

# Transformation homographique appliquée à un développement en fraction continue fini ou infini

Labhalla Salah Université de Marrakech

Lombardi Henri Besançon Université de Franche Comté

## Résumé :

Salah LABHALLA. Département de Mathématiques. Université de Marrakech. Bd de SAFI. BP S 15. MARRAKECH MAROC

Henri LOMBARDI. Laboratoire de Mathématiques. URA CNRS 741. Université de Franche-Comté. 25030 BESANÇON Cédex FRANCE.

Transformation homographique appliquée à un développement en fraction continue fini ou infini. Acta Arithmetica.

Nous étudions le développement en fraction continue de  $(a.x+b)/(c.x+d)$  en fonction du développement en fraction continue de  $x$  lorsque les coefficients de la fonction homographique sont entiers. Pour le cas où  $x$  est rationnel nous améliorons les algorithmes et les majorations de Mendès France. Pour le cas où  $x$  est réel, nous donnons un résultat de continuité uniforme qui montre que les algorithmes fonctionnent aussi dans ce cas.

**Mots clés :** développement en fraction continue, transformation homographique de la droite réelle.

**Classification AMS :** 11A55

## Abstract :

Salah LABHALLA. Département de Mathématiques. Université de Marrakech. Bd de SAFI. BP S 15. MARRAKECH MAROC

Henri LOMBARDI. Laboratoire de Mathématiques. URA CNRS 741. Université de Franche-Comté. 25030 BESANÇON Cédex FRANCE.

Linear functional transformation applied to finite or infinite continued fractions. Acta Arithmetica.

We study the continued fraction of  $(a.x+b)/(c.x+d)$  from the continued fraction of  $x$  when the linear functional transformation has integer coefficients. When  $x$  is a rational number we improve the algorithms and bounds given by Mendès France. When  $x$  is arbitrary, we prove a uniform continuity result and this shows that algorithms work also in this case.

**Key words :** continued fractions, linear functional transformation of the real line

## Introduction

Soit  $m$  un entier positif et  $x$  un nombre rationnel. L'algorithme de Mendès France ([Men1]) permet de calculer le développement en fraction continue de  $m.x$  à partir de celui de  $x$  sans passer par le calcul du rationnel  $x$ . Cet algorithme permet en conséquence d'obtenir des informations de nature théorique sur la manière dont se comporte "la multiplication par  $m$ " lorsqu'elle est vue comme portant directement sur les développements en fraction continue. Dans [Men1] par exemple, Mendès France obtient la borne suivante. Notons  $\theta(m)$  la longueur maximum des développements en fraction continue "pairs" pour les rationnels de dénominateur  $m$ , et notons  $\mathbf{lf}(x)$  la longueur du développement en fraction continue de  $x$  (pour  $x$  rationnel). Alors, si  $x$  est un rationnel positif, on a :  $\mathbf{lf}(mx) \leq (\mathbf{lf}(x) - 1) \theta(m) + 1$ .

Dans la suite, nous abrégeons "développement en fraction continue" par dfc.

Des majorations analogues mais plus compliquées sont obtenues dans [Men2] pour  $\mathbf{lf}((a.x+b)/(c.x+d))$  lorsque  $a, b, c, d$  sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble).

Dans l'article présent, nous constatons que l'algorithme de [Men1] calcule en fait le dfc de  $(a.x+b)/d$  pour  $x$  rationnel et  $a, b, d$  entiers avec  $a.d > 0$ .

Ceci nous permet de simplifier l'algorithme donné dans [Men2] et nous en déduisons une meilleure majoration pour  $\mathbf{lf}((a.x+b)/(c.x+d))$ . Si on note  $\mathbf{lfp}(x)$  et  $\mathbf{lfi}(x)$  les longueurs des développements en fraction continue pair et impair de  $x$  on a précisément le résultat suivant.

**Théorème 2 :** Soit un rationnel  $x$ , des entiers  $a, b, c > 0, d$ . On suppose  $a, b, c$  et  $d$  premiers entre eux dans leur ensemble et le déterminant  $\Delta = a.d - b.c \neq 0$ .

Alors, si  $\Delta > 0$ , on a

$$(\mathbf{lf}(x) - \mathbf{lfi}(-d/c) - 2) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{lf}\left(\frac{a.x + b}{c.x + d}\right) \leq \mathbf{lf}(x) \theta(\Delta) + \mathbf{lfi}(a/c) + 2$$

et si  $\Delta < 0$ , on a

$$(\mathbf{lf}(x) - \mathbf{lfp}(-d/c) - 2) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{lf}\left(\frac{a.x + b}{c.x + d}\right) \leq \mathbf{lf}(x) \theta(\Delta) + \mathbf{lfp}(a/c) + 2$$

Enfin ces résultats restent valables pour le cas  $c = 0$  si nous prenons conventionnellement

$$\mathbf{lfi}(\infty) = -2 \text{ et } \mathbf{lfp}(\infty) = -1$$

Enfin nous montrons (théorème 3) que les  $k$  premiers termes du développement en fraction continue de  $(a.x+b)/(c.x+d)$  ne dépendent que des  $k \theta(a.d - b.c) + \mathbf{lf}(-d/c) + 3$  premiers termes du développement en fraction continue de  $x$ .

