intègres, celle des anneaux de valuation, celle des anneaux intègres réels, celle des anneaux intègres ordonnés, celle des anneaux de valuation ordonnés ...

Le *treillis de Zariski* de la structure algébrique dynamique $\mathbf{D} = ((\mathcal{L}, \mathcal{A}), (G, R))$ est le treillis distributif donné par générateurs et relations comme suit :

- les générateurs sont les éléments $P(\underline{t})$ où P est un prédicat arbitraire de $\mathcal{L}$ et $\underline{t}$ une liste de termes clos du langage $\mathcal{L} \cup G$,
- les relations sont données par les axiomes (tous de la forme (5)) : on y subsitue les variables par des termes clos arbitraires et on relit l'axiome comme une relation dans le treillis distributif :
  - $\vdash$ se lit $\leq$,
  - la virgule avant $\vdash$ représente un « $\wedge$ »,
  - la virgule après $\vdash$ représente un « $\vee$ ».

On peut fabriquer ainsi de manière automatique pour un anneau commutatif

- le treillis de Zariski
- le treillis réel
- le treillis valuatif
- le treillis de Zariski réel
- le treillis valuatif ordonné

Les spectres de ces treillis sont les spectres correspondants de l'algèbre commutative. En effet ... / ...

Le treillis de Zariski de $\mathbf{D}$ n'est autre que le treillis des

« valeurs de vérité des faits énoncés dans $\mathbf{D}$ ».

Précisément :

Théorème 21. *Tout élément de* Zar$(\mathbf{D})$ *est donné par une conjonction de disjonctions de « faits ». En outre, pour des faits* $P_1(\underline{t_1}), \ldots, P_n(\underline{t_n})$ *et* $Q_1(\underline{t'_1}), \ldots, Q_m(\underline{t'_m})$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

– *On a dans* Zar$(\mathbf{D})$

$$P_1(\underline{t_1}), \ldots, P_n(\underline{t_n}) \vdash_{\mathsf{Zar}(\mathbf{D})} Q_1(\underline{t'_1}), \ldots, Q_m(\underline{t'_m})\,.$$

– *On peut démontrer l'implication*

$$P_1(\underline{t_1}), \ldots, P_n(\underline{t_n}) \vdash Q_1(\underline{t'_1}), \ldots, Q_m(\underline{t'_m})$$

dans la théorie géométrique correspondant à la structure algébrique dynamique $\mathbf{D}$.

Une autre version du théorème précédent, plus abstraite, mais fondamentalement équivalente se lit comme suit.

L'ensemble des modèles minmaux d'une structure algébrique dynamique D est en correspondance bijective naturelle avec $\mathsf{Spec}(\mathsf{Zar}\,\mathrm{D})$ **: le spectre de son treillis de Zariski.**

En résumé :

quand on raisonne avec les spectres en algèbre commutative, on fait surtout du calcul sur des treillis distributifs ! ! ! ! !

Dimension de Krull des treillis distributifs

La *dimension de Krull* d'un treillis distributif est définie comme en algèbre commutative : c'est la borne supérieure des longueurs des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers. Une caractérisation constructive élémentaire est la suivante :

Soit x un élément d'un treillis distributif $\mathbf{T}$.
$(0 : x)$ désigne l'idéal formé par les y tels que $y \wedge x = 0$.
À l'adhérence de $\mathrm{D}_{\mathbf{T}}(x)$ correspond le treillis quotient

$$\mathbf{T}/((0 : x) = 0)$$

et à la frontière de $\mathrm{D}_{\mathbf{T}}(x)$ correspond le treillis quotient

$$\mathbf{T}^x_{\mathrm{K}} = \mathbf{T}/((0 : x) = 0, x = 0)$$

Le treillis $\mathbf{T}^x_{\mathrm{K}}$ sera appelé *le bord de Krull de x dans $\mathbf{T}$*.

Alors pour $\ell \geq 0$ on a l'équivalence :

$$\text{Le treillis } \mathbf{T} \text{ est de dimension } \leq \ell.$$

$$\Longleftrightarrow$$

Pour tout $x \in S$ le bord $\mathbf{T}_{\mathsf{K}}^{x}$ est de dimension $\leq \ell - 1$.

En conséquence la dimension de Krull de tous les espaces spectraux de l'algèbre commutative possède une définition constructive élémentaire « sans recours aux objets abstraits que sont les points de ces spectres. »

Dimension de Heitmann des treillis distributifs

Dans sa « révolution non noethérienne » Heitmann a remarqué que le j-spectrum d'un anneau commutatif n'était pas toujours un espace spectral. Or les seuls théorèmes connus concernant le j-spectrum fonctionnaient uniquement dans le cas noetérien. Et dans le cas noethérien le j-spectrum est un espace spectral.

Il a donc proposé de remplacer le j-spectrum par un J-spectrum qui soit toujours un espace spectral, et avec ce J-spectrum il a étendu certains théorèmes connus pour le j-spectrum au cas non noethérien.

Le J-spectrum de Heitmann (pour un treillis distributif $\mathbf{T}$, en fait, lui ne s'intéressait qu'aux anneaux commutatifs) est l'adhérence du spectre maximal dans le spectre de Zariski, adhérence à prendre au sens de la topologie constructible.

Cela correspond au treillis quotient de $\mathbf{T}$ défini par la relation de préordre $\preceq$ suivante :

$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \mathsf{J}_{\mathbf{T}}(b) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbf{T}\ (a \vee x = 1 \Rightarrow b \vee x = 1)$$

Dans le cas d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ le treillis de Heitmann est l'ensemble des :

$\mathsf{J}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) =$ le radical de Jacobson de l'idéal $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Enfin, en décryptant les preuves de Heitmann (terriblement abstraites) pour en faire des preuves constructives élémentaires, on s'est aperçu qu'une meilleure notion de dimension (on l'a appelée la dimension de Heitmann) que celle du J-spectrum suffisait à faire les preuves, par récurrence en utilisant une bonne notion de bord.

C'est la suivante :

Définition 22. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $x \in \mathbf{A}$. *Le* bord de Heitmann de x dans $\mathbf{A}$ *est l'anneau quotient* $\mathbf{A}_{\mathsf{H}}^{x} := \mathbf{A}/\mathsf{H}_{\mathbf{A}}^{x}$ *où*

$$\mathsf{H}_{\mathbf{A}}^{x} := \langle x \rangle + (\mathsf{Rad}(\mathbf{A}) : x)$$

Nous dirons que $\mathsf{H}_{\mathbf{A}}^{x}$ *est* l'idéal bord de Heitmann de x.