Ce résultat de continuité uniforme "lipschitzienne", bien que découlant intuitivement du théorème 2, semble a priori assez surprenant, dans la mesure où il s'agit d'un résultat de continuité uniforme et non de continuité en tout point. Cela permet aussi de montrer que, lorsque  $x$  est irrationnel, le développement en fraction continue de  $(a.x+b)/(c.x+d)$  peut être calculé par "le même algorithme".

## 1) Rappels sur les fractions continues.

Soit  $a_0$  un entier et  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  une suite finie d'entiers strictement positifs. Nous notons par  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/$  la fraction continue finie :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Dans le cas d'une suite infinie, nous notons également  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots/$  la fraction continue infinie.

Alors chaque nombre irrationnel  $x$  a une unique représentation en fraction continue infinie et chaque nombre rationnel  $x$  a une unique représentation en fraction continue finie

$$/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/ \text{ avec } a_n > 1 \text{ si } n \geq 1.$$

En outre  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/ = /a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1/$  (avec  $n \geq 0$ ).

On en déduit que tout rationnel  $x$  a une unique représentation en fraction continue finie

$$/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/ \text{ avec } n \text{ pair.}$$

Il existe également un unique développement en fraction continue se terminant avec  $n$  impair.

**Terminologie et notation :** Dans la suite, nous dirons **dfc pair** (resp. **dfc impair**) pour un dfc se terminant sur un indice pair (resp. impair). Pour un rationnel  $x$  on notera

- **lf(x)** la longueur du dfc de  $x$ ,
- **lfp(x)** la longueur (impaire) du dfc pair de  $x$ ,
- **lfi(x)** la longueur (paire) du dfc impair de  $x$ ,
- pour un entier positif  $m$  on note  $\theta(m)$  la longueur maximum des développements en fraction continue “pairs” pour les rationnels de dénominateur  $m$ , c.-à-d. encore le maximum des **lfp(i/m)** pour  $i = 0, \dots, m-1$ . Enfin par convention  $\theta(-m) = \theta(m)$ . Notez que  $\theta(\pm 1) = 1$ .

Les fonctions  $\psi(x)$  et  $\psi^*(x)$  dans [Men1] sont respectivement égales à **lf(x) – 1** et **lfp(x) – 1**. À un développement en fraction continue ordinaire  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/$  est associée une fonction homographique  $z \mapsto /a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z/$ , qui est la composée des fonctions  $z \mapsto /a_i, z/ = a_i + 1/z$ .

Ceci permet d'attribuer une signification claire à l'écriture  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z/$  pour n'importe quelles valeurs réelles des  $a_i$ , avec  $z$  et  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z/$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , et donc aussi à  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/ = /a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \infty/$ .

**Terminologie :** Si un rationnel  $x$  est égal à un développement  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/$  avec des entiers  $a_i$  qui ne respectent pas la condition d'être strictement positifs pour tous les  $i > 1$  on dira que  $/a_0, a_1, a_2, \dots, a_n/$  est un **faux dfc** de  $x$ . Un rationnel  $x$  a donc deux vrais dfc (son dfc pair et son dfc impair) et ... beaucoup de faux dfc.

Notez qu'on a pour tout  $k < n$

$$/a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n/ = /a_0, a_1, \dots, a_k, (/a_{k+1}, \dots, a_n/)/$$

ce qui permet d'attribuer raisonnablement la valeur  $\infty$  au vide //.

Lorsqu'on représente les fonctions homographiques par des matrices (définies à un scalaire multiplicatif près), la fonction  $z \mapsto / a_i, z /$  correspond à la matrice  $\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et la fonction  $z \mapsto / a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, z /$  correspond au produit des matrices

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notez qu'un produit vide de matrices est raisonnablement égal à la matrice identité, qui correspond à la fonction homographique  $x \mapsto x$  laquelle prend bien la valeur  $\infty$  en  $\infty$ .

**Terminologie :** Si on considère un développement en fraction continue  $/ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n /$  (vrai ou faux) formé d'entiers, et si on a :

$$\begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on dit que l'élément  $u/v$  de  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  est le  $(i+1)$ -ème convergent du dfc (alors  $u'/v'$  est le  $i$ -ème convergent du dfc)

## 2) Calcul du développement en fraction continue de $(a.x+b)/d$ à partir du développement en fraction continue de $x$

### 2.1) Premier algorithme

Nous donnons dans cette section un algorithme analogue à celui donné par [Men1] et bien explicité dans [Coh]. Il conduit à un faux dfc du rationnel  $(a.x+b)/d$ . Il est basé sur le lemme suivant qui est l'analogue matriciel des lemmes 1 et 2 dans le papier cité.

**Lemme 1 :** On considère des entiers  $a > 0$ ,  $b$  arbitraire,  $d > 0$  et  $v$  arbitraire.

On note  $/ e_0, e_1, e_2, \dots, e_{2s} /$  le dfc pair de  $(a.v + b)/d$ .

On note  $g = \text{pgcd}(|a.v + b|, d)$ ,  $a' = (a.v + b)/g$ ,  $d' = d/g$ ,  $d''$  le dénominateur de l'avant dernier convergent, c.-à-d. encore que  $a'$ ,  $d'$  et  $d''$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} a' & a'' \\ d' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} e_{2s} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} e_{2s} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & -d''a \\ 0 & d'a \end{pmatrix} \quad (*)$$

avec  $0 \leq d'' < d'$ . Le cas  $d'' = 0$  correspond au cas où  $s = 0$ , c.-à-d.  $(a.v + b)/d$  entier.

*preuve* > La propriété  $0 \leq d'' < d'$  est bien connue et résulte de ce que les  $e_i$  sont  $> 0$  pour  $i \geq 1$ . Le calcul de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a' & a'' \\ d' & d'' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d'' & a'' \\ d' & -a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a.v+b & a \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

fournit facilement les termes  $0$ ,  $d'a$  et  $-d''a$  de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} g & -d''a \\ 0 & d'a \end{pmatrix}$$

Enfin le dernier coefficient est  $g$  puisqu'on sait que le déterminant de  $A$  est égal à  $a.d$ .  $\square$

Remarquez que l'égalité (\*) signifie qu'on peut remplacer le produit d'une matrice du type  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  et d'une matrice du type  $\begin{pmatrix} v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  par le produit de plusieurs matrices du type  $\begin{pmatrix} v & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et d'une matrice du type  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

On en déduit l'algorithme suivant :

**Algorithme 1 :**

**Entrées :** Des entiers  $a > 0$ ,  $b$  arbitraire,  $d > 0$  et le dfc  $/x_0, x_1, x_2, \dots, x_n/$  d'un nombre rationnel  $x$ . On note  $\Delta$  le déterminant  $a.d$

**Initialisation :**  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ ,  $d_0 = d$

**Étape n° k :** (pour  $k$  de 0 à  $n$ ). On calcule  $/e_{k,0}, e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,2s_k}/$  le dfc pair de  $(a_k.x_k + b_k)/d_k$ . On note  $\lambda_k$  la liste  $[e_{k,0}, e_{k,1}, e_{k,2}, \dots, e_{k,2s_k}]$ .

Si  $k < n$  on fait quelques calculs supplémentaires :

- $a_{k+1} = \text{pgcd}(|a_k.x_k + b_k|, d_k)$ ,
- $d_{k+1} = \Delta/a_{k+1}$  et
- $b_{k+1} = -f_k a_k$  où  $f_k$  est "le dénominateur de l'avant dernier convergent" du dfc  $\lambda_k$  : notez qu'on a  $-d_{k+1} < b_{k+1} \leq 0$  et que  $b_{k+1} = 0$  ssi  $(a_k.x_k + b_k)/d_k$  est entier (cf. lemme 1)

**Sortie:** la liste concaténée des  $\lambda_k$  :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = [e_{0,0}, e_{0,1}, e_{0,2}, \dots, e_{0,2s_0}, \dots, e_{n,0}, e_{n,1}, e_{n,2}, \dots, e_{n,2s_n}]$$

**Proposition 1 :** La sortie de l'algorithme 1 lorsque les entrées vérifient les hypothèses indiquées,

fournit un développement en fraction continue (en général faux) de  $(a.x+b)/d$  :  $/e_{0,0}, e_{0,1}, e_{0,2}, \dots, e_{0,2s_0}, \dots, e_{n,0}, e_{n,1}, e_{n,2}, \dots, e_{n,2s_n}/$

*preuve*> L'égalité matricielle obtenue par application répétée du lemme 1, montre en fait le résultat un peu plus fort : la fonction homographique associée au faux dfc calculé est égale à la composée

$$(z \mapsto (a.z+b)/d) \circ (z \mapsto /x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, z/)$$

Les faits suivants, concernant le faux dfc calculé par l'algorithme, sont expliqués en même temps qu'énoncés.

**Faits 1 :** Dans le faux dfc obtenu, tous les entiers sont strictement positifs sauf éventuellement les  $e_{k,0}$  qui peuvent être égaux à 0 ou  $-1$  pour  $k = 1, \dots, n$  (et avec  $e_{0,0}$  arbitraire).

En outre,

- la longueur du faux dfc obtenu est majorée par  $\theta(\Delta) \mathbf{If}(x)$  (clair)
- si un  $e_{k,0}$  avec  $k \geq 1$  est égal à  $-1$ , l'entier  $b_k$  est  $< 0$  et le rationnel  $(a_k.x_k + b_k)/d_k$  est strictement compris entre  $-1$  et  $0$ , donc la longueur de  $\lambda_{k-1}$  et celle de  $\lambda_k$  sont  $\geq 3$ . Ainsi un terme  $-1$  non initial est toujours précédé et suivi de deux termes  $> 0$
- si une liste  $\lambda_k$  est de longueur 1, et si  $k < n$  l'entier  $b_{k+1}$  est nul et le rationnel  $(a_{k+1}.x_{k+1} + b_{k+1})/d_{k+1}$  est  $> 0$ . Ainsi deux termes 0 consécutifs sont nécessairement

suivis de deux termes  $> 0$ . Remarquez cependant que le faux dfc peut très bien se terminer par un  $0$ .

## 2.2) Algorithme de réécriture d'un faux dfc

Nous passons maintenant à la deuxième phase de l'algorithme de Mendès France, qui consiste à rétablir le "faux dfc" dans sa forme normale.

La version donnée dans [Men2] est plus générale, et, nous semble-t-il, plus convaincante que celle donnée dans [Men1].

Avec l'algorithme de [Men2] tout "faux dfc" peut être transformé en un vrai dfc au moyen de «transformations élémentaires».

Les notations sont les suivantes :

- $a, b, c$ , désignent des entiers  $\geq 1$
- $y, z$  désignent des entiers arbitraires
- $\lambda$  et  $\lambda'$  désignent des listes d'entiers arbitraires, *éventuellement vides*
- $\mu$  désigne une liste d'entiers  $\geq 1$ , *éventuellement vide*

Dans une première phase, on utilise systématiquement (jusqu'à épuisement des possibilités) la règle de contraction suivante :

$$(0) \quad \lambda \cdot [y, 0, z] \cdot \lambda' \mapsto \lambda \cdot [y+z] \cdot \lambda'$$

Dans une deuxième phase, on déplace systématiquement vers la gauche le dernier terme  $\leq 0$  de la liste (sauf la tête de liste) en utilisant les règles suivantes.

Les deux premières règles concernent les termes  $0$  ou  $< 0$  en fin de liste, mais pas en début de liste

$$(1) \quad \lambda \cdot [y, 0] \mapsto \lambda$$

$$(2) \quad \lambda \cdot [y, -c] \mapsto \lambda \cdot [y-1, 1, c-1] \text{ suivi de (1) si } c=1$$

Notez que dans les deux cas, le numéro d'ordre du dernier terme  $\leq 0$  dans la liste à diminué strictement. Toutes les règles vérifieront cette propriété, qui assure la correction de l'algorithme 2.

Les règles suivantes de (3) à (9) concernent un terme  $\leq 0$  qui n'est ni en fin de liste, ni en début de liste, et qui est suivi par uniquement des termes  $> 0$ . On traite d'abord le cas d'un terme nul, puis celui d'un terme égal à  $-2$ , puis celui d'un terme  $\leq -3$ , puis celui d'un terme égal à  $-1$ , ce dernier cas se divise en de nombreux sous-cas selon que le terme immédiatement après est  $1$  ou non, et selon la distance de  $-1$  à la queue de la liste

$$(3) \quad \lambda \cdot [y, 0, a] \cdot \mu \mapsto \lambda \cdot [y+a] \cdot \mu$$

$$(4) \quad \lambda \cdot [y, -2, a] \cdot \mu \mapsto \lambda \cdot [y-1, 2, a-1] \cdot \mu$$

suivi de (1) ou (3) si  $a=1$

$$(5) \quad \lambda \cdot [y, -(2+c), a] \cdot \mu \mapsto \lambda \cdot [y-1, 1, c, 1, a-1] \cdot \mu$$

suivi de (1) ou (3) si  $a=1$

$$(6) \quad \lambda \cdot [y, -1, a+1] \cdot \mu \mapsto \lambda \cdot [y-2, 1, a-1] \cdot \mu$$

suivi de (1) ou (3) si  $a=1$

$$(7) \quad \lambda \cdot [y, -1, 1, a, b] \cdot \mu \mapsto \lambda \cdot [y-a-2, 1, b-1] \cdot \mu$$

suivi de (1) ou (3) si  $b=1$

$$(8) \quad \lambda \cdot [y, -1, 1, a] \mapsto \lambda \cdot [y-a-1]$$

$$(9) \quad \lambda \cdot [y, -1, 1] \mapsto \lambda \cdot [y]$$

*Tout à la fin*, la règle (10) est utilisée pour se ramener au dfc ordinaire si le vrai dfc obtenu est de longueur au moins 2 et se termine par 1 .

$$(10) \lambda \cdot [ y, 1 ] \mapsto \lambda \cdot [ y + 1 ]$$

Ceci donne l'algorithme suivant :

**Algorithme 2 :**

*Première phase.* Tant qu'il existe un terme = 0 ailleurs qu'en tête de liste appliquez la règle (0) (par exemple en traitant toujours le dernier terme nul dans la liste).

*Deuxième phase.* Tant qu'il existe un terme  $\leq 0$  ailleurs qu'en tête de liste appliquez les règles (1) à (9) , de manière itérative, en appliquant toujours celle des neuf règles qui s'applique au dernier terme  $\leq 0$  de la liste. On a alors obtenu un vrai dfc (pair ou impair).

*Terminez* en appliquant éventuellement la règle (10).

Si la liste finale obtenue est vide cela signifie que le faux dfc représente l'élément  $\infty$  . Cela ne pourra pas se produire avec les listes issues de l'algorithme 1 .

La première phase de l'algorithme n'est pas nécessaire, mais son utilisation permet de montrer plus clairement la deuxième partie de la proposition 2.

Notez que seules les règles (2) et (5) augmentent éventuellement la longueur de la liste.

Remarquons aussi que dans [Men2] manquent les règles (1), (2), (8) et (9). Ce sont des règles concernant la queue de la liste. Elles ne changent pas la valeur du dfc dans  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , mais elles changent la fonction homographique associée au dfc.

**Proposition 2 :** L'algorithme 2 traite un faux dfc arbitraire (représentant un élément  $x$  de  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ) et le transforme en le développement en fraction continue ordinaire de  $x$  .

Une liste fournie par l'algorithme 1 à laquelle on fait subir l'algorithme 2 n'augmente jamais de longueur.

*preuve*> La première partie de la proposition est claire (il suffit de vérifier que chacune des règles est correcte et de voir que l'algorithme termine à coup sûr).

La deuxième affirmation résulte des «Faits 1» affirmés après la proposition 1 et d'une analyse détaillée des cas.

La première remarque est que dans l'application de l'algorithme 2 à une liste fournie par l'algorithme 1, durant la deuxième phase, le début de liste  $\lambda \cdot [ y ]$  présent dans les 9 règles utilisées est un segment initial de la liste issue de la première phase et ne contient donc jamais de termes = 0 ni de terme  $< -1$  , sauf éventuellement la tête de liste. En outre, dans ce début de liste, un terme non initial égal à  $-1$  est toujours précédé de deux termes  $> 0$  .

Il faut maintenant vérifier que lorsque les règles (2) ou (5) sont appliquées (les seules qui allongent éventuellement la liste), elles ont été précédées d'événements qui ont suffisamment raccourci la liste pour que le résultat global ne soit jamais un allongement. C'est clair pour le cas de la règle (2), qui rallonge éventuellement la liste de un, car elle est précédée de l'un des 6 cas suivants, qui tous raccourcissent la liste :

- règle (2) avec  $c = 1$  et  $y \leq 0$
- règle (4) avec  $\mu = \emptyset$  ,  $a = 1$  et  $y \leq 0$
- règle (6) avec  $\mu = \emptyset$  ,  $a = 1$  et  $y \leq 1$

- règle (7) avec  $\mu = \emptyset$ ,  $b = 1$  et  $y \leq 1 + a$
- règle (8) avec  $y \leq a$
- règle (9) avec  $y \leq 0$

Le cas de la règle (5), qui rallonge éventuellement la liste de deux, est plus subtil. Il est précédé de l'un des deux cas suivants :

- règle (7) avec  $y < a$  et ( $\mu \neq \emptyset$  ou  $b > 1$ )

Ici, tout va bien car cette règle raccourcit la liste de deux.

- règle (6) avec  $y = -1$  et ( $\mu \neq \emptyset$  ou  $a > 1$ )

On est un peu ennuyé, parce que cette règle ne raccourcit pas la liste.

Néanmoins, il faut se demander quand est-ce que le cas peut vraiment se produire. On a en effet deux  $-1$  consécutifs dans la liste, et ceci ne peut arriver qu'après des événements qu'il est intéressant de préciser. Cela peut être a priori ou bien l'application des règles (2), (4) ou (5) avec  $y = 0$  ou bien l'application de la règle (6) avec  $y = 1$  ou bien celle de la règle (7) avec  $y = a+1$  ou bien celle de la règle (8) avec  $y = a$ . Avec dans chacun des cas  $\lambda$  non vide et se terminant par  $-1$ . Vue la remarque initiale, les trois premiers cas ne peuvent pas se produire car un terme nul dans  $\lambda \cdot [y]$  ne peut être qu'en tête de liste. Les deux derniers cas nous conviennent car les règles (7) et (8) raccourcissent la liste au moins de deux. Le cas de la règle (6) est le seul vraiment ennuyeux. Fort heureusement, il ne peut se produire deux fois de suite (la deuxième fois, on tomberait sur la règle (7) ou la règle (8)). Or ce devrait être nécessaire pour que deux  $-1$  consécutifs se retrouvent dans une liste transformée.  $\square$

### 2.3) Conséquences pour la longueur des développements en fraction continue

**Théorème 1 :** Soit  $x$  un rationnel .

- 1) On considère des entiers  $a > 0$ ,  $b$  arbitraire,  $d > 0$ . On pose  $\Delta = a.d$ . Alors

$$\mathbf{If}(x) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{If}((a.x+b)/d) \leq \mathbf{If}(x) \theta(\Delta)$$

- 2) On considère des entiers  $a < 0$ ,  $b$  arbitraire,  $d > 0$ . Alors

$$(\mathbf{If}(x) - 1) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{If}((a.x+b)/d) \leq \mathbf{If}(x) \theta(\Delta) + 1$$

*preuve*> (1) L'inégalité  $\mathbf{If}((a.x+b)/d) \leq \mathbf{If}(x) \theta(\Delta)$  résulte des propositions 1 et 2. Par ailleurs la transformation réciproque  $y \mapsto (d.y - b)/a$  est du même type et elle a même déterminant. Cela fournit l'inégalité  $\mathbf{If}(x) \leq \mathbf{If}((a.x+b)/d) \theta(\Delta)$ .

(2) Rappelons le passage de  $x$  à  $-x$  pour les dfc (vrais ou faux).

- si  $x = / x_0 /$  alors  $-x = / -x_0 /$
- si  $x = / x_0, x_1 /$  alors  $-x = / -(x_0+1), 1, x_1 - 1 /$  suivi de la règle (1) si  $x_1 = 1$
- si  $x = / x_0, x_1, x_2, \dots /$  alors  
 $-x = / -(x_0+1), 1, x_1 - 1, x_2, \dots /$  suivi de la règle (3) si  $x_1 = 1$ .

Dans le cas des dfc ordinaires, il faut terminer éventuellement avec la règle (10).

Donc  $\mathbf{If}(-x) \leq \mathbf{If}(x) + 1$

On a ensuite  $\mathbf{If}(-(a.x+b)/d) \leq \mathbf{If}(x) \theta(\Delta)$ . D'où  $\mathbf{If}((a.x+b)/d) \leq \mathbf{If}(x) \theta(\Delta) + 1$ .

Pour l'autre inégalité on considère la transformation réciproque  $y \mapsto (-d.y + b)/(-a)$  et on applique le résultat précédent.  $\square$



**Remarque :** Lorsque  $(a.s_0+b)/d$  est un entier, par exemple lorsque  $d = 1$  (cas traité dans [Men1]) la liste  $\lambda_0$  fournie par l'algorithme 1 est de longueur 1 et on peut donc obtenir une majoration légèrement meilleure. Par exemple dans le cas (1) du théorème 1 :

$$\mathbf{lf}((a.x+b)/d) \leq (\mathbf{lf}(x) - 1) \theta(\Delta) + 1$$

### 3) Calcul du développement en fraction continue de $(a.x+b)/(c.x+d)$ à partir du développement en fraction continue de $x$

On supposera dans toute cette section que  $a, b, c$  et  $d$  sont quatre entiers premiers entre eux dans leur ensemble et que le déterminant  $\Delta = a.d - b.c$  est  $\neq 0$ .

Nous ramenons le calcul (posé en titre de section) au calcul donné dans la section 2 au moyen d'un algorithme qui est essentiellement celui donné dans [Men2]. Nous donnons le lemme correspondant sous forme matricielle.

**Lemme 2 :** On considère des entiers  $a, b, d$  arbitraires,  $c > 0$ . On suppose  $a, b, c$  et  $d$  premiers entre eux dans leur ensemble et le déterminant  $\Delta = a.d - b.c \neq 0$ .

On note  $/e_0, e_1, e_2, \dots, e_r$  le dfc pair (resp. le dfc impair) de  $a/c$  si  $\Delta < 0$  (resp. si  $\Delta > 0$ ). Soit  $\varepsilon = \pm 1$  le signe du déterminant  $\Delta$ .

On note  $g = \text{pgcd}(|a|, c)$ ,  $a' = a/g$ ,  $c' = c/g$ ,  $c''$  le dénominateur de l'avant dernier convergent, c.-à-d. encore que  $a', c'$  et  $c''$  sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} e_r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

alors on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} e_r & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & \varepsilon(c''b - a''d) \\ 0 & |\Delta|/g \end{pmatrix} \quad (***)$$

$$\text{Donc } \frac{a.x + b}{c.x + d} = /e_0, e_1, e_2, \dots, e_r, \frac{g.x + \varepsilon.(c''b - a''d)}{|\Delta|/g} /$$

*preuve*> Le déterminant de la matrice (\*\*) est égal à  $\varepsilon$  par choix de la parité du dfc considéré. Le calcul de la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} c'' & -a'' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

fournit facilement les termes  $0, \varepsilon\Delta/g = |\Delta|/g$  et  $\varepsilon.(c''b - a''d)$  de la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} g & \varepsilon.(c''b - a''d) \\ 0 & |\Delta|/g \end{pmatrix}$$

on en déduit le terme  $g$  puisque le déterminant de  $\mathbf{B}$  est égal à  $\varepsilon\Delta$ , et enfin l'égalité (\*\*\*) en résulte.  $\square$

On en déduit l'algorithme suivant pour le calcul du dfc de  $y = \frac{a.x + b}{c.x + d}$ , lorsque  $c > 0$ .

- Calculer le dfc (pair ou impair) de  $a/c$  et appliquez le lemme 2.

- Calculer ensuite le dfc de  $\frac{g x + \varepsilon (c''b - a''d)}{|\Delta|/g}$  conformément à l'algorithme de la section 2 (cas du déterminant  $> 0$ ).
- Mettre les deux dfc bout à bout.

On obtient un dfc représentant  $y$ . Ce dfc est un faux dfc uniquement dans le cas où le deuxième dfc commence par un terme  $\leq 0$ .

- dans ce cas appliquer les règles de réduction décrites à la section 2

Ici, on voit facilement que l'application de ces règles ne produira pas une augmentation de longueur supérieure à 2. (notez que par contre elles peuvent réduire le faux dfc jusqu'au dfc vide de  $\infty$  dans le cas où  $x = -d/c$ )

Ainsi, compte tenu du théorème 1, nous obtenons le théorème 2 suivant :

**Théorème 2 :** Soit un rationnel  $x$  et des entiers  $a, b, c > 0, d$ . On suppose  $a, b, c$  et  $d$  premiers entre eux dans leur ensemble et le déterminant  $\Delta = a.d - b.c \neq 0$ .

Alors, si  $\Delta > 0$ , on a

$$(\mathbf{lf}(x) - \mathbf{lf}(-d/c) - 2) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{lf}\left(\frac{a.x + b}{c.x + d}\right) \leq \mathbf{lf}(x) \theta(\Delta) + \mathbf{lf}(a/c) + 2$$

et si  $\Delta < 0$ , on a

$$(\mathbf{lf}(x) - \mathbf{lfp}(-d/c) - 2) / \theta(\Delta) \leq \mathbf{lf}\left(\frac{a.x + b}{c.x + d}\right) \leq \mathbf{lf}(x) \theta(\Delta) + \mathbf{lfp}(a/c) + 2$$

On notera que ces bornes sont plus simples et améliorent assez sensiblement celles données dans [Men2].

#### Remarques :

- 1) Le théorème 1 peut être considéré comme un cas particulier du théorème 2 si nous prenons conventionnellement  $\mathbf{lf}(\infty) = -2$  et  $\mathbf{lfp}(\infty) = -1$  (ce qui est certes très conventionnel)
- 2) Lorsque  $\Delta = \pm 1$  on n'a pas besoin d'appliquer l'algorithme de la section 2 après le "lemme 2" de la section 3. Ceci confirme la convention  $\theta(\pm 1) = 1$ .

## 4) Continuité uniforme d'une fonction homographique rationnelle

Le théorème suivant peut être interprété en disant que la transformation d'un irrationnel  $x$  par une fonction homographique rationnelle (c.-à-d. à coefficients entiers) de déterminant  $\Delta$  est (à peu près) lipshitzienne de rapport  $\theta(\Delta)$  en tant qu'application des irrationnels vers les irrationnels, donnés par leurs dfc, avec la distance

$$d(/ a_0, a_1, \dots, a_n, \dots /, / b_0, b_1, \dots, b_n, \dots /) = 1/(\text{premier indice } i \text{ tel que } a_i \neq b_i)$$

**Théorème 3 :** Soit  $x$  un réel, rationnel ou irrationnel, et  $a, b, c, d$  des entiers premiers entre eux dans leur ensemble avec  $\Delta = a.d - b.c \neq 0$ .

Soit  $y = \frac{a.x + b}{c.x + d}$  et posons

$$\varphi(k) = k \theta(\Delta) + \mathbf{lf}(-d/c) + 2 \text{ si } \Delta > 0, \quad \varphi(k) = k \theta(\Delta) + \mathbf{lfp}(-d/c) + 2 \text{ si } \Delta < 0$$

Alors les  $k$  premiers termes du dfc de  $y$  ne dépendent que des  $\varphi(k)$  premiers termes du dfc de  $x$ . Ils peuvent donc être obtenus en appliquant les algorithmes décrits aux sections 2 et 3 pour les  $\varphi(k)$  premiers termes du dfc de  $x$ .

**Remarque :** Si  $c = 0$  on appliquera dans la majoration donnée ci-dessus la convention expliquée en remarque après le théorème 2 :  $\mathbf{lfi}(\infty) = -2$  et  $\mathbf{lfp}(\infty) = -1$ .

*preuve*> Notons  $\psi$  la fonction homographique  $z \mapsto \frac{a.z + b}{c.z + d}$

Certifier que  $\psi(x)$  a les  $k$  premiers termes de son dfc égaux à  $[y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}]$  revient à comparer  $\psi(x)$  aux deux rationnels :

$$/ y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1} / \text{ et } / y_0, y_1, y_2, \dots, 1+y_{k-1} /$$

cela revient à comparer  $x$  aux trois rationnels

$$-d/c, \psi^{-1}( / y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1} / ) \text{ et } \psi^{-1}( / y_0, y_1, y_2, \dots, 1+y_{k-1} / )$$

Chacun de ces trois rationnels a une longueur inférieure ou égale à  $\varphi(k)$ .

Enfin la comparaison de deux réels donnés par leurs dfc (finis ou infinis) est claire dès que les dfc divergent.  $\square$

## Conclusion

Il existe dans la littérature d'autres algorithmes que celui de Mendès France pour calculer le dfc  $/ y_0, y_1, y_2, \dots, y_k, \dots /$  de  $y = (a.x+b)/(c.x+d)$  à partir du dfc  $/ x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots /$  de  $x$ .

Signalons par exemple l'algorithme de Raney [Ran] qui est de conception très simple, mais qui offre l'inconvénient de travailler avec des "entiers bâtons". Le réel  $x$  est supposé  $> 0$ , les entiers  $a, b, c, d$  sont supposés  $\geq 0$  avec le déterminant  $(ad - bc) > 0$ . Le dfc de  $x$  est présenté à la Farey, c.-à-d. par exemple que  $/ 3, 6, 1, 8, \dots /$  est représenté par la suite infinie 000111111011111110... . De même le dfc de  $y$  sera présenté sous une forme analogue. On appelle  $p$  la lettre suivante "à lire" (0 ou 1) dans le dfc de  $x$  et  $q$  la lettre suivante "à écrire" dans le dfc de  $y$ . On note  $U$  et  $V$  les matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note  $\mathbf{P}$  l'ensemble des matrices à coefficients  $\geq 0$ .

Enfin  $M$  est une matrice qui évolue au cours de l'algorithme (mais son déterminant reste inchangé).

Voici l'algorithme.

- 1 Initialiser  $M$  avec  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- 2 Si  $p = 0$  faire  $M \leftarrow M U$  sinon faire  $M \leftarrow M V$
- 3 Tant que  $(U^{-1} M \in \mathbf{P}$  ou  $V^{-1} M \in \mathbf{P})$  faire
  - si  $U^{-1} M \in \mathbf{P}$  faire  $M \leftarrow U^{-1} M, q \leftarrow 0$
  - si  $V^{-1} M \in \mathbf{P}$  faire  $M \leftarrow V^{-1} M, q \leftarrow 1$
 fin du tant que
- 4 Aller à 2

L'algorithme de Raney, (et à notre connaissance les autres algorithmes présentés) reviennent à calculer des intervalles rationnels de plus en plus précis sur lequel est situé  $y$  jusqu'à trouver sa partie entière  $y_0$ , puis son premier quotient partiel  $y_1$ , puis le deuxième quotient partiel  $y_2$ , etc... Ces algorithmes n'ont donc pas vraiment une spécificité adaptée au problème que l'on veut

résoudre. En particulier, ils ne peuvent donner aucune information de nature arithmétique fine comparable à celle que donne l'algorithme de Mendès France (théorèmes 1, 2 et 3 ci-dessus).

Un autre inconvénient de l'algorithme de Raney réside dans la difficulté qu'il y a à récupérer le dfc usuel de  $y$  à partir de son développement de Farey. En effet, il est assez facile de vérifier qu'il n'existe pas de fonctionnelle récursive qui réalise cette opération (cf. [LL]). En d'autres termes, les algorithmes travaillant avec les développements de Farey ne se situent pas dans la même «composante connexe» que ceux travaillant avec les dfc usuels.

Henri LOMBARDI  
Laboratoire de Mathématiques  
URA CNRS 741  
Université de Franche-Comté  
25030 BESANÇON Cedex  
FRANCE  
email : hl@grenet.fr

Salah LABHALLA  
Département de Mathématiques  
Université de Marrakech  
Bd de SAFI. BP S 15  
MARRAKECH  
MAROC

### Références

- [Coh] Cohen H. *Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique*. Acta Arithmetica 26 p 129-148 (1974)
- [LL] Labhalla S., Lombardi H. : *Fractions de Farey et coupures de Dedekind*. En préparation.
- [Men1] Mendès France M. : *Sur les fractions continues limitées*. Acta Arithmetica 23 p 207-215 (1973)
- [Men2] Mendès France M. : *The depth of a rational number*. Topics in Number Theory (colloq Debrecen, 1974) p 183-194. Coll Mat Soc Janos Bolyai vol 13. (1976)
- [Ran] Raney G. : *On continued fractions and finite automata*. Math. Annal. 206 p 265-283 (1973